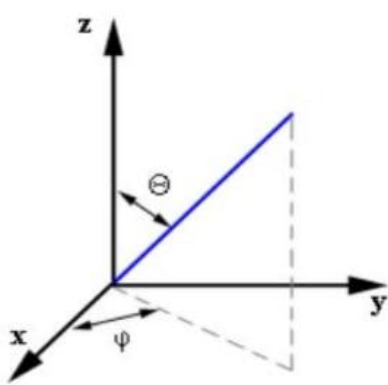


Лекция 1.

Основные свойства векторов.

Кинематика точки. Кинематика твердого тела.

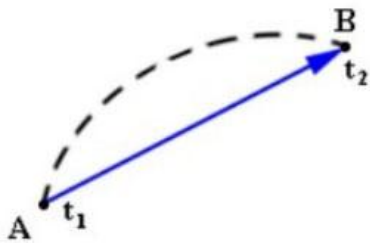


Вектор — упорядоченная совокупность трёх чисел (представляющих собой физические величины), зависящих от системы координат и изменяющихся при повороте системы отсчёта так же, как изменяются координаты точки.

Рис. 1. К понятию вектора

Геометрический образ вектора — это направленный отрезок прямой, определённым образом ориентированный в пространстве.

Перемещение точки в пространстве за любой промежуток времени можно изобразить вектором. Например, в момент t_1 точка была в точке А, а в момент t_2 — в точке В. Тогда перемещение за время $t_2 - t_1$ изобразится вектором \overline{AB} .



Отметим, что вектор перемещения только в случае *одностороннего прямолинейного* движения будет совпадать с траекторией движущейся точки. При *криволинейном* движении траекторией точки является кривая, проходящая через точки А и В.

Рис. 2. К понятию перемещения

Векторы считаются *одинаковыми*, когда они представляются равными параллельными отрезками и направлены в одну сторону.

Длина отрезка, измеренная в определённом масштабе, равна абсолютной величине, или *модулю* вектора.

Обычно при действиях с векторными величинами удобно представлять векторы их *проекциями* по заданным определённым направлениям. Поясним это вначале для векторов, лежащих в плоскости. Выдерем на плоскости прямоугольную систему координат x, y , тогда любой вектор \vec{a} можно представить как сумму $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$, где \vec{a}_x — вектор, направленный вдоль оси x и называемый проекцией (составляющей) или компонентой вектора \vec{a} по оси x , аналогично \vec{a}_y — компонента вектора \vec{a} по оси y .

Очевидно, что \vec{a}_x и \vec{a}_y — однозначно определяют величину и направление вектора \vec{a} . Обозначим через \vec{i} единичный вектор вдоль оси x , а через \vec{j} — единичный вектор вдоль оси y .

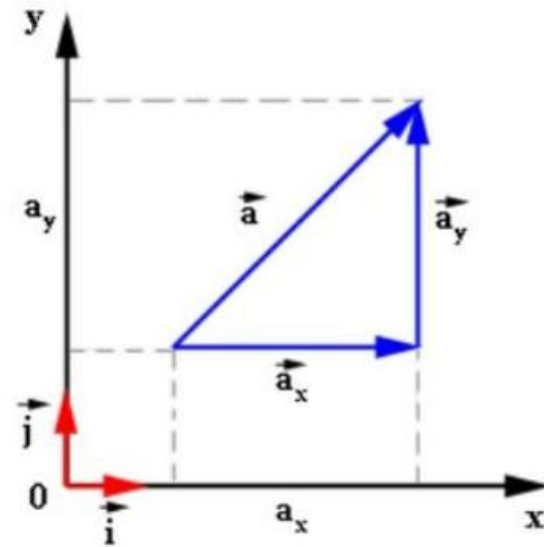


Рис. 4. Проекции вектора

Единичным вектором по определению называют вектор, модуль которого равен единице. Единичный вектор указывает только направление в пространстве.

Тогда составляющие вектора можно записать так: $\vec{a}_x = a_x \vec{i}$, $\vec{a}_y = a_y \vec{j}$,

где a_x и a_y — уже не векторы, а обычные числа — скаляры. Числа a_x и a_y называются проекциями \vec{a} на определённые направления, указанные векторами \vec{i} и \vec{j} , или просто проекциями вектора на данные координатные оси x и y (рис.

4). Следовательно $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$.

Модуль (или длина) вектора \vec{a} , лежащего в плоскости, равна $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Если вектор \vec{a} расположен в пространстве (а не на плоскости), то его можно относить к прямоугольной системе координат x, y, z .

Модуль вектора \vec{a} представится выражением $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Радиус-вектор

Положение точек пространства удобно характеризовать их радиус-векторами. Радиусом-вектором точки M называется вектор \vec{r} , начало которого совпадает с точкой начала системы координат, а конец — с рассматриваемой точкой.



Рис. 6. Радиус-вектор

Кинематика точки

Кинематика — раздел механики, в котором изучается движение тел в пространстве без учёта взаимодействия между ними. Законы кинематики описывают движение тел, но не отражают причин возникновения или изменения движения.

Механическим движением тела называется изменение его положения в пространстве с течением времени.

Положение тела может быть определено только по отношению к каким-либо другим телам. Таким образом, механическое движение всегда *относительно*. Тела, относительно которых рассматривается движение других тел, называются *телами отсчёта*.

Однако в механике используют понятие не тела отсчёта, а *системы отсчёта*. *Системой отсчёта* называют тело отсчёта вместе со скреплённой с ним системой координат.

Выбор вида системы координат определяется условиями механической задачи. В общем случае наиболее удобна декартова прямоугольная система координат, поскольку в ней все три координаты равноправны.

Описать движение точки — значит указать её положение в любой момент времени. При своём движении она проходит непрерывную последовательность точек системы отсчёта, называемую *траекторией* движения.

Пусть точка движется в декартовой системе отсчёта. Положение точки в этом случае определяется тремя координатами x , y , z или радиус-вектором \vec{r} .

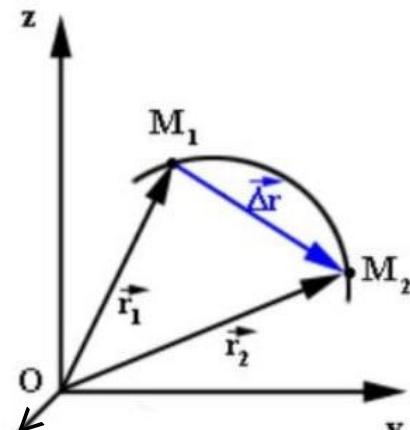
Если точка движется, то каждому последующему моменту времени соответствуют новые значения всех трёх координат, т.е. координаты

движущейся точки являются функциями времени:
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \text{ или в}$$

бескоординатной форме — $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Эти уравнения задают *кинематический закон* движения точки.

Путь — расстояние, которое проходит точка при своём движении вдоль траектории, это скалярная величина.

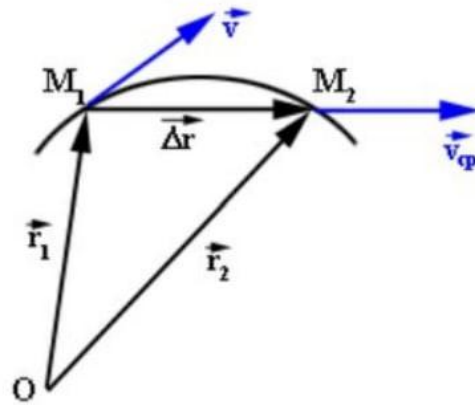
Путь S и перемещение не всегда совпадают даже при прямолинейном движении.



Скорость определяет быстроту движения и его направление в данный момент времени.

Средней скоростью за промежуток времени Δt называют вектор $\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$.

Вектор средней скорости совпадает по направлению с вектором перемещения.



Пусть точка совершает перемещение $\overline{M_1M_2}$ (рис. 9).

При $\Delta t \rightarrow 0$ мы получим вектор истинной или мгновенной скорости (скорость в данный момент времени)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Рис. 9. К понятию скорости

При $\Delta t \rightarrow 0$ имеем $M_2 \rightarrow M_1$, следовательно в пределе вектор скорости будет направлен по касательной к траектории.

Попробуем выразить вектор скорости через пройденный путь

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\tau} \frac{dS}{dt} = \vec{\tau} v.$$

Модуль вектора скорости равен $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Если при движении точки направление её скорости неизменно, то движение будет *прямолинейным*.

Если направление скорости изменяется, то движение будет *криволинейным*.

Если величина скорости неизменна, то движение является *равномерным*.

Если величина скорости изменяется, то движение будет *переменным*.

Ускорение

Допустим, что материальная точка движется по произвольной траектории

(рис. 10). Пусть в начальный момент времени она занимала положение M_1 и имела скорость \vec{v}_1 , а через промежуток времени Δt она пришла в положение M_2 и имеет скорость \vec{v}_2 . Пусть $v_2 > v_1$.

Найдём изменение скорости за промежуток времени Δt . Для этого перенесём вектор \vec{v}_2 параллельно самому себе в точку M_1 . Тогда $\vec{\Delta v}$ — искомое изменение скорости.

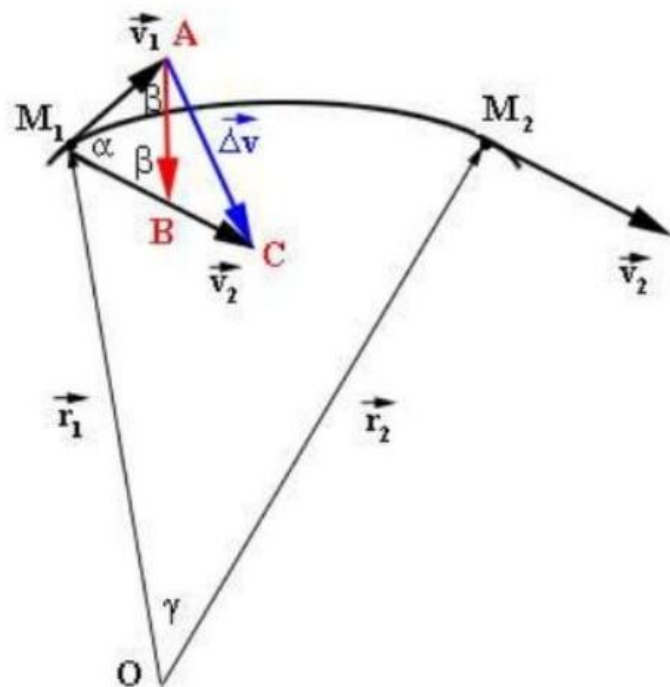


Рис. 10. К понятию ускорения

Средним ускорением движущейся точки за промежуток времени Δt называется

вектор $\overline{a_{\text{ср}}} = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}$. Мгновенным ускорением называется вектор

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} \quad \text{или}$$

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}.$$

По определению $\overline{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta v_{\tau}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta v_n}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v_{\tau}}}{dt} + \frac{d\overline{v_n}}{dt} = \overline{a_{\tau}} + \overline{a_n}$.

Так как $\overline{\Delta v_{\tau}}$ направлен вдоль вектора скорости, а скорость в любой точке траектории направлена по касательной к ней, то вектор $\overline{a_{\tau}}$ направлен по касательной и называется *тангенциальным ускорением* $\overline{a_{\tau}} = \tau \frac{dv}{dt}$.

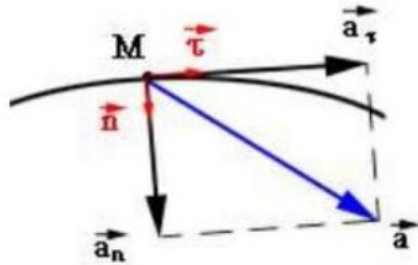
В пределе $\overline{\Delta v_n} \perp \overline{v}$, т.е. направлен по нормали к центру кривизны траектории.

Поэтому $\overline{a_n}$ называется *нормальным ускорением*.

$$\text{Итак, } a_n = \frac{v^2}{R}, \text{ а } \vec{a}_n = \vec{n} \frac{v^2}{R}$$

Полное ускорение равно $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ (рис. 11), а модуль полного ускорения —

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$



Для движения точки по окружности нормальное ускорение называется *центростремительным*, поскольку центр кривизны для всех точек один и тот же и совпадает с центром окружности.

Рис. 11. К понятию полного ускорения

Степени свободы твёрдого тела

Твёрдым телом называется совокупность материальных точек, расстояние между которыми неизменно.

Чтобы описать движение материальной точки, необходимо задать *три* функции, характеризующие зависимость её координат от времени.

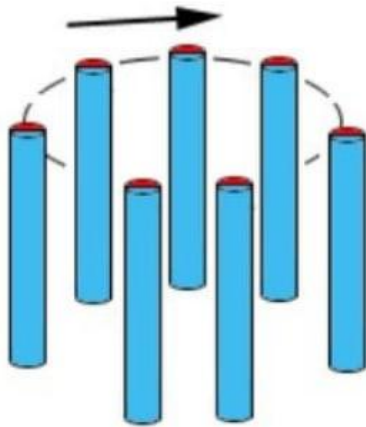
Для описания системы N материальных точек, движущихся независимо друг от друга, необходимо задать $3N$ функций, характеризующих зависимость координат этих точек от времени.

Число i независимых функций (параметров), которыми описывается движение системы материальных точек, называется числом её степеней свободы.

Чтобы указать положение твёрдого тела в пространстве, необходимо зафиксировать каким-либо образом *три точки этого тела, не лежащие на одной прямой*.

Поступательное движение твёрдого тела

Поступательным называется такое движение твёрдого тела, при котором *любая* прямая, проведённая в теле и неизменно с ним связанная, перемещается параллельно самой себе.



Поступательное движение не обязательно является прямолинейным (рис. 13).

Вращательное движение

Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором все его точки описывают концентрические окружности с центрами, лежащими на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения. Отметим, что ось вращения может находиться и вне тела.

Вращательное движение тела считается известным, если известны три параметра:

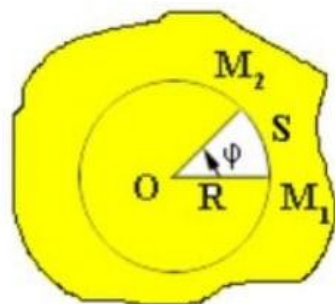
1. положение оси вращения;

2. направление вращения;

3. скорости всех точек вращающегося тела.

В качестве независимой координаты удобно считать угол φ (рис. 15), на который поворачивается подвижный радиус, проведённый от оси вращения к какой-либо точке тела, за время t после начала движения.

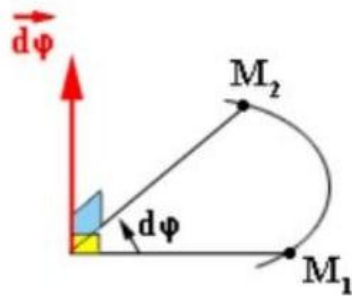
Зная угол φ как функцию времени, можно найти положение любой точки вращающегося тела, находящейся на расстоянии R от оси вращения, в любой момент времени t .



Действительно, путь, пройденный данной точкой за время Δt , равен $\Delta S = R\Delta\varphi$ (φ в радианах). Отложив эту длину пути S вдоль дуги окружности радиуса R от начального положения точки M_1 , определим положение данной точки в момент времени t .

Рис. 15. Вращательное движение

Элементарное угловое перемещение $d\varphi$ характеризуется не только своим значением, но и плоскостью, в которой оно происходит.

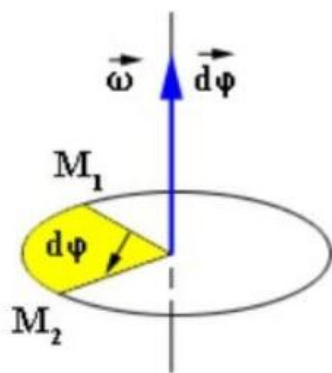


Чтобы фиксировать эту плоскость, следует $\overline{d\varphi}$ рассматривать как вектор, перпендикулярный этой плоскости (рис. 16). Его направление находится по правилу буравчика.

Рис. 16. Угловой путь как вектор

Угловая скорость

Пусть M_1 — начальное положение точки. За малое время Δt тело повернулось на $\Delta\varphi$ и точка пришла в положение M_2 (рис. 17).



Введём величину, характеризующую быстроту изменения угла $\Delta\varphi$ с течением времени. Эту величину назовём средней угловой скоростью $\langle \overline{\omega} \rangle = \frac{\overline{\Delta\varphi}}{\Delta t}$.

Найдём мгновенную угловую скорость $\overline{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$.

Рис. 17. К понятию угловой скорости

Из полученного равенства следует, что направление векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{d\varphi}$ совпадает, следовательно, направление мгновенной угловой скорости можно найти по правилу буравчика.

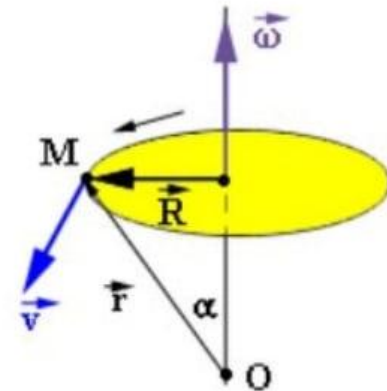
Очевидно, что угловая скорость всех частей твёрдого тела одинакова и является характеристикой его вращательного движения, т.к. зная $\vec{\omega}$, мы знаем *величину скорости, положение оси вращения в пространстве и направление вращения.*

Угловая скорость ω связана с периодом вращения T соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Свяжем характеристику движения отдельно взятой точки твёрдого тела (линейную скорость \vec{v}) с характеристикой движения твёрдого тела (угловой скоростью $\vec{\omega}$).

Пусть (рис. 18) некоторое твёрдое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. В некоторый момент времени точка M имеет линейную скорость \vec{v} , находясь на расстоянии R от оси вращения. Положение точки M зафиксируем радиусом-вектором \vec{r} , проведённым из точки O , как из полюса.



Видно, что тройка векторов \vec{v} , $\vec{\omega}$, \vec{r} образует правовинтовую систему.

Следовательно, связь между векторами линейной и угловой скоростей будет

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \text{ или}$$

$$|\vec{v}| = \omega r \underbrace{\sin \alpha}_R = |[\vec{\omega}, \vec{R}]|, \text{ где } \alpha \text{ — угол между векторами } \vec{\omega} \text{ и } \vec{r}.$$

Тем самым установлена связь между \vec{v} и $\vec{\omega}$. Следовательно, линейные скорости v различных точек тела по величине пропорциональны расстоянию R их до оси вращения.

Угловое ускорение

Если вращательное движение неравномерное, то его угловая скорость с течением времени изменяется. О том, насколько быстро она изменяется, свидетельствует *угловое ускорение*.

$$\text{Среднее угловое ускорение } \overline{\varepsilon_{\vec{\omega}}} = \frac{\overline{\Delta \omega}}{\Delta t}.$$

$$\text{Мгновенное угловое ускорение } \vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta \omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

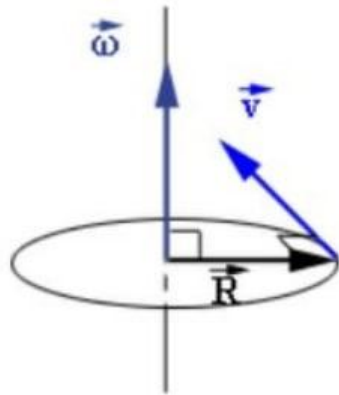
Вектор углового ускорения направлен по оси вращения в ту же сторону, куда направлен вектор элементарного приращения угловой скорости.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}], \text{ поэтому}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{R}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{R} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{R}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{R}] + [\vec{\omega}, \vec{v}].$$

Это соотношение выражает известное нам соотношение $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$,

$$\text{следовательно } \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{R}], \quad \vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}].$$



$$\text{Так как } v = \omega R, \text{ то } a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R},$$

$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$. Минус взят потому, что ускорение \vec{a}_n направлено к оси вращения, а радиус-вектор \vec{R} направлен от оси вращения (рис. 19).

Рис. 19. К понятию нормального ускорения