Лекция 14

Условная минимизация

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Эти методы генерируют последовательность допустимых направлений $\vec{p}_k$ и далее точек $\vec{x}_{k+1}$, каждая из которых принадлежит допустимой области, и в которых функция последовательно убывает.

Определим направление $\vec{p}$ как допустимое в точке $\vec{x}_0 \in S$, если:

$\vec{x}_0 + \lambda\vec{p} \in S$, по крайней мере, для малых λ и $f(\vec{x}_0 + \lambda\vec{p}) < f(\vec{x}_0)$.

В этом случае очередную точку $\vec{x}_1$ можно искать, решая задачу

$$\vec{x}_1 = \underset{\lambda}{\mathrm{argmin}} f(\vec{x}_0 + \lambda\vec{p}) \text{ при } \vec{x}_0 + \lambda\vec{p} \in S.$$

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод Зойтендейка

Пусть $\vec{x}_0 \in S$ и $I = \{i | g_i(\vec{x}_0) = 0\}$ – множество активных в $\vec{x}_0$ ограничений.

Направление $\vec{p}$ должно быть таким, чтобы ни одно из ограничений $g_i(\vec{x})$, $I \in i$ при перемещении, пусть малом, вдоль $\vec{p}$ не оказалось нарушенным, т.е.

$$\frac{d}{d\lambda}[g_i(\vec{x}_0 + \lambda\vec{p}]_{\theta=0} = (\nabla g_i(\vec{x}_0), \vec{p}) \leq 0 i \in I$$

Одновременно, это направление должно быть направлением спуска, т.е. должно выполняться условие

$$(\nabla f(\vec{x}_0), \vec{p}) \leq 0$$

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод Зойтендейка

$$(\nabla f(\vec{x}_0), \vec{p}) \to \min,$$
$$\left(\nabla g_i(\vec{x}_0), \vec{p}\right) \leq 0, \quad i \in I, \quad \|\vec{p}\| = 1.$$

$$g_i(\vec{x}_0 + \lambda_i \vec{p}) = 0, i = 1,2, \dots, m$$

Из $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, находим

$$\hat{\lambda} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}.$$

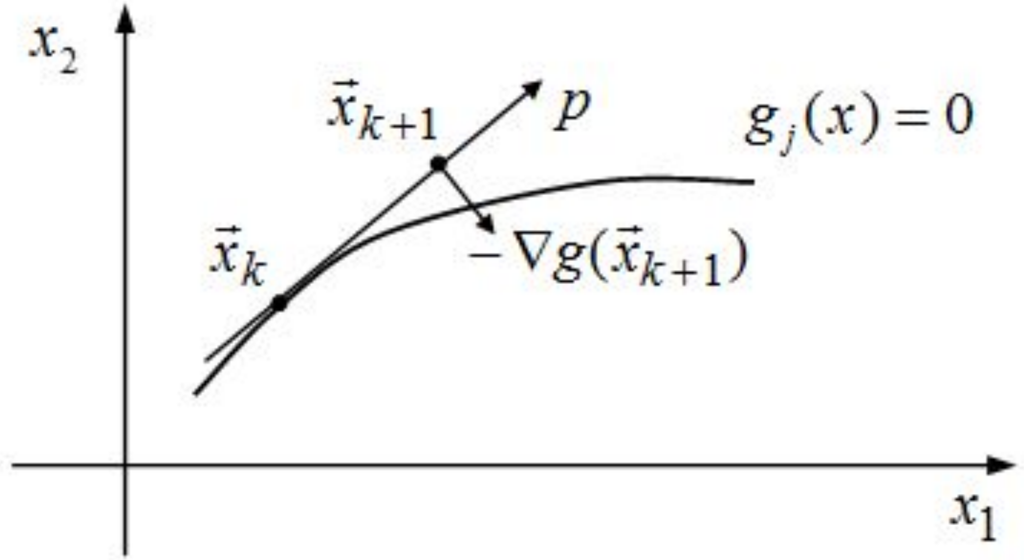
$$\vec{x}_1 = \arg \min_{\lambda \in (0, \hat{\lambda}]} f(\vec{x}_0 + \lambda \vec{p})$$

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод Зойтендейка. Возможные проблемы

При невыпуклом характере допустимой области вектор $\vec{p}$ может оказаться таким, что нарушение ограничений при перемещении из точки $\vec{x}_k$ окажется неизбежным.

Аналогичная ситуация может возникать и при учете ограничений-равенств в форме слабых двухсторонних неравенств



Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов

Найти $\vec{x}^* = \underset{\vec{x} \in S}{\operatorname{argmin}} f(\vec{x})$,

$S = \{\vec{x} \in R^n \big| a_i \le \vec{x}_i \le b_i, i = 1,2,\dots,n; g_i(\vec{x}) \le 0, i = 1,2,\dots,m\}$.

Наличие ограничивающих равенств в задаче недопустимо.

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов. Алгоритм

<u>Ш1</u>. Пусть $\vec{x}_0$ – допустимая точка.

<u>Ш2</u>. Сгенерировать K допустимых точек в окрестности точки $\vec{x}_0$, $K \geq (n+2)$.

$$x_{ij} = a_j + r(b_j - a_j), j = 1,2,\ldots,n, i = 1,2,\ldots,k$$

$$\vec{x}_i := \frac{\vec{x}_i + \vec{x}_c}{2}, \vec{x}_c = \frac{1}{i-1}\sum_1^{i-1}\vec{x}_j$$

<u>Ш3</u>. Упорядочить $\vec{x}_i$, $i = 1,2,\ldots,k$ по критерию роста $f(\vec{x}_i)$.

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов. Алгоритм

<u>Ш4</u>. Точка $\vec{x}_k$, в которой $f(\vec{x}_k) = f_{\max}$, отбрасывается и вычисляется центр «тяжести» фигуры, для которой остальные точки являются вершинами

$$\vec{x}_c = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\vec{x}_i \,.$$

<u>Ш5</u>. Отразить вершину $\vec{x}_k$ относительно $\vec{x}_c$

$$\vec{x}_r = \vec{x}_c + \alpha(\vec{x}_c - \vec{x}_k).$$

$\alpha > 1$- растяжение, $\alpha < 1$ – сжатие; по Боксу $\alpha = 1{,}3$.

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов. Алгоритм

<u>Ш6</u>. Проверить, что $\vec{x}_r \in S$.

<u>Проверка прямых отражений</u>:

если $\vec{x}_{r_j} > b_j$, то $\vec{x}_{r_j} = b_j(1 - 10^{-5})$;

если $\vec{x}_{r_j} < a_{r_j}$, то $\vec{x}_{r_j} = a_j(1 + 10^{-5})$.

<u>Проверка функциональных ограничений:</u>

если $g_j(\vec{x}_r) > 0$, то пока $\vec{x}_r \notin S$ сдвигать $\vec{x}_r := \frac{\vec{x}_r + \vec{x}_c}{2}$.

<u>Ш7</u>. Вычислить $f(\vec{x}_r)$.

Если $f(\vec{x}_r) > f(\vec{x}_k)$ то $\vec{x}_r := \frac{\vec{x}_r + \vec{x}_c}{2}$ иначе $\vec{x}_k := \vec{x}_r$ и переход к Ш3.

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов

Критерий останова

$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{k}\sum_1^k \left|f(\vec{x}_i) - \bar{f}\right|^2\right] \le \varepsilon,\ \bar{f} = \frac{1}{k}\sum_1^k f(\vec{x}_i).$$