

Лекция 14

Условная минимизация

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Эти методы генерируют последовательность допустимых направлений \vec{p}_k и далее точек \vec{x}_{k+1} , каждая из которых принадлежит допустимой области, и в которых функция последовательно убывает.

Определим направление \vec{p} как допустимое в точке $\vec{x}_0 \in S$, если: $\vec{x}_0 + \lambda \vec{p} \in S$, по крайней мере, для малых λ и $f(\vec{x}_0 + \lambda \vec{p}) < f(\vec{x}_0)$.

В этом случае очередную точку \vec{x}_1 можно искать, решая задачу

$$\vec{x}_1 = \operatorname{argmin}_{\lambda} f(\vec{x}_0 + \lambda \vec{p}) \text{ при } \vec{x}_0 + \lambda \vec{p} \in S.$$

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод Зойтендейка

Пусть $\vec{x}_0 \in S$ и $I = \{i | g_i(\vec{x}_0) = 0\}$ – множество активных в \vec{x}_0 ограничений.

Направление \vec{p} должно быть таким, чтобы ни одно из ограничений $g_i(\vec{x})$, $i \in I$ при перемещении, пусть малом, вдоль \vec{p} не оказалось нарушенным, т.е.

$$\frac{d}{d\lambda} [g_i(\vec{x}_0 + \lambda\vec{p})]_{\lambda=0} = (\nabla g_i(\vec{x}_0), \vec{p}) \leq 0 \quad i \in I$$

Одновременно, это направление должно быть направлением спуска, т.е. должно выполняться условие

$$(\nabla f(\vec{x}_0), \vec{p}) \leq 0$$

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод Зойтендейка

$$\begin{aligned} & (\nabla f(\vec{x}_0), \vec{p}) \rightarrow \min, \\ & (\nabla g_i(\vec{x}_0), \vec{p}) \leq 0, \quad i \in I, \quad \|\vec{p}\| = 1. \end{aligned}$$

$$g_i(\vec{x}_0 + \lambda_i \vec{p}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Из $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, находим

$$\hat{\lambda} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}.$$

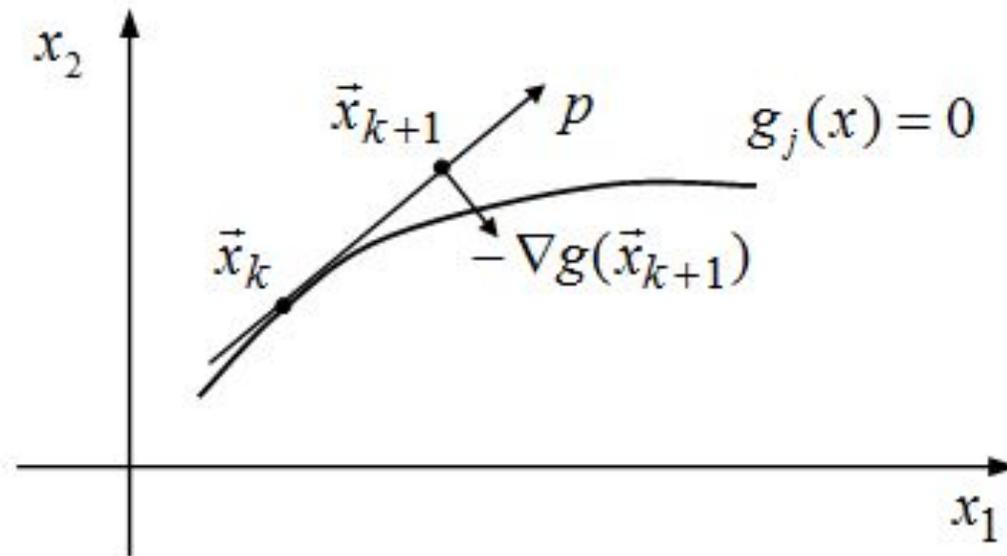
$$\vec{x}_1 = \arg \min_{\lambda \in (0, \hat{\lambda}]} f(\vec{x}_0 + \lambda \vec{p})$$

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод Зойтендейка. Возможные проблемы

При невыпуклом характере допустимой области вектор \vec{p} может оказаться таким, что нарушение ограничений при перемещении из точки \vec{x}_k окажется неизбежным.

Аналогичная ситуация может возникать и при учете ограничений-равенств в форме слабых двухсторонних неравенств



Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов

Найти $\vec{x}^* = \operatorname{argmin}_{\vec{x} \in S} f(\vec{x})$,

$$S = \{\vec{x} \in R^n \mid a_i \leq \vec{x}_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n; g_i(\vec{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Наличие ограничивающих равенств в задаче недопустимо.

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов. Алгоритм

Ш1. Пусть \vec{x}_0 – допустимая точка.

Ш2. Сгенерировать K допустимых точек в окрестности точки \vec{x}_0 , $K \geq (n + 2)$.

$$x_{ij} = a_j + r(b_j - a_j), j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, k$$

$$\vec{x}_i := \frac{\vec{x}_i + \vec{x}_c}{2}, \vec{x}_c = \frac{1}{i-1} \sum_1^{i-1} \vec{x}_j$$

Ш3. Упорядочить $\vec{x}_i, i = 1, 2, \dots, k$ по критерию роста $f(\vec{x}_i)$.

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов. Алгоритм

Ш4. Точка \vec{x}_k , в которой $f(\vec{x}_k) = f_{\max}$, отбрасывается и вычисляется центр «тяжести» фигуры, для которой остальные точки являются вершинами

$$\vec{x}_c = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \vec{x}_i.$$

Ш5. Отобразить вершину \vec{x}_k относительно \vec{x}_c

$$\vec{x}_r = \vec{x}_c + \alpha(\vec{x}_c - \vec{x}_k).$$

$\alpha > 1$ - растяжение, $\alpha < 1$ - сжатие; по Боксу $\alpha = 1,3$.

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов. Алгоритм

Ш6. Проверить, что $\vec{x}_r \in S$.

Проверка прямых отражений:

если $\vec{x}_{r_j} > b_j$, то $\vec{x}_{r_j} = b_j(1 - 10^{-5})$;

если $\vec{x}_{r_j} < a_{r_j}$, то $\vec{x}_{r_j} = a_j(1 + 10^{-5})$.

Проверка функциональных ограничений:

если $g_j(\vec{x}_r) > 0$, то пока $\vec{x}_r \notin S$ сдвигать $\vec{x}_r := \frac{\vec{x}_r + \vec{x}_c}{2}$.

Ш7. Вычислить $f(\vec{x}_r)$.

Если $f(\vec{x}_r) > f(\vec{x}_k)$ то $\vec{x}_r := \frac{\vec{x}_r + \vec{x}_c}{2}$ иначе $\vec{x}_k := \vec{x}_r$ и переход к Ш3.

Прямые методы решения задачи условной минимизации

Метод комплексов

Критерий останова

$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{k} \sum_1^k |f(\vec{x}_i) - \bar{f}|^2 \right] \leq \varepsilon, \quad \bar{f} = \frac{1}{k} \sum_1^k f(\vec{x}_i).$$

