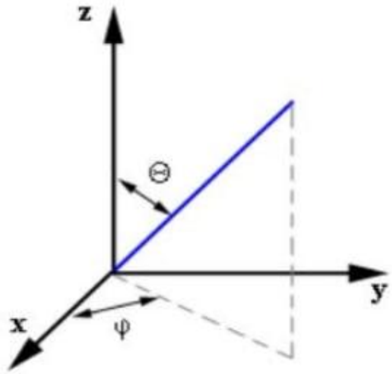
Лекция 1.

Основные свойства векторов.
Кинематика точки. Кинематика твердого тела.

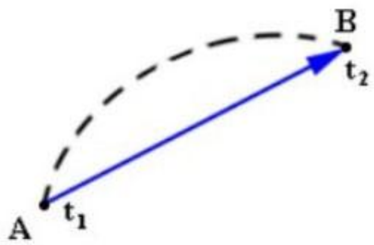


Вектор — *упорядоченная совокупность трёх чисел (представляющих собой физические величины), зависящих от системы координат и изменяющихся при повороте системы отсчёта так же, как изменяются координаты точки.*

Рис. 1. К понятию вектора

Геометрический образ вектора — это направленный отрезок прямой, определённым образом ориентированный в пространстве.

Перемещение точки в пространстве за любой промежуток времени можно изобразить вектором. Например, в момент t_1 точка была в точке A, а в момент t_2 — в точке B. Тогда перемещение за время t_2-t_1 изобразится вектором $\overrightarrow{AB}$.



Отметим, что вектор перемещения только в случае *одностороннего прямолинейного* движения будет совпадать с траекторией движущейся точки. При *криволинейном* движении траекторией точки является кривая, проходящая через точки A и B.

Рис. 2. К понятию перемещения

Векторы считаются *одинаковыми*, когда они представляются равными параллельными отрезками и направлены в одну сторону.

Длина отрезка, измеренная в определённом масштабе, равна абсолютной величине, или *модулю* вектора.

Обычно при действиях с векторными величинами удобно представлять векторы их *проекциями* по заданным определённым направлениям. Поясним это вначале для векторов, лежащих в плоскости. Выдерем на плоскости прямоугольную систему координат x, y, тогда любой вектор $\vec{a}$ можно представить как сумму $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$, где $\vec{a}_x$ — вектор, направленный вдоль оси x и называемый проекцией (составляющей) или компонентой вектора $\vec{a}$ по оси x, аналогично $\vec{a}_y$ — компонента вектора $\vec{a}$ по оси y.

Очевидно, что $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ — однозначно определяют величину и направление вектора $\vec{a}$. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор вдоль оси x, а через $\vec{j}$ — единичный вектор вдоль оси y.

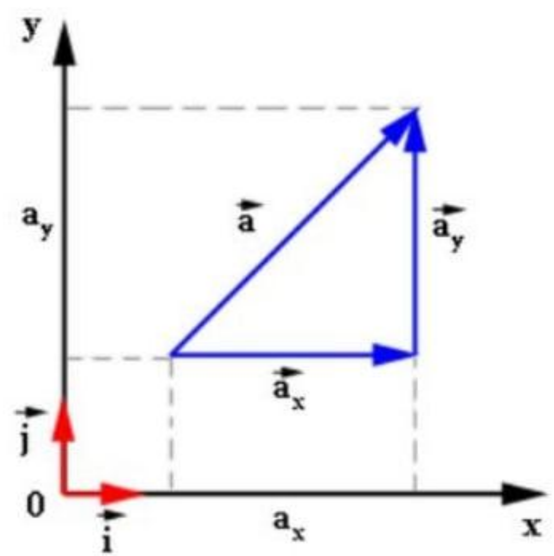


Рис. 4. Проекции вектора

Единичным вектором по определению называют вектор, модуль которого равен единице. Единичный вектор указывает только направление в пространстве.

Тогда составляющие вектора можно записать так: $\overrightarrow{a_x} = a_x\vec{i}$, $\overrightarrow{a_y} = a_y\vec{j}$, где a_x и a_y — уже не векторы, а обычные числа — скаляры. Числа a_x и a_y называются проекциями $\vec{a}$ на определённые направления, указанные векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$, или просто проекциями вектора на данные координатные оси x и y (рис. 4). Следовательно $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

Модуль (или длина) вектора $\vec{a}$, лежащего в плоскости, равна $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Если вектор $\vec{a}$ расположен в пространстве (а не на плоскости), то его можно относить к прямоугольной системе координат x, y, z.

Модуль вектора $\vec{a}$ представится выражением $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Радиус-вектор

Положение точек пространства удобно характеризовать их радиус-векторами. *Радиусом-вектором* точки М называется вектор $\vec{r}$, начало которого совпадает с точкой начала системы координат, а конец — с рассматриваемой точкой.

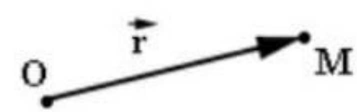


Рис. 6. Радиус-вектор

Кинематика точки

Кинематика — раздел механики, в котором изучается движение тел в пространстве без учёта взаимодействия между ними. Законы кинематики описывают движение тел, но не отражают причин возникновения или изменения движения.

Механическим движением тела называется изменение его положения в пространстве с течением времени.

Положение тела может быть определено только по отношению к каким-либо другим телам. Таким образом, механическое движение всегда *относительно*. Тела, относительно которых рассматривается движение других тел, называются *телами отсчёта*.

Однако в механике используют понятие не тела отсчёта, а *системы отсчёта*. *Системой отсчёта* называют тело отсчёта вместе со скреплённой с ним системой координат.

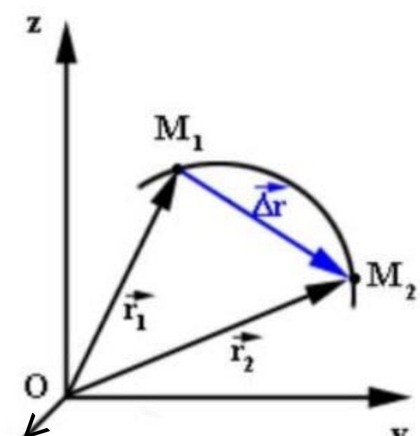
Выбор вида системы координат определяется условиями механической задачи. В общем случае наиболее удобна декартова прямоугольная система координат, поскольку в ней все три координаты равноправны.

Описать движение точки — значит указать её положение в любой момент времени. При своём движении она проходит непрерывную последовательность точек системы отсчёта, называемую *траекторией* движения.

Пусть точка движется в декартовой системе отсчёта. Положение точки в этом случае определяется тремя координатами x, y, z или радиус-вектором $\vec{r}$. Если точка движется, то каждому последующему моменту времени соответствуют новые значения всех трёх координат, т.е. координаты движущейся точки являются функциями времени: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ или в бескоординатной форме — $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Эти уравнения задают *кинематический закон* движения точки.

Путь — расстояние, которое проходит точка при своём движении вдоль траектории, это скалярная величина.

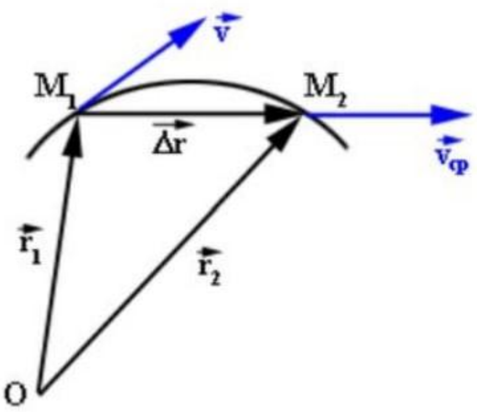
Путь S и перемещение не всегда совпадают даже при прямолинейном движении.



Скорость определяет быстроту движения и его направление в данный момент времени.

Средней скоростью за промежуток времени Δt называют вектор $\overrightarrow{v_{ñð}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Вектор средней скорости совпадает по направлению с вектором перемещения.



Пусть точка совершает перемещение $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 9).

При Δt → 0 мы получим вектор истинной или мгновенной скорости (скорость в данный момент времени)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

Рис. 9. К понятию скорости

При Δt → 0 имеем $M_2 \to M_1$, следовательно в пределе вектор скорости будет направлен по касательной к траектории.

Попробуем выразить вектор скорости через пройденный путь

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \vec{\tau}\frac{dS}{dt} = \vec{\tau}v.$$

Модуль вектора скорости равен $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} + v_z^{\ 2}}$.

Если при движении точки направление её скорости неизменно, то движение будет *прямолинейным.*

Если направление скорости изменяется, то движение будет *криволинейным.*

Если величина скорости неизменна, то движение является *равномерным.*

Если величина скорости изменяется, то движение будет *переменным.*

Ускорение

Допустим, что материальная точка движется по произвольной траектории (рис. 10). Пусть в начальный момент времени она занимала положение M_1 и имела скорость $\overrightarrow{v_1}$, а через промежуток времени Δt она пришла в положение M_2 и имеет скорость $\overrightarrow{v_2}$. Пусть $v_2 > v_1$.

Найдём изменение скорости за промежуток времени Δt. Для этого перенесём вектор $\overrightarrow{v_2}$ параллельно самому себе в точку M_1. Тогда $\overrightarrow{\Delta v}$ — искомое изменение скорости.

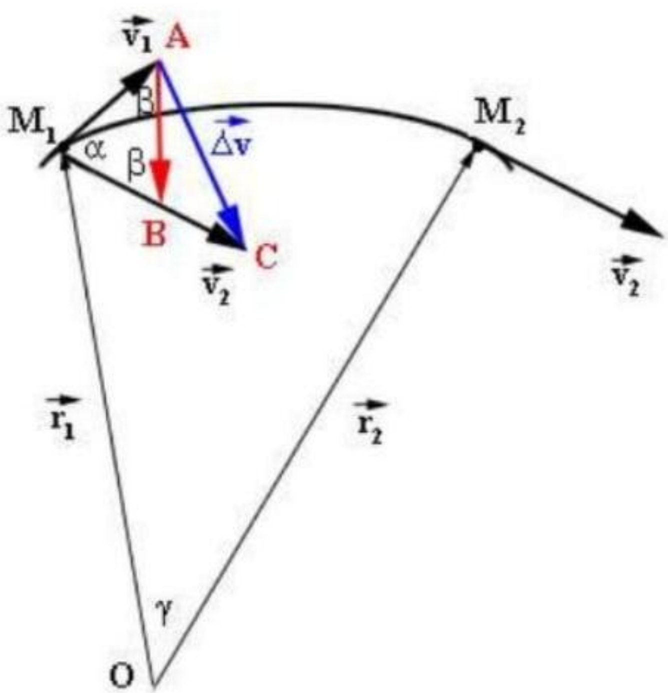


Рис. 10. К понятию ускорения

Средним ускорением движущейся точки за промежуток времени Δt называется вектор $\overrightarrow{a_{ñð}} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$. Мгновенным ускорением называется вектор

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} \qquad \text{или}$$

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \frac{\overrightarrow{d^2 r}}{dt^2}.$$

По определению $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta v_\tau}}{\Delta t} + \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta v_n}}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{dv_\tau}}{dt} + \dfrac{\overrightarrow{dv_n}}{dt} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$.

Так как $\overrightarrow{\Delta v_\tau}$ направлен вдоль вектора скорости, а скорость в любой точке траектории направлена по касательной к ней, то вектор $\overrightarrow{a_\tau}$ направлен по касательной и называется *тангенциальным ускорением* $\overrightarrow{a_\tau} = \vec{\tau} \dfrac{dv}{dt}$.

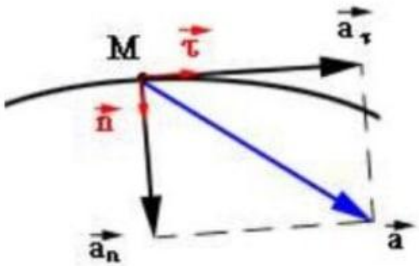
В пределе $\overrightarrow{\Delta v_n} \perp \vec{v}$, т.е. направлен по нормали к центру кривизны траектории.

Поэтому $\overrightarrow{a_n}$ называется *нормальным ускорением.*

Итак, $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, а $\overrightarrow{a_n} = \vec{n}\dfrac{v^2}{R}$

Полное ускорение равно $\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$ (рис. 11), а модуль полного ускорения —

$$a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_\tau^{\,2}}\,.$$



Для движения точки по окружности нормальное ускорение называется *центростремительным,* поскольку центр кривизны для всех точек один и тот же и совпадает с центром окружности.

Рис. 11. К понятию полного ускорения

Степени свободы твёрдого тела

Твёрдым телом называется совокупность материальных точек, расстояние между которыми неизменно.

Чтобы описать движение материальной точки, необходимо задать *три* функции, характеризующие зависимость её координат от времени.

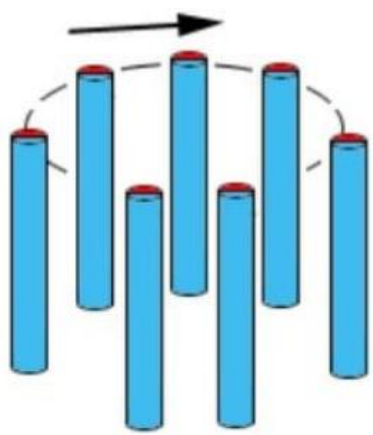
Для описания системы N материальных точек, движущихся независимо друг от друга, необходимо задать 3N функций, характеризующих зависимость координат этих точек от времени.

Число i независимых функций (параметров), которыми описывается движение системы материальных точек, называется числом её степеней свободы.

Чтобы указать положение твёрдого тела в пространстве, необходимо зафиксировать каким-либо образом *три точки этого тела, не лежащие на одной прямой.*

Поступательное движение твёрдого тела

Поступательным называется такое движение твёрдого тела, при котором *любая* прямая, проведённая в теле и неизменно с ним связанная, перемещается параллельно самой себе.



Поступательное движение не обязательно является прямолинейным (рис. 13).

Вращательное движение

Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором все его точки описывают концентрические окружности с центрами, лежащими на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения. Отметим, что ось вращения может находиться и вне тела.

Вращательное движение тела считается известным, если известны три параметра:

1. положение оси вращения;
2. направление вращения;
3. скорости всех точек вращающегося тела.

В качестве независимой координаты удобно считать угол φ (рис. 15), на который поворачивается подвижный радиус, проведённый от оси вращения к какой-либо точке тела, за время t после начала движения.

Зная угол φ как функцию времени, можно найти положение любой точки вращающегося тела, находящейся на расстоянии R от оси вращения, в любой момент времени t.

Действительно, путь, пройденный данной точкой за время Δt, равен $\Delta S = R\Delta\varphi$ (φ в радианах). Отложив эту длину пути S вдоль дуги окружности радиуса R от начального положения точки M_1, определим положение данной точки в момент времени t.

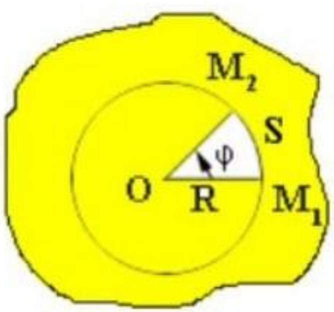
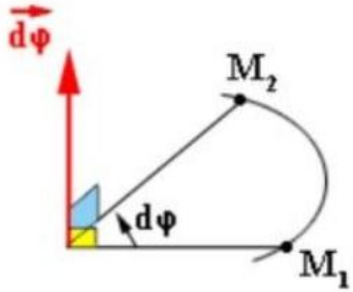


Рис. 15. Вращательное движение

Элементарное угловое перемещение dφ характеризуется не только своим значением, но и плоскостью, в которой оно происходит.

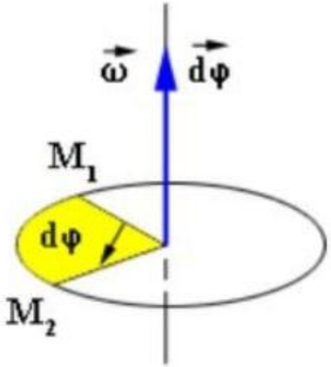


Чтобы фиксировать эту плоскость, следует $\overrightarrow{d\varphi}$ рассматривать как вектор, перпендикулярный этой плоскости (рис. 16). Его направление находится по правилу буравчика.

Рис. 16. Угловой путь как вектор

Угловая скорость

Пусть M_1 — начальное положение точки. За малое время Δt тело повернулось на $\Delta\varphi$ и точка пришла в положение M_2 (рис. 17).



Введём величину, характеризующую быстроту изменения угла $\Delta\varphi$ с течением времени. Эту величину назовём средней угловой скоростью $\langle\vec{\omega}\rangle = \dfrac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t}$.

Найдём мгновенную угловую скорость $\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}$.

Рис. 17. К понятию угловой скорости

Из полученного равенства следует, что направление векторов $\vec{\omega}$ и $\overrightarrow{d\varphi}$ совпадает, следовательно, направление мгновенной угловой скорости можно найти по правилу буравчика.

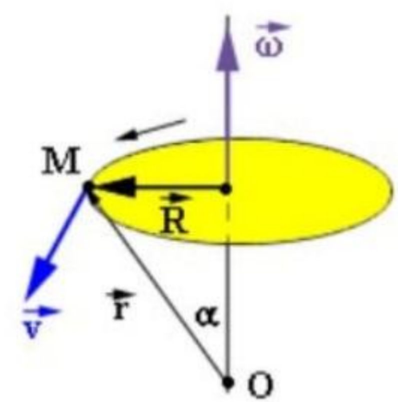
Очевидно, что угловая скорость всех частей твёрдого тела одинакова и является характеристикой его вращательного движения, т.к. зная $\vec{\omega}$, мы знаем *величину скорости*, *положение оси вращения* в пространстве и *направление вращения*.

Угловая скорость ω связана с периодом вращения T соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad [\omega] = \frac{\text{ðàä}}{\text{ñ}}.$$

Свяжем характеристику движения отдельно взятой точки твёрдого тела (линейную скорость $\vec{v}$) с характеристикой движения твёрдого тела (угловой скоростью $\vec{\omega}$).

Пусть (рис. 18) некоторое твёрдое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. В некоторый момент времени точка M имеет линейную скорость $\vec{v}$, находясь на расстоянии R от оси вращения. Положение точки M зафиксируем радиусом-вектором $\vec{r}$, проведённым из точки O, как из полюса.



Видно, что тройка векторов $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ образует правовинтовую систему. Следовательно, связь между векторами линейной и угловой скоростей будет

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] \text{ или}$$

$$\left|\vec{v}\right| = \omega \underbrace{r \sin\alpha}_{R} = \left|\left[\vec{\omega}, \vec{R}\right]\right|,$$ где α — угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$.

Теи самым установлена связь между $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$. Следовательно, линейные скорости v различных точек тела по величине пропорциональны расстоянию R их до оси вращения.

Угловое ускорение

Если вращательное движение неравномерное, то его угловая скорость с течением времени изменяется. О том, насколько быстро она изменяется, свидетельствует *угловое ускорение*.

Среднее угловое ускорение $\overrightarrow{\varepsilon_{\text{ñð}}} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta\omega}}{\Delta t}$.

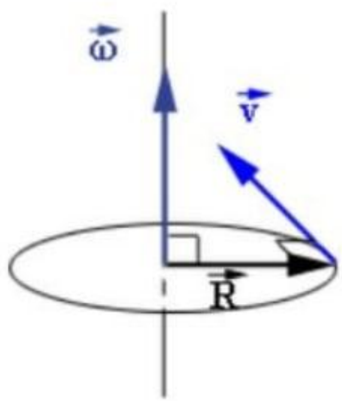
Мгновенное угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta\omega}}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}$.

Вектор углового ускорения направлен по оси вращения в ту же сторону, куда направлен вектор элементарного приращения угловой скорости.

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}, \quad \vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right], \text{ поэтому}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}, \vec{R}\right] = \left[\underbrace{\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}}_{\vec{\varepsilon}}, \vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}, \underbrace{\frac{\overrightarrow{dR}}{dt}}_{\vec{v}}\right] = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}, \vec{v}\right].$$

Это соотношение выражает известное нам соотношение $\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$,



следовательно $\overrightarrow{a_\tau} = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{R}\right], \quad \overrightarrow{a_n} = \left[\vec{\omega}, \vec{v}\right]$.

Так как $v = \omega R$, то $a_n = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R}$,

$\overrightarrow{a_n} = -\omega^2 \vec{R}$. Минус взят потому, что ускорение $\overrightarrow{a_n}$ направлено к оси вращения, а радиус-вектор $\vec{R}$ направлен от оси вращения (рис. 19).

Рис. 19. К понятию нормального ускорения