!Здравствуйте

Лекция №18

Производные от неявных функций

Если явно функция одной переменной x задается выражением $y = f(x)$, то ее неявное задание имеет вид уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Аналогично, если y зависит от $(x_1, x_2, ..., x_n)$, то неявное задание этой функции имеет вид уравнения

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0,$$

не разрешенного относительно y.

В общем случае можно сразу задавать m функций $y_1, y_2, ..., y_m$ в виде системы из m уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0. \end{cases}$$

Начнем со случая функции одной переменной, задаваемой уравнением $F(x,y)=0$. Представим себе, что мы каким-то образом решили это уравнение и нашли явную зависимость y от x: $y=y(x)$. Если мы эту зависимость подставим в исходное уравнение, то получим тождество

$$F(x,y(x))\equiv 0.$$

Продифференцируем это соотношение по x. Заметим, что в левую часть аргумент x входит в двух видах: сам по себе и как аргумент у $y(x)$. Так как справа при любых x стоит 0, то получим

$$F'_x(x,y(x))+F'_y(x,y(x))\frac{dy}{dx}=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Аналогично, в случае уравнения $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$, если бы нам удалось найти явный вид зависимости $y = y(x_1, x_2, ..., x_n)$ и подставить его в исходное уравнение, то мы получили бы тождество

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, y(x_1, x_2, ..., x_n)) \equiv 0.$$

Дифференцируя по x_i, получим

$$F'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n, y) + F'_y(x_1, x_2, ..., x_n, y)\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n, y)}{F'_y(x_1, x_2, ..., x_n, y)}.$$

В случае системы уравнений, определяющих $y_1, y_2, ..., y_m$, если бы удалось выразить их явно, то есть найти $y_i = y_i(x_1, x_2, ... x_n)$, то, после подстановки их обратно в систему, мы получили бы систему тождеств

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1(x_1, ... x_n), y_2(x_1, ... x_n), ..., y_m(x_1, ... x_n)) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n, y_1(x_1, ... x_n), y_2(x_1, ... x_n), ..., y_m(x_1, ... x_n)) = 0, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad .... \\ F_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1(x_1, ... x_n), y_2(x_1, ... x_n), ..., y_m(x_1, ... x_n)) = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя каждое из тождеств, скажем, по x_i, с учетом того, что x_i входит как само по себе, так и через $y_1, y_2, \ldots, y_m$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Эту систему можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_i}, \ldots, \dfrac{\partial y_m}{\partial x_i}$. Решив ее обычными методами, можно найти сразу все частные производные.

Производные высших порядков

Представим себе, что нам задана, скажем, функция $u = f(x, y, z)$ от трех переменных x, y, z. Мы можем вычислить частные производные от этой функции по аргументам x, y, z:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Но эти производные сами являются функциями от тех же переменных x, y, z. И от них снова можно вычислять производные по тем же аргументам, которые уже будут называться производными второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y, z); \ \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y, z); \ \ \ldots$$

Кроме этих производных есть еще и так называемые **смешанные производные.** Это – производные вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y, z); \ \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y, z).$$

От этих вторых производных можно снова вычислять производные, которые будут называться производными третьего порядка и т.д.

Теорема. Пусть у функции $f(x,y)$ существуют смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ и **они непрерывны** в точке (x_0, y_0).

Тогда в этой точке они равны друг другу, то есть $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что из существования $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ следует, что $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ существуют и непрерывны.

Рассмотрим величину

$$W = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk}.$$

Мы проделаем с ней два преобразования.

Преобразование 1. Введем функцию

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k},$$

у которой существует непрерывная производная

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)}{k}.$$

Тогда, глядя на выражение для W, можно записать

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

По формуле Лагранжа

$$W = \varphi'(x_0 + \theta_1 h) = \frac{f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)}{k},$$

где $0 < \theta_1 < 1$.

В силу того, что аргумент $x_0 + \theta_1 h$ одинаков в обеих производных, по отношению ко второму аргументу можно снова применить формулу Лагранжа. Тогда

$$W = f''_{yx}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k),$$

где $0 < \theta_2 < 1$.

Преобразование 2. Введем функцию

$$\psi(y)=\frac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h}$$

у которой существует непрерывная производная

$$\psi'(y)=\frac{f'_y(x_0+h,y)-f'_y(x_0,y)}{h}.$$

Из выражения для W видно, что

$$W=\frac{\psi(y_0+k)-\psi(y_0)}{k},$$

и, по формуле Лагранжа,

$$W=\psi'(y_0+\theta_3 k)=\frac{f'_y(x_0+h,y_0+\theta_3 k)-f'_y(x_0,y_0+\theta_3 k)}{h},$$

где $0<\theta_3<1$.

Опять-таки, в силу того, что аргумент $y_0+\theta_3 k$ одинаков в обеих производных, по отношению к первому аргументу можно снова применить формулу Лагранжа:

$$W=f''_{xy}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k),$$

где $0<\theta_4<1$.

А теперь подведем итог. Исходное выражение для обоих преобразований одно и то же. Следовательно, и результаты должны быть равны. Поэтому

$$f''_{yx}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)=f''_{xy}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k).$$

А теперь сделаем в этом равенстве предельный переход $h\to 0$, $k\to 0$. Именно в этом месте и нужно предположение о непрерывности смешанных производных в точке (x_0, y_0), так как в силу этой непрерывности после предельного перехода и получится равенство

$$f''_{yx}(x_0, y_0)=f''_{xy}(x_0, y_0).$$

Теорема доказана.

В общем случае имеет место следующая теорема.

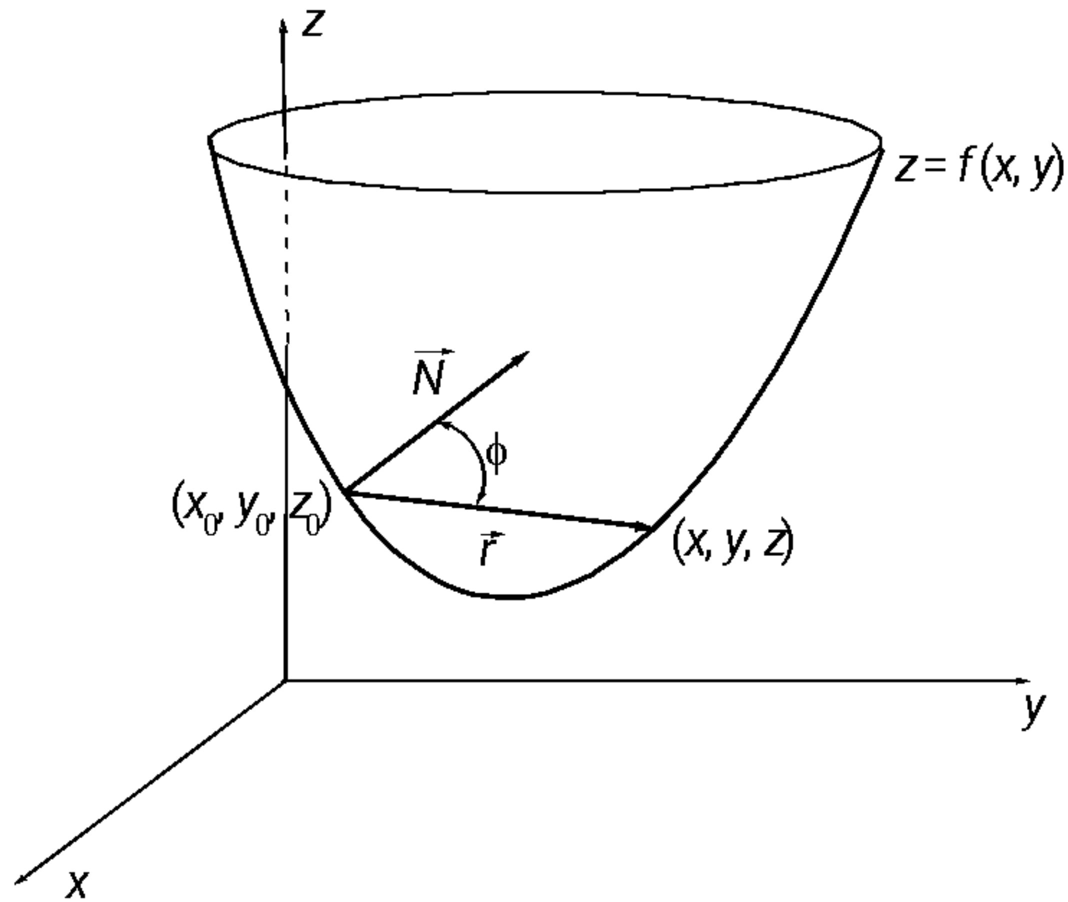
Теорема. Пусть у функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ существуют все смешанные производные до k-го порядка включительно, и они непрерывны. Тогда значения всех производных до k-го порядка не зависят от того, в каком порядке производится дифференцирование

Теперь можно окончательно установить форму записи для смешанных производных. Пусть у функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцирование по x_1 производилось k_1 раз, по x_2 – k_2 раз, …, по x_n – k_n раз, так что $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$. Тогда соответствующая производная записывается в виде

$$\frac{\partial^k f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}$$

Нормаль к поверхности

Рассмотрим сначала поверхность в трехмерном пространстве, заданную в явном виде уравнением $z = f(x, y)$



Пусть M_0 – некоторая точка этой поверхности с координатами (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Пусть $\vec{N}$ – некоторый вектор, проведенный из этой точки.

Сместимся из точки M_0 в точку M с координатами (x, y, z), лежащую на этой же поверхности, то есть $z = f(x, y)$. Две эти точки будет соединять вектор $\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Пусть φ есть угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{r}$.

Определение. Вектор $\vec{N}$ называется **вектором нормали** к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), если $\lim\limits_{M \to M_0} \varphi = \pi/2$, когда точка M приближается к точке M_0.

Другими словами это означает, что вектор $\vec{N}$ становится перпендикулярным вектору $\vec{r}$ независимо от того, с какой стороны точка M приближается к точке M_0. Поэтому условие того, что $\vec{N}$ – вектор нормали в точке (x_0, y_0, z_0) можно переписать в виде

$$\lim_{M \to M_0} \frac{(\vec{r}, \vec{N})}{\|\vec{r}\|} = 0$$

Теорема. Если $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0,\ y_0)$, то вектор нормали имеет компоненты

$$(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1).$$

Доказательство.

Рассмотрим вектор $\vec{N} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$. Смещаясь по поверхности в точку (x, y), мы получим

$$z - z_0 = \Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho),$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, так что вектор $\vec{r}$ имеет компоненты

$$\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)).$$

Тогда получим

$$\frac{(\vec{r},\vec{N})}{\|\vec{r}\|} = \frac{f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y - o(\rho)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho))^2}}$$

Сокращая слагаемые в числителе и деля на ρ, получим

$$\frac{(\vec{r},\vec{N})}{\|\vec{r}\|}=\frac{-o(\rho)/\rho}{\sqrt{1+\left(f'_x(x_0,y_0)\dfrac{\Delta x}{\rho}+f'_y(x_0,y_0)\dfrac{\Delta y}{\rho}+\dfrac{o(\rho)}{\rho}\right)^2}}.$$

Числитель этого выражения стремится к нулю при $\rho\to 0$, а знаменатель в любом случае больше 1. Поэтому

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{(\vec{r},\vec{N})}{\|\vec{r}\|}=0,$$

что и доказывает, что вектор N есть вектор нормали к поверхности в точке $((x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

Пусть теперь поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$. Заметим, что полученное выше выражение для нормали можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right).$$

Но, по правилу нахождения производных от неявных функций,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},$$

то есть

$$\vec{N}=\left(-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},-1\right).$$

Умножим все компоненты этого вектора на $(-F'_z(x_0,y_0,z_0))$. Это изменит длину вектора $\vec{N}$ и (может быть) его направление, но не изменит факта перпендикулярности вектору $\vec{r}$ при $M \to M_0$. Поэтому в данном случае вектором нормали является вектор с компонентами

$$\vec{N}=(F'_x(x_0,y_0,z_0),\ F'_y(x_0,y_0,z_0),\ F'_z(x_0,y_0,z_0)).$$