

* Показательная функция

* Определение

Показательная функция – это

функция вида $y = a^x$,

где x – переменная,

a - заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Примеры: $y = 3^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = 0,4^x$

Область

определения показательной

функции: $D(y) = \mathbb{R}$ – множество
всех действительных чисел.

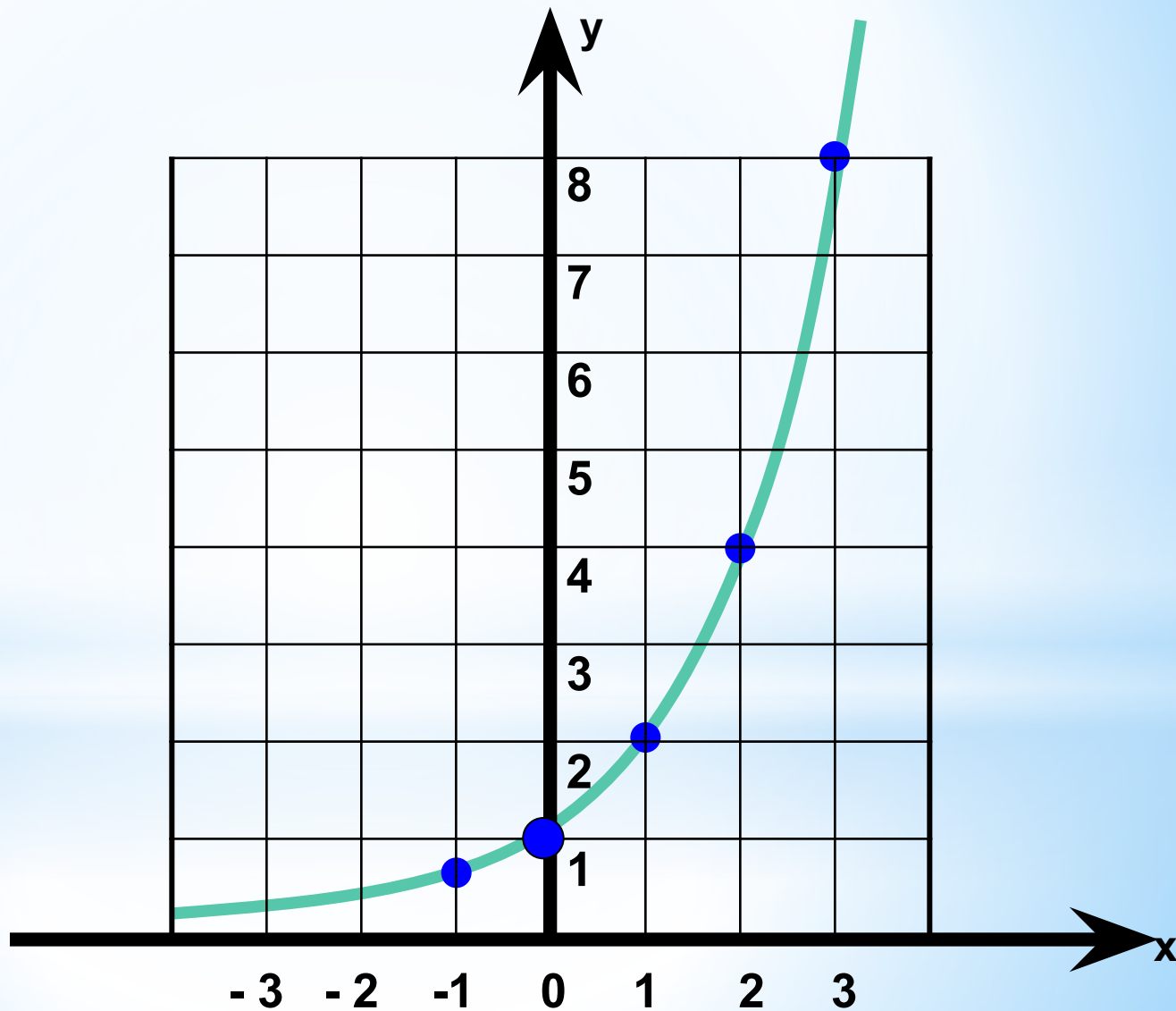
Область

значений показательной

функции: $E(y) = \mathbb{R}^+$ - множество
всех положительных чисел.

Построить график функции $y = 2^x$

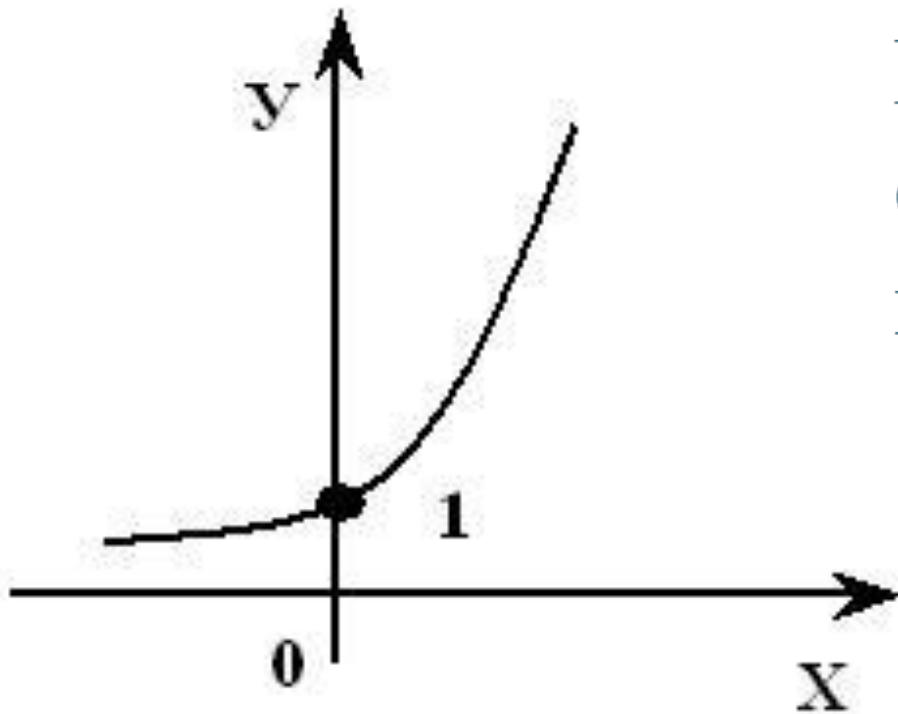
x	y
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Построить график функции

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$$y = 2^x$$

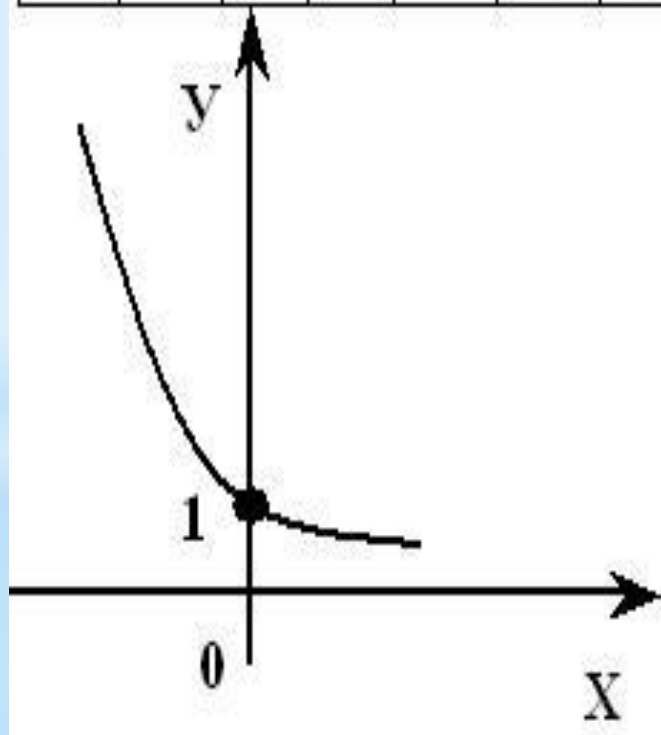


Показательная
функция $y = a^x$
возрастает при $a > 1$.

Построить график функции

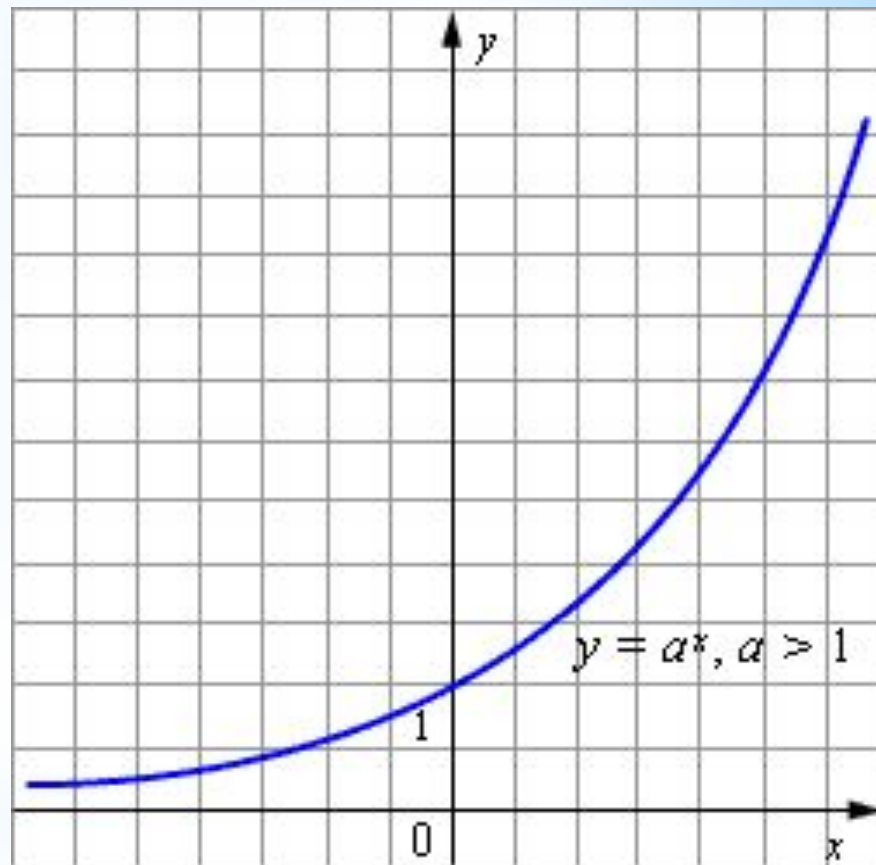
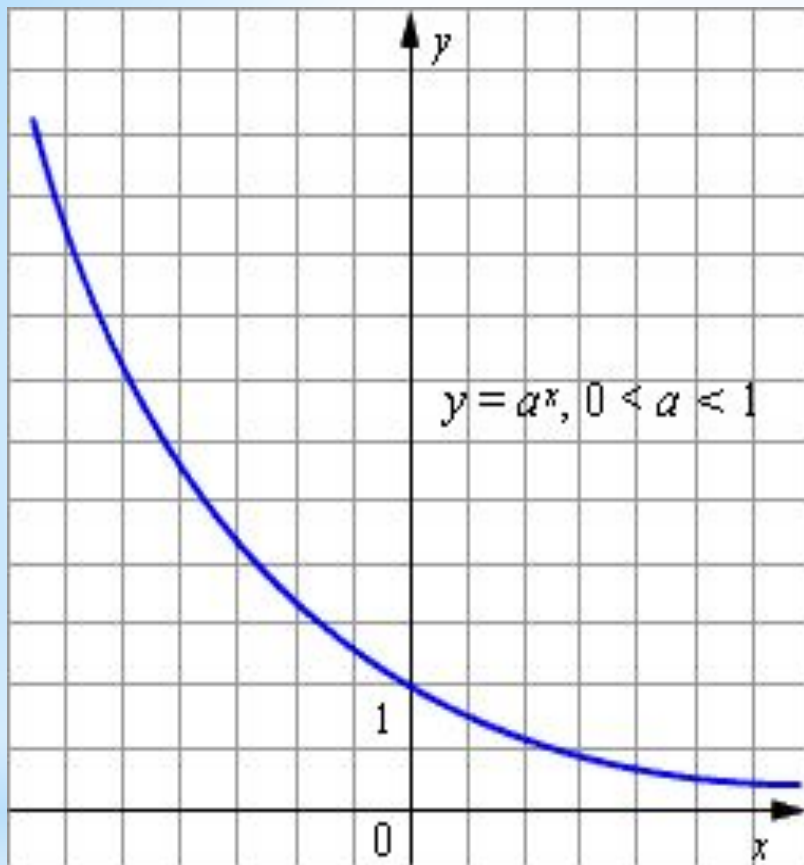
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Показательная функция $y = a^x$ убывает при $0 < a < 1$.

Графики показательной функции:

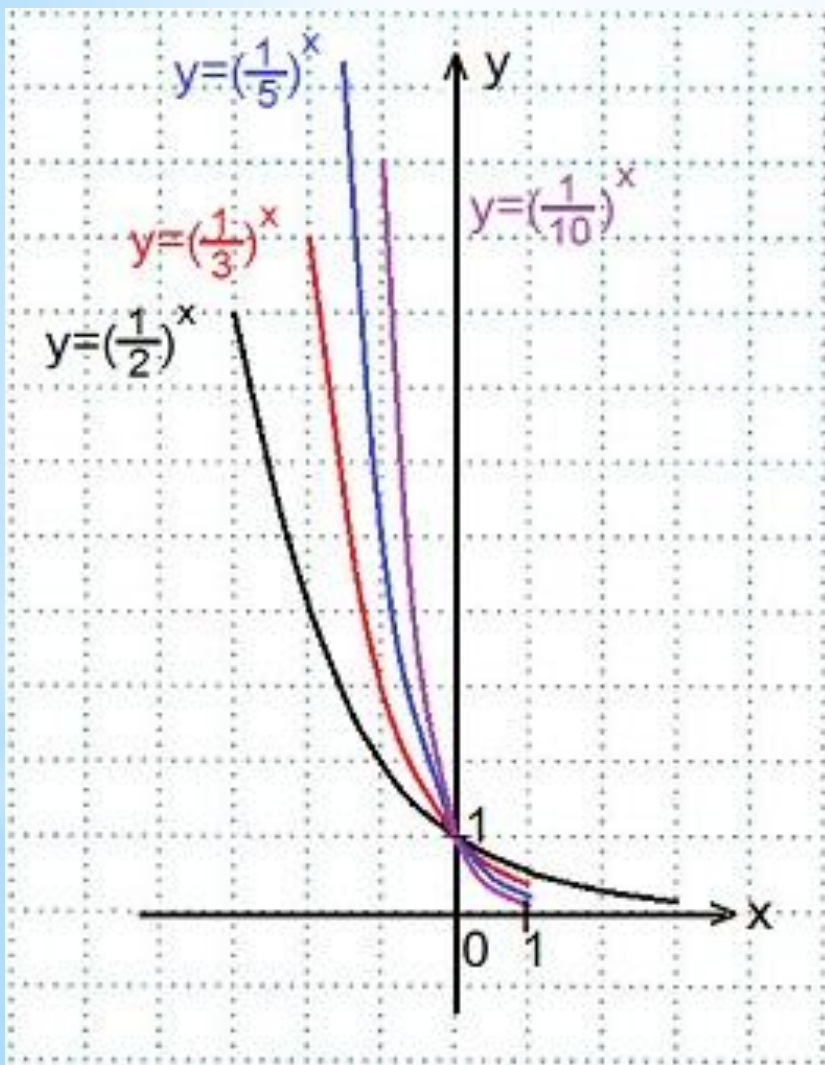


Т.к. $a^0 = 1$, то график любой показательной функции проходит через точку $(0; 1)$

*** Показательная функция обладает следующими свойствами:**

1. $D(f)$: множество \mathbb{R} всех действительных чисел;
2. $E(f)$: множество всех положительных чисел;
3. $f(x) > 0$ при любом значении x ;
4. Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$;
5. Не является ни четной, ни нечетной;
6. Не ограничена сверху, ограничена снизу;
7. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
8. Непрерывна.

В одной координатной плоскости построить графики функций: $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = (\frac{1}{3})^x$, $y = (\frac{1}{5})^x$, $y = (\frac{1}{10})^x$

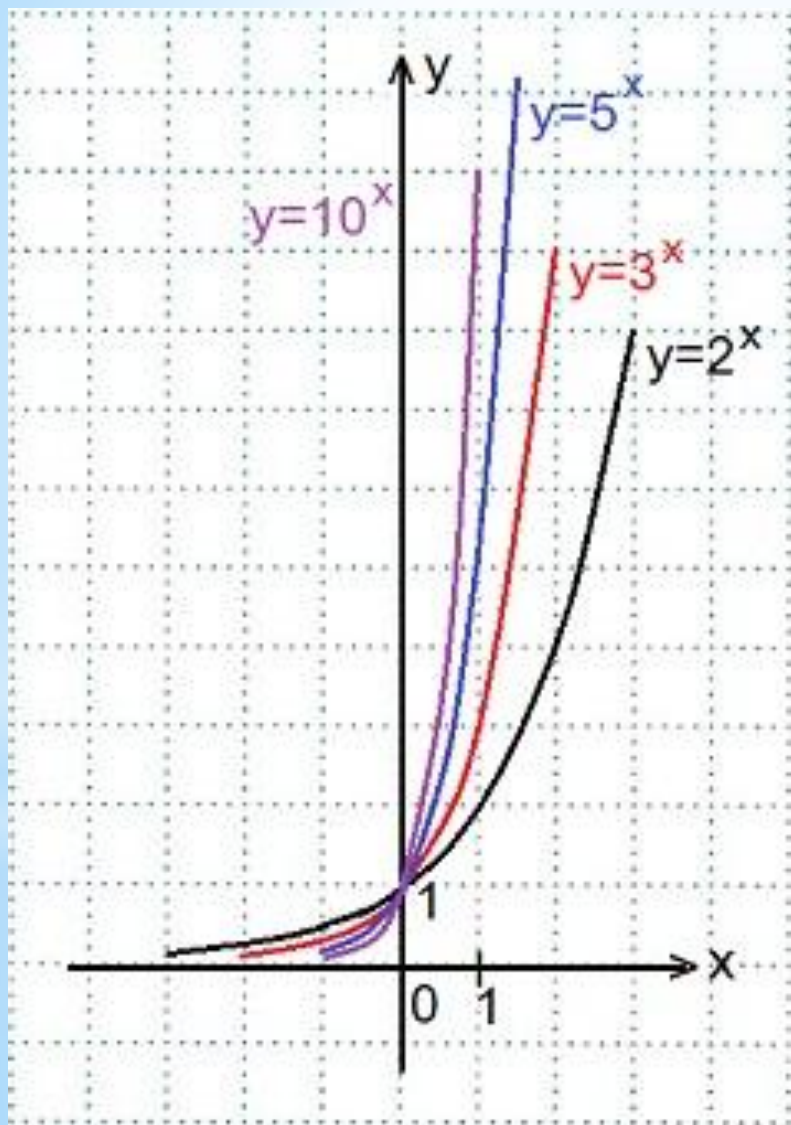


Переменная x может принимать любое значение ($D(y) = \mathbf{R}$), при этом значение y всегда будет больше нуля ($E(y) = \mathbf{R}^+$).

Графики всех данных функций пересекают ось Oy в точке $(0; 1)$,

Все эти функции являются убывающими, так как большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции

В одной координатной плоскости построить графики функций: $y=2^x$, $y=3^x$, $y=5^x$, $y=10^x$.



Переменная x может принимать любое значение ($D(y)=\mathbf{R}$), при этом значение y всегда будет больше нуля ($E(y)=\mathbf{R+}$).

Графики всех данных функций пересекают ось Oy в точке $(0; 1)$.

Все данные функции являются возрастающими, так как большему значению аргумента соответствует и большее значение функции.

Свойства степеней:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$$

Показательная функция

- * Сравнение чисел с использованием свойств показательной функции
- * Сравнение числа с 1
 - аналитический способ;
 - графический способ.

*Задача 1

Сравнить числа

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} \text{ и } \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$$

Решение

$$\sqrt{2} = 1,41\dots > 1,4 \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$$

$$0 < \frac{1}{3} < 1$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

*Задача 2

Сравнить число 3^{-5} с 1.

Решение

$$1 = 3^0$$

$$-5 < 0$$

$$\Rightarrow 3^{-5} < 3^0 \Rightarrow 3^{-5} < 1$$

$$3 > 1$$

Ответ: $3^{-5} < 1$

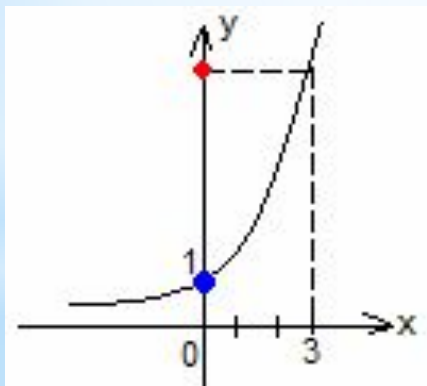
*Задача 3

Сравнить число p с 1

$$p = 2^3$$

$2 > 1$, то

функция $y = 2^t$ –
возрастающая.

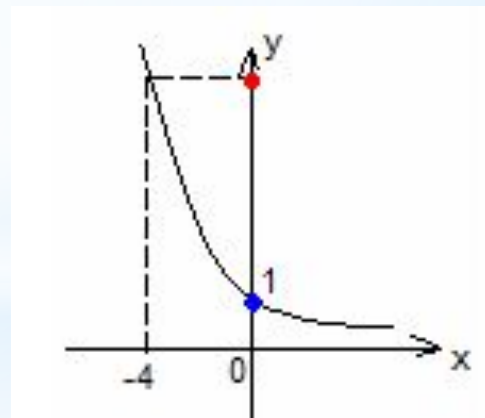


Ответ: $2^3 > 1$.

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$0 < \frac{1}{2} < 1$, то
функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$

– убывающая



Ответ: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} > 1$

*** Используя свойства возрастания и убывания показательной функции сравнить числа:**

Сравнить:

а) 5^3 и 5^5 ;

б) 4^7 и 4^3 ;

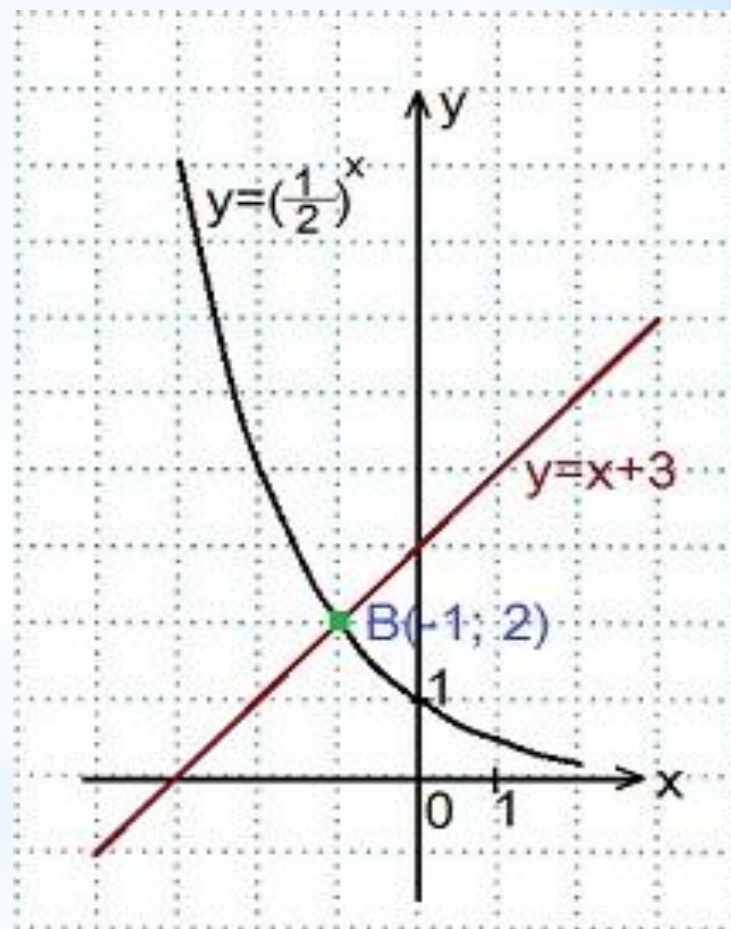
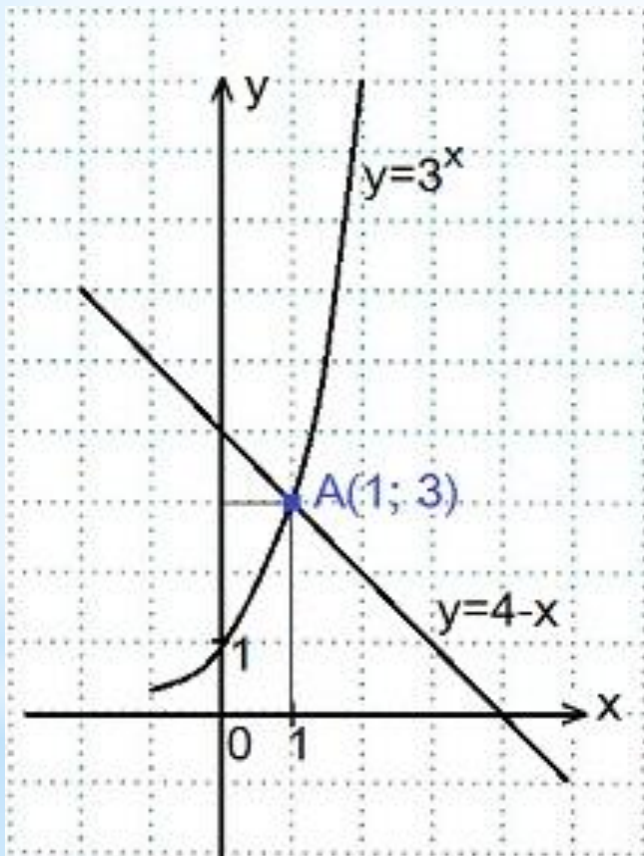
в) $0,2^2$ и $0,2^6$;

г) $0,9^2$ и $0,9$.

* Решить графически уравнения:

1) $3^x = 4 - x$,

2) $0,5^x = x + 3$.



* **Рост древесины** происходит по закону:

$$A = A_0 a^{k \cdot t}$$

A- изменение количества древесины во времени;

A₀ - начальное количество древесины;

t - время, **k, a**- некоторые постоянные.

Давление воздуха убывает с высотой по закону:

P- давление на высоте **h**,

P₀ - давление на уровне моря,

a- некоторая постоянная.

$$P = P_0 \cdot a^{-k \cdot h}$$

Рост народонаселения

Изменение числа людей в стране на небольшом отрезке времени описывается формулой $N = N_0 e^{kt}$

где N_0 - число людей в момент времени $t=0$,

N - число людей в момент времени t ,

a - константа.

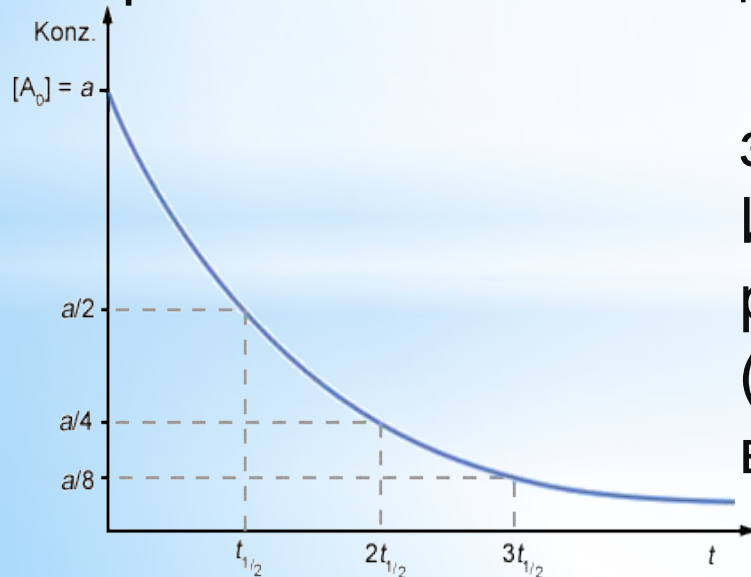


Закон органического размножения: при благоприятных условиях (отсутствие врагов, большое количество пищи) живые организмы **размножились бы по закону показательной функции.**

Например: одна комнатная муха может за лето произвести 8×10^{14} особей потомства. Их вес составил бы несколько миллионов тонн (а вес потомства пары мух превысил бы вес нашей планеты), они бы заняли огромное пространство, а если выстроить их в цепочку, то её длина будет больше, чем расстояние от Земли до Солнца.

Но так как, кроме мух существует множество других животных и растений, многие из которых являются естественными врагами мух их количество не достигает вышеуказанных значений.

Когда радиоактивное вещество распадается, его количество уменьшается, через некоторое время остается половина от первоначального вещества. Этот промежуток времени t_0 называется периодом полураспада. Общая формула для этого процесса: $m = m_0(1/2)^{-t/t_0}$, где m_0 - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество. Это явление используют для определения возраста археологических находок.



Радий, например, распадается по закону: $M = M_0 e^{-kt}$.
Используя данную формулу ученые рассчитали возраст Земли (радий распадается примерно за время, равное возрасту Земли).