Основы теории вероятности и математической статистики

Лектор: Зелеев М.Х.

- **Событием** называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта;
- События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других. Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте);

- **Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта;
- **Достоверным событием** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта. Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий.

Обозначим появление красного шара - событие A, появление зеленого - событие B, появление белого –C.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$P(A)=3/10$; $P(B)=2/10$; $P(C)=5/10$.

Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна: $W=2/5$.

Вероятность суммы *двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие 1:*Если события образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_i P(A_i) = 1$$

Для рассмотренного выше примера: 2/10+3/10+5/10=1.

Следствие 2:*Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Вероятность произведения двух независимых событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на вероятность другого:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Пример. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна $P(A)= 0,9$, для второго – $P(B)=0,8$. Определить вероятность того, что в цель попадёт хотя бы один стрелок.

Решение. $q(A)= 1- 0,9= 0,1$ (вероятность промаха первого стрелка); $q(B)= 1-0,8= 0,2$ (вероятность промаха второго стрелка); тогда вероятность одновременного промаха обоих стрелков определится следующим образом: $q(AB)=0,1\cdot 0,2=0,02$. Событие противоположное этому событию заключается в поражении цели хотя бы одним стрелком. Следовательно, искомая вероятность $P= 1 – 0,02 = 0,98$.

Повторение испытаний.Формула Бернулли.

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие A наступает с вероятностью $P(A)=p$, а противоположное ему событие с вероятностью $P(\overline{A})=1-p=q$.

Если в результате n опытов событие А наступает ровно m раз, то остальные n-m раз это событие не наступает. Событие А может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$c_{n,m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли**:

$$p_{n,m} = c_{n,m} p^m q^{n-m}$$

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали три раза.

$$p_{5,3} = \frac{5!}{3!\,2!} 0{,}4^3 0{,}6^2 = 0{,}23$$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$; $3! = 6$; $2! = 2$; $c_{5,3} = 10$.

$P_{5,5} = 0{,}078$; $p_{5,4} = 0{,}259$; $p_{5,3} = 0{,}344$; $p_{5,2} = 0{,}23$; $p_{5,1} = 0{,}077$; $p5{,}0 = 0{,}012$.

$078 + 0{,}259 + 0{,}344 + 0{,}23 + 0{,}077 + 0{,}012 = 1$

Случайные величины.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

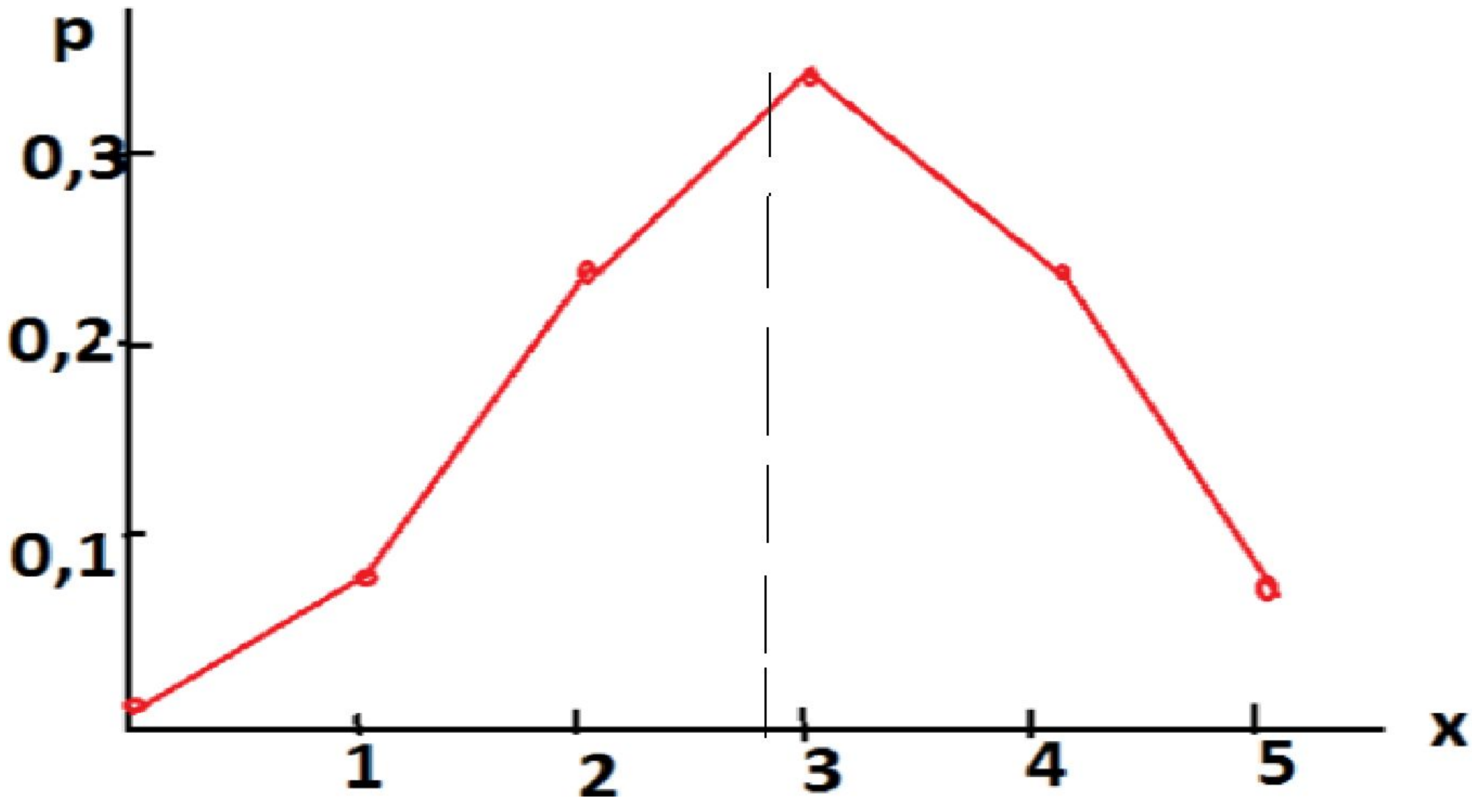
Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Закон распределения для рассмотренного примера:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,012	0,077	0,23	0,344	0,259	0,075



- **Функцией распределения** называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее *x*: $F(x)=P(X<x)$.

Для рассмотренного примера:

$F(x_0)=P(X<x_0)=0;$

$F(x_1)=P(X<x_1)=p_0=0,012;$

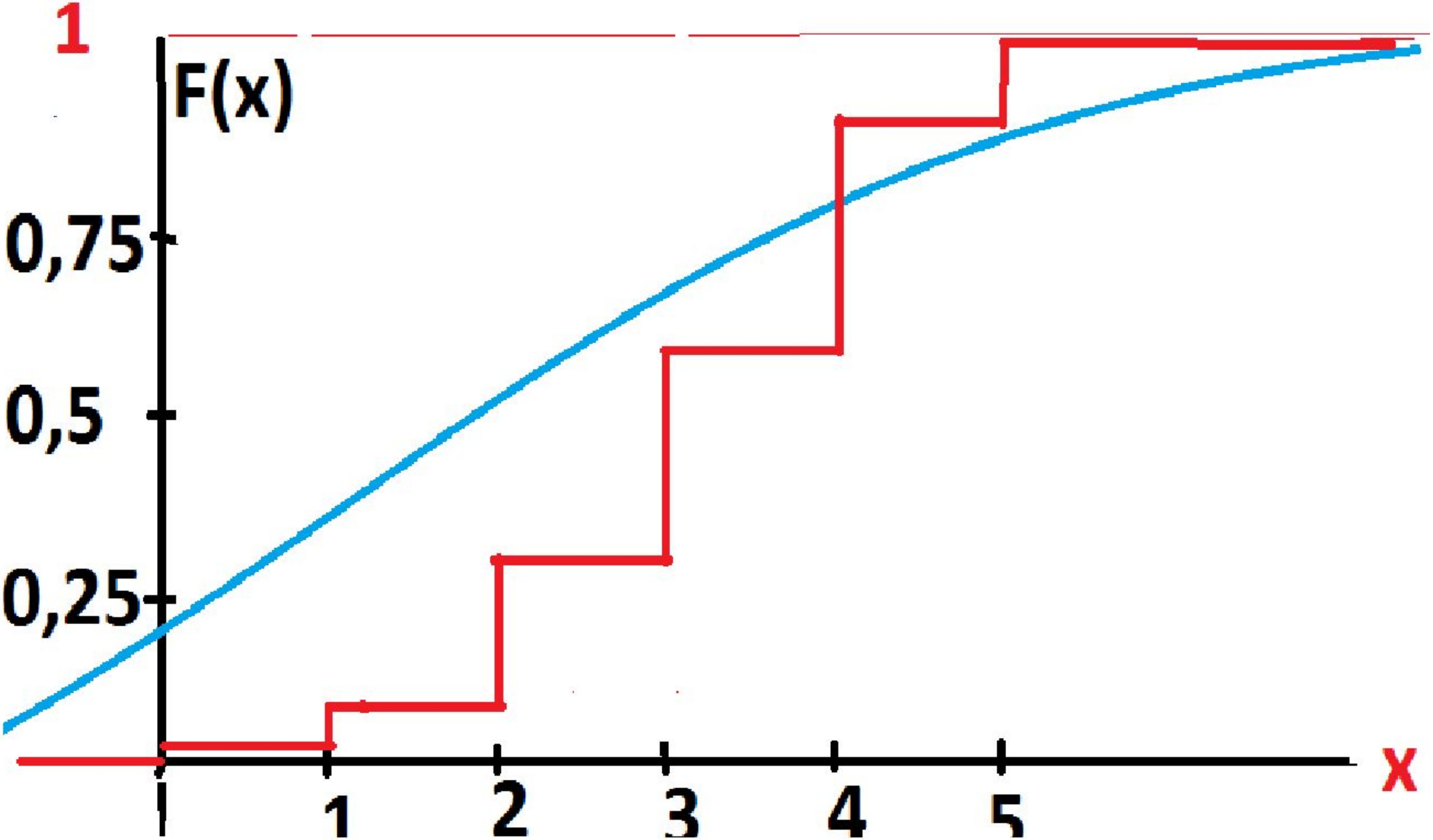
$F(x_2)=P(X<x_2)=p_0+p_1=0,089;$

$F(x_3)=P(X<x_3)=p_0+p_1+p_2=0,319;$

$F(x_4)=P(X<x_4)=p_0+p_1+p_2+p_3=0,663;$

$F(x_5)=P(X<x_5)=p_0+p_1+p_2+p_3+p_4=0,922;$

$F(x)=P(X>x_5)=p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1.$


1
F(x)
0,75
0,5
0,25
1
2
3
4
5
X

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения $f(x)=F'(x)$. Плотность распределения также называют дифференциальной функцией.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$\mu = M(x) = x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i .$

Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины, показывает центр распределения.

Для рассмотренного выше примера:

$\mu = 0{,}012 \cdot 0 + 0{,}077 \cdot 1 + 0{,}23 \cdot 2 \cdot + 0{,}344 \cdot 3 + 0{,}259 \cdot 4 + 0{,}078 \cdot 5 = 2{,}8.$

Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$\sigma^2 = D(x) = M[x - M(x)]^2$$

Для рассмотренного выше примера вычислим:

$\sigma^2 = 0{,}012(0-2{,}8)^2 + 0{,}077(1 - 2{,}8))^2 + 0{,}23(2 - 2{,}8)^2 + 0{,}344(3-2{,}8)^2 + 0{,}259(4-2{,}8)^2 + 0{,}075(5-2{,}8)^2 = 1{,}255.$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma = \sqrt{D(x)}$

Для рассмотренного выше примера вычислим:

$\sigma = \sqrt{1{,}255} = 1{,}12.$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

Примеры дискретных распределений

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной ве-
личины X – числа появлений «успеха» в n независимых испытаниях (воз-
можные значения случайной величины X – $0,1,2,\ldots,n$), в каждом из которых
вероятность появления «успеха» равна p; вероятность возможного значения
$X = k$ (числа k появлений «успеха») вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}\ .$$

Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$M(X) = np.$$

Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании:

$$D(X) = npq.$$

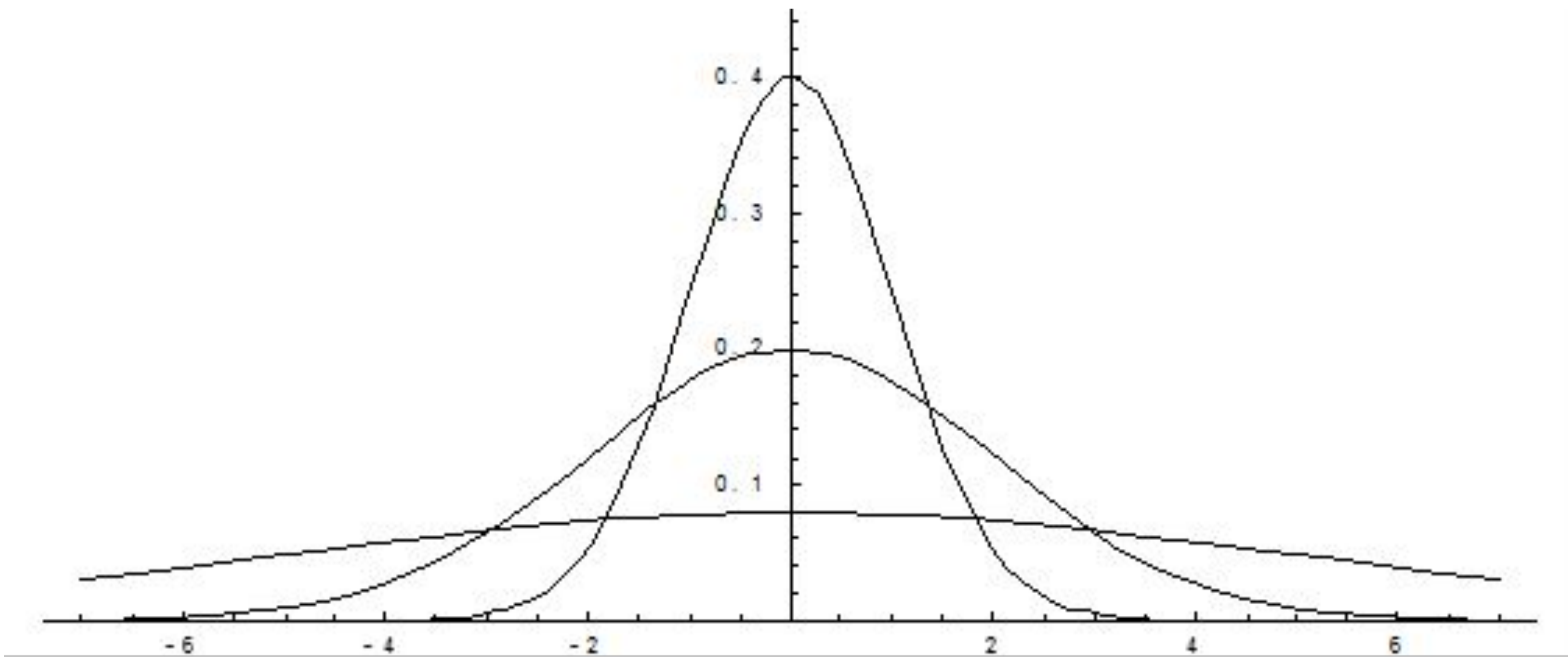
Если число испытаний велико, а вероятность *p* появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где *k* – число появлений события в *n* независимых испытаниях, $\lambda = np$, и говорят, что случайная величина распределена по **закону Пуассона**.

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$, вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),\ \Phi(x) - \text{функция Лапласа.}$$

Правило трёх сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью 0,9973.

Основные понятия математической статистики Генеральная совокупность – совокупность всех изучаемых объектов, N – её объём (количество всех объектов).

Выборочная совокупность – совокупность объектов, отобранных для изучения, n – объём выборки.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Таким образом, вместо большой совокупности объектов изучается совокупность объёма, значительно меньшего по количеству объектов ($n \ll N$).

Результаты, полученные при изучении выборки, распространяются на объекты всей генеральной совокупности. Для этого выборка должна быть репрезентативной (представительной), то есть правильно представлять генеральную совокупность. Это обеспечивается случайностью отбора.

Виды отбора:

– простой случайный:
 повторный; бесповторный;

– сложный случайный:
 типический;
механический; серийный

Статистическое распределение выборки и его характеристики

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, x_k – n_k раз и n – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – вариационным рядом. Числа наблюдений называются частотами, а их отношения к объему выборки

$W_i=n_i/ n$ – относительными частотами.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и

Пример. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения $x_1 = 16$, $x_2 = 17$, $x_3 = 9$, $x_4 = 13$, $x_5 = 21$, $x_6 = 11$, $x_7 = 7$, $x_8 = 7$, $x_9 = 19$, $x_{10} = 5$, $x_{11} = 17$, $x_{12} = 5$, $x_{13} = 20$, $x_{14} = 18$, $x_{15} = 11$, $x_{16} = 4$, $x_{17} = 6$, $x_{18} = 22$, $x_{19} = 21$, $x_{20} = 15$, $x_{21} = 15$, $x_{22} = 23$, $x_{23} = 19$, $x_{24} = 25$, $x_{25} = 1$.

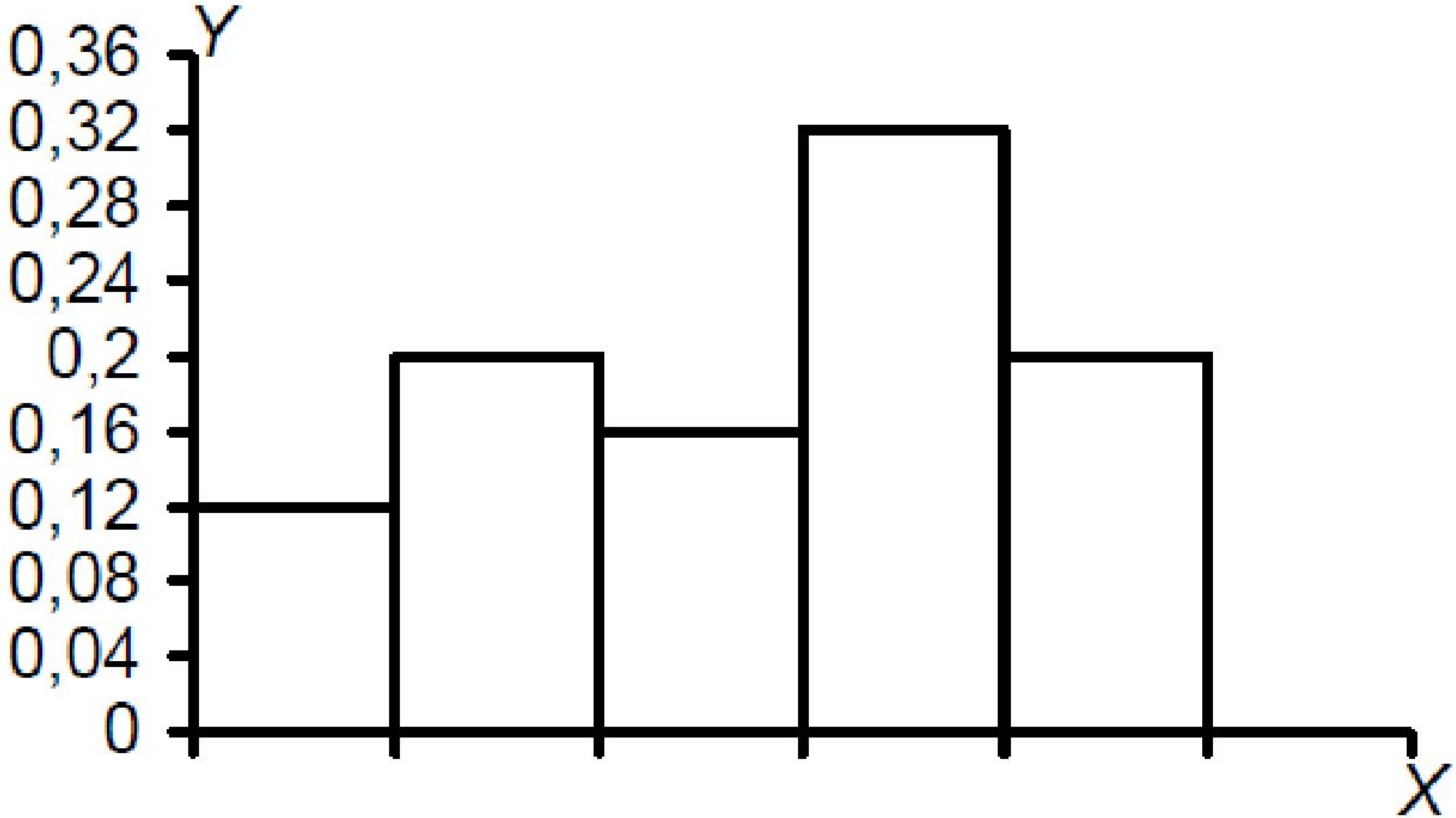
Требуется: составить таблицу статистического распределения, разбив промежуток (0, 25) на пять участков, имеющих одинаковые длины; построить гистограмму одинаковых частот.

Решение. Предварительно составим таблицу

X	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
n_x	3	5	4	8	5

Статистическое распределение имеет вид

X	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
W	0,12	0,2	0,16	0,32	0,2


Y
0,36
0,32
0,28
0,24
0,2
0,16
0,12
0,08
0,04
0
X

- Выборочное среднее:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \ldots + x_k n_k}{n},$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}{n} = \frac{(x_1 - \overline{x}_B)^2 n_1 + (x_2 - \overline{x}_B)^2 n_2 + \ldots + (x_k - \overline{x}_B)^2 n_k}{n},$$

$$D_B = \overline{x_B^2} - \overline{x}_B^2, \text{ где } \overline{x_B^2} = \frac{x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_k^2 n_k}{n},$$

σ_B – выборочное среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_B = \sqrt{D_B},$$

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X<x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

Где n_x – ч [illegible] ант, меньших x; n – объем выборки.

Точечные оценки параметров генеральной совокупности

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Оценка параметра называется несмещённой, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру. $M(\tilde{\Theta}_n)=\Theta_n$).

В противном случае оценка называется смещённой.

Оценка называется состоятельной, если она удовлетворяет закону больших чисел, т.е. сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\tilde{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon)=1.$$

Несмещённая оценка $\tilde{\Theta}_n$ параметра Θ называется **эффективной**, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещённых оценок параметра Θ, вычисленных по выборкам одного и того же объёма *n*.

Параметры генеральной совокупности $\overline{x}_Г$ – генеральная средняя и $D_Г$ – генеральная дисперсия оцениваются по соответствующим параметрам выборки:

$$\overline{x}_Г \approx \overline{x}_В,\ \ D_Г \approx D_В\ (n \geq 30),\ \ \sigma_Г \approx \sqrt{D_Г}\,.$$

$$D_Г \approx S^2\ (n < 30),$$

Интервальная оценка (доверительный интервал) для генеральной средней

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами– концами интервала.

Доверительным интервалом для параметра **ϴ** называется интервал ($\boldsymbol{\theta_1}$, $\boldsymbol{\theta_2}$),
содержащий истинное значение **ϴ** с заданной вероятностью $P(\boldsymbol{\theta_1 < \theta < \theta_2}) \boldsymbol{= 1 - \alpha}$**.**

$\gamma = 1 - \alpha$ называется **доверительной вероятностью (надежностью)**, а
значение α – уровнем значимости.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания *a* нормально распределенного количественного признака *X* по выборочной средней $\overline{x}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ служит доверительный интервал, т.е.

$\overline{x}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, где *n* – объем выборки; *t* – значение аргумента функции Лапласа Ф(*t*), при котором Ф(t) =$\gamma/2$.