$Arcsin$. Решение уравнений $\sin t = a$

Упражнение:

- Решить уравнения:

$$\cos t = \frac{2}{5} \Leftrightarrow t = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi k, k \in Z$$

$\cos t = -5$ − не имеет решения, так как $-5 \notin [-1; 1]$

$$\cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2\pi k, k \in Z$$

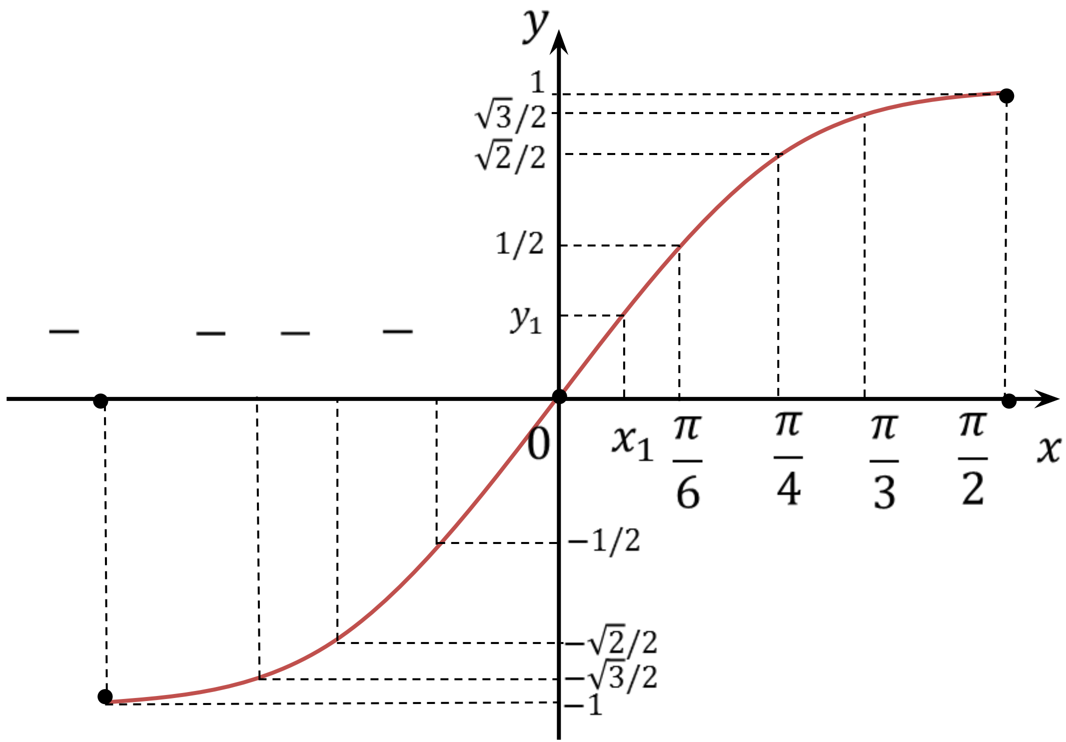
Повторим:

если $|a| \leq 1$, то

$$arccos\, a = t \Leftrightarrow \begin{cases} cos\, t = a, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$cos\, t = a$$

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$$



Функция монотонно возрастает на этом промежутке

$f(x) \in E(f)$

$x_1 = arcsin\, y_1$

если $|a| \leq 1$, то

$$arcsin\, a = t \Leftrightarrow \begin{cases} sin\, t = a, \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{2}\right| < 1, \\ \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right], \\ sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

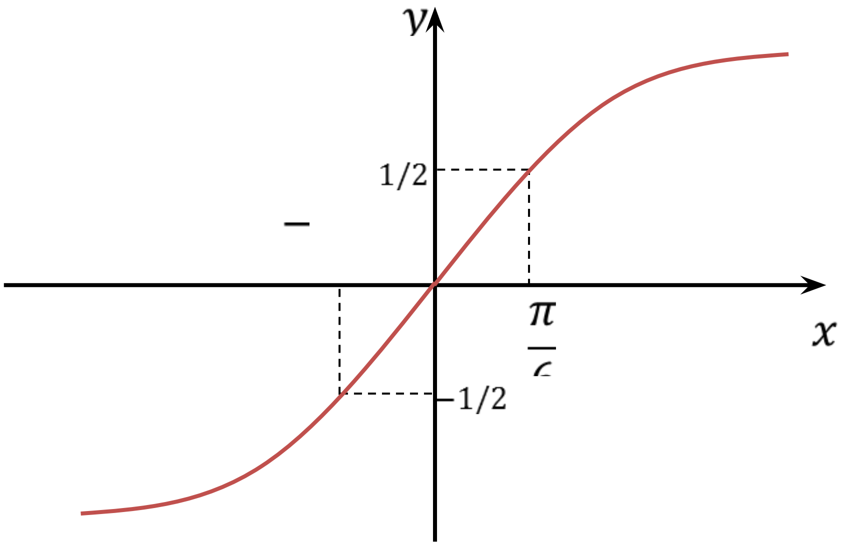
$$arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1, \\ -\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right], \\ sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

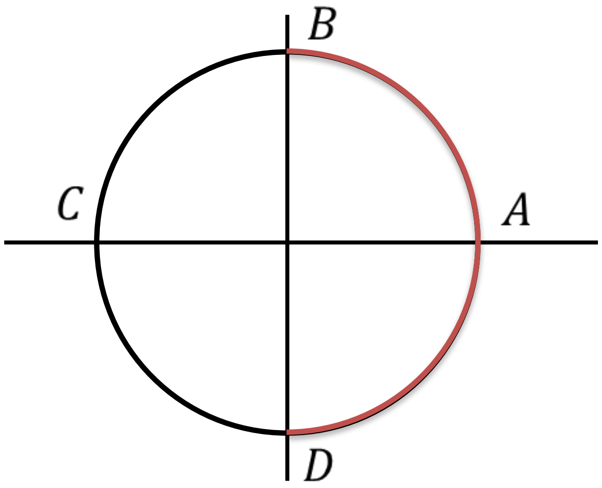
Свойство $arcsin\, a$:

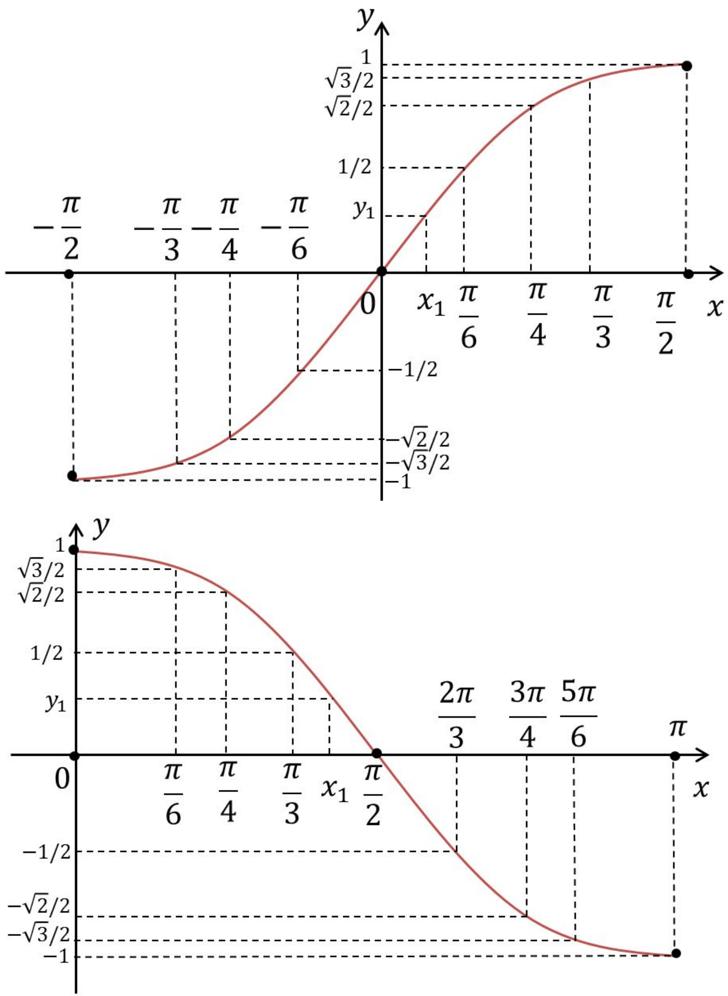
- Для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство:

$$arcsin\,(-a) = -\,arcsin\, a\,.$$

Доказательство:







$$\color{red}{\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}}$$

- $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

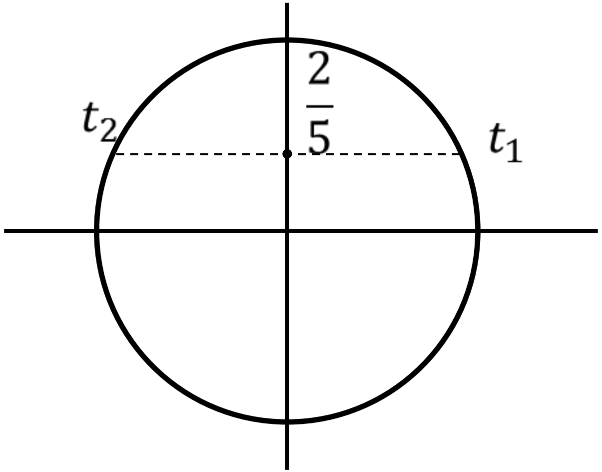
Пример:

- Решить уравнение $sin\, t = \frac{2}{5}$.

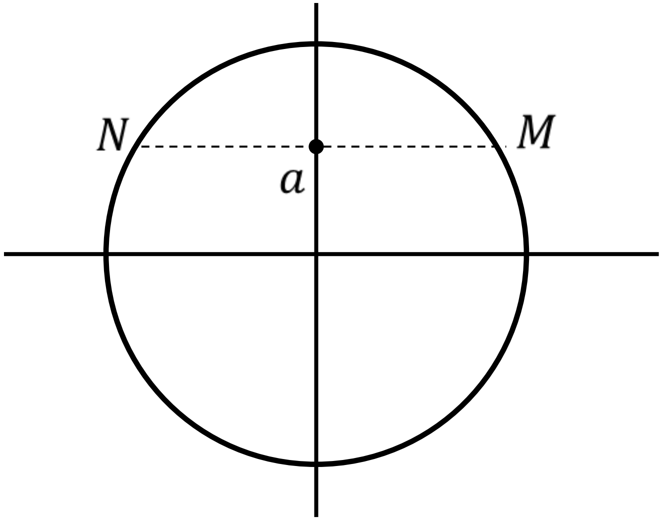
Решение:

$t_1: arcsin\frac{2}{5} + 2\pi k, k \in Z,$

$t_2: \pi - arcsin\frac{2}{5} + 2\pi k, k \in Z$.



Ответ: $arcsin\frac{2}{5} + 2\pi k, k \in Z, \pi - arcsin\frac{2}{5} + 2\pi k, k \in Z$.



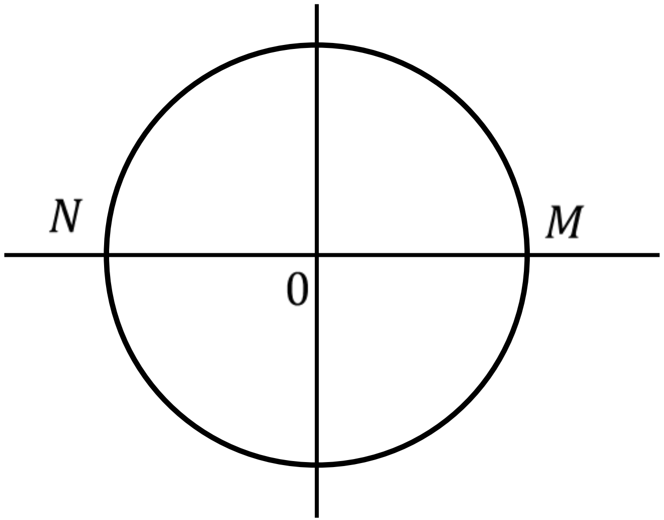
$$\sin t = a, a \in [-1, 1]$$

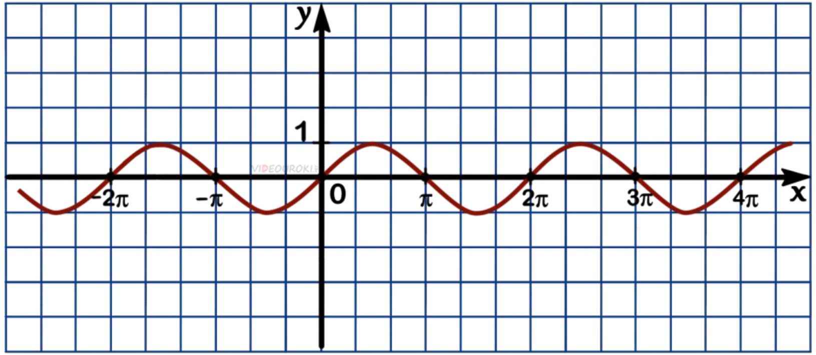
$$t_1 = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z,$$

$$t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z,$$

$$t_2 = -\arcsin a + (2k+1)\pi, k \in Z,$$

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z.$$



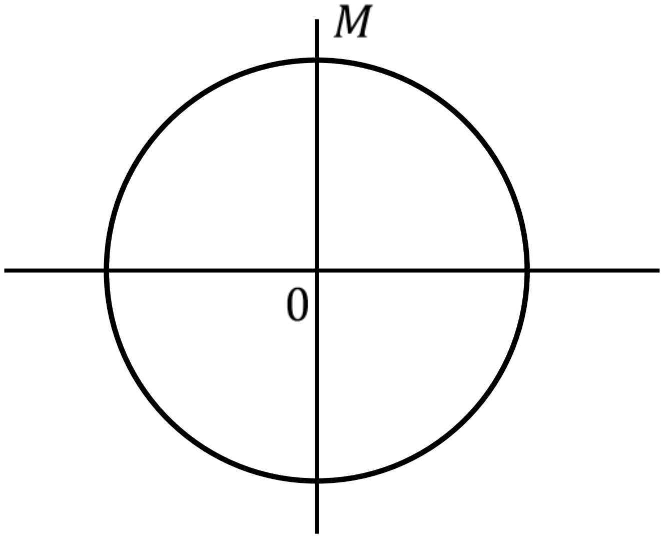


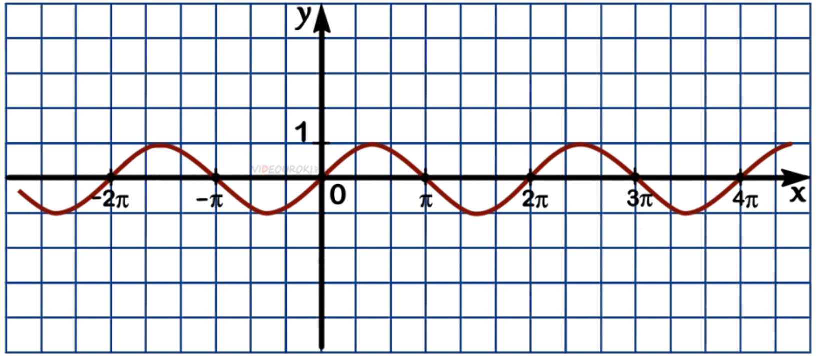
$$\sin t = 0$$

$$M: 2\pi k, k \in Z,$$

$$N: \pi + 2\pi k, k \in Z,$$

$$t = \pi k, k \in Z,$$

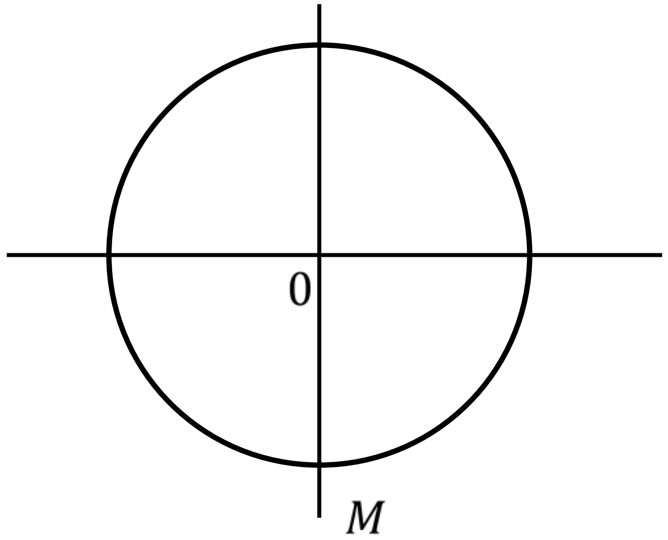


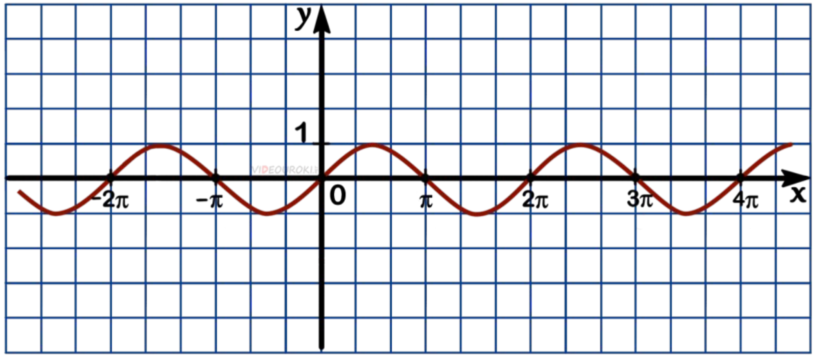


$$\sin t = 1$$

$$M: \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z,$$

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$$





$$\sin t = -1$$

$$M: -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z,$$

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$$

Пример:

- Решить уравнение $sin\ t = \frac{3}{5}$.

Решение:

$\frac{3}{5} \in [-1, 1]$,

$t = (-1)^k arcsin\ \frac{3}{5} + \pi k, k \in Z$.

Ответ:$t = (-1)^k arcsin\ \frac{3}{5} + \pi k, k \in Z$.

Алгоритм решения уравнений вида $\sin t = a$:

1. уравнение будет иметь решение, если $a \in [-1, 1]$;
2. общая формула решения:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z.$$

Пример:

$sin^2t + cos^2t = 1$

$t = (-1)^k arcsin\, a + \pi k, k \in Z$

- Решить уравнение $2cos^2t + 5sin\, t - 4 = 0.$

Решение:

$2(1 - sin^2t) + 5sin\, t - 4 = 0,$

$-2sin^2t + 5sin\, t - 2 = 0,$

$sin\, t = a,$

$a^2 - 5a + 2 = 0,$

$a = \frac{1}{2}$ или $a = 2,$

$sin\, t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = (-1)^k arcsin\, \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z,$

$arcsin\, \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$

$t = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z,$

Ответ: $t = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Общая формула решения уравнения $sin\ t = a, |a| \leq 1$:
$t = (-1)^k arcsin\ a + \pi k, k \in Z$.

Общая формула решения $cos\ t = a, |a| \leq 1$:
$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$.