« НЕВОЗМОЖНО УПРАВЛЯТЬ ТЕМ, ЧТО

НЕЛЬЗЯ ИЗМЕРИТЬ . . . »

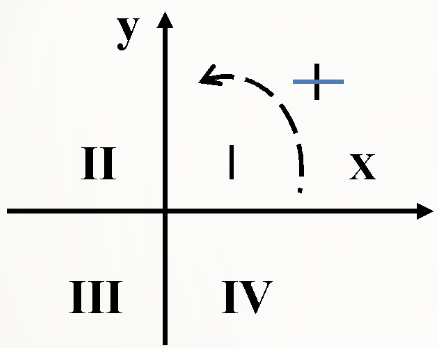
ЭДВАРД ДЕМИНГ

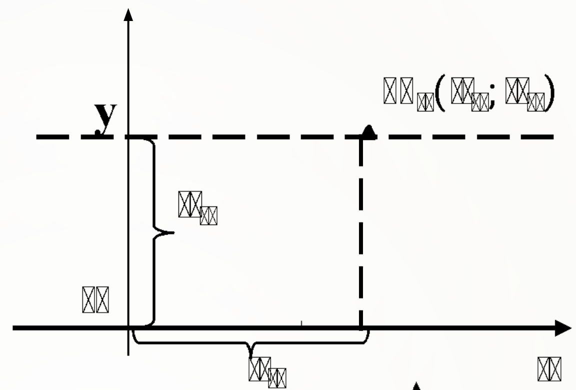
Если при математическом моделировании какого - либо процесса для описания величины достаточно определить только её численное значение, то она называется ***скалярной величиной***.

Если для характеристики величины помимо численного значения необходимо указывать направление её изменения, то она называется ***векторной величиной***.

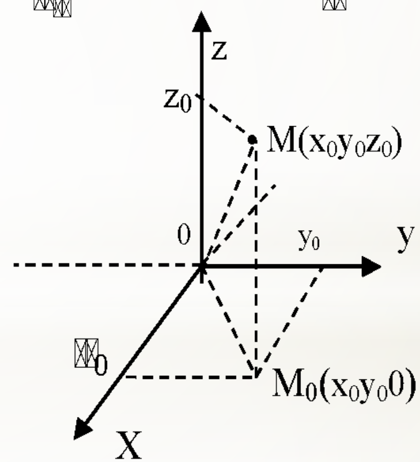
Скалярные величины геометрически изображаются точками, у которых число координат равно размерности пространства моделирования.

- **Декартова прямоугольная система координат на плоскости** представляет собой пару взаимно ортогональных ориентированных против часовой стрелки и одинаково масштабированных прямых





- **Декартову прямоугольную систему координат в трёхмерном евклидовом пространстве** составляют три взаимно ортогональных прямых – ось абсцисс ox, ось ординат oy и ось аппликат oz.



4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

- **Уравнением линии** называется всякое соотношение между координатами точек, составляющих эту линию.

Линия может быть задана параметрическим способом,
в декартовой, полярной или любой другой системе координат..

$$A x + B y + C = 0, \quad \text{где } A^2 + B^2 \neq 0.$$

- **Общее уравнение прямой на плоскости**

Задаётся уравнением 1 – ого порядка

Вектор $\vec{n} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, ортогональный заданной прямой,

называется *нормальным вектором этой прямой.*

Частные случаи расположения прямой:

C = 0, A ≠ 0, B ≠ 0 – прямая проходит через начало координат;
A = 0, B ≠ 0, C ≠ 0 { By + C = 0}- прямая параллельна оси Ox;
B = 0, A ≠ 0, C ≠ 0 { Ax + C = 0} – прямая параллельна оси Oy;
B = C = 0, A ≠ 0 – прямая совпадает с осью Oy;
A = C = 0, B ≠ 0 – прямая совпадает с осью Ox.

(1596 – 1650)

Рене Декарт – выдающийся французский философ, математик, физик и естествоиспытатель; считается создателем аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

- **Уравнение прямой, проходящей через заданную точку** $(x_0\ ;\ y_0)$ ортогонально заданному вектору $\vec{n} = (A, B)$ имеет вид

$$\boxed{A\,(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$$

- **Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки**

$M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

- **Уравнение прямой с угловым коэффициентом** $\boxed{y = kx + b}$

- **Уравнение прямой в отрезках** $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент а является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

<u>Пример.</u> Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

<u>Пример</u>. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см2.

Р Е Ш Е Н И Е Уравнение прямой имеет вид: , Так как $ab/2=8$ и $a=b$, возможно $a = 4; -4$. $a = -4$ не подходит по условию задачи.

О Т В Е Т: или $x + y - 4 = 0$.

<u>Для самостоятельного решения</u>: Составить уравнения прямых, проходящих через точку М(-3, -4) и параллельных осям координат.

О т в е т: $\{x + 3 = 0;\ \ y + 4 = 0\}$.

- **Угол между прямыми на плоскости.**

Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол α между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.
Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

<u>Пример</u>. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$K_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\quad$ $tg\varphi =$; $\varphi = \pi/4$.

<u>Пример.</u> Показать, что прямые $3x – 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y – 3 = 0$ перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

<u>Пример</u><u>.(для самостоятельного решения):</u> Даны стороны треугольника $x + y – 6 = 0$, $3x – 5y + 15 = 0$,

$5x – 3y – 14 = 0$. Составить уравнения его высот. О т в е т: $\{ x – y = 0; 5x + 3y – 26 = 0; 3x + 5y – 26 = 0\}$.

Кривые второго порядка.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.}$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.
4) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
6) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
9) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

• **Окружность.** Множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра).

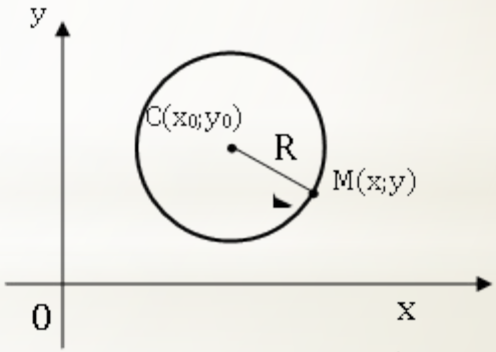
В окружности $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$ центр имеет координаты (a; b).

<u>Пример.</u> Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2+2y^2-8x+5y-4=0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2+y^2-4x+2{,}5y-2=0$$
$$x^2-4x+4-4+y^2+2{,}5y+25/16-25/16-2=0$$
$$(x-2)^2+(y+5/4)^2-25/16-6=0$$
$$(x-2)^2+(y+5/4)^2=121/16$$

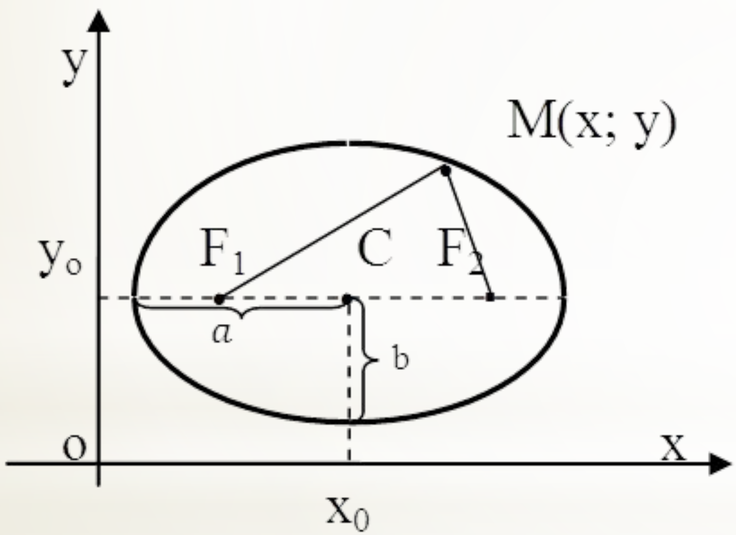


Отсюда находим O(2; -5/4); R = 11/4.

ЭЛЛИПС

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина, равная 2a (рис.1) .

Каноническое уравнение эллипса $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$



Точки F_1 и F_2 - *фокусы эллипса,*

MF_1 и MF_2 – его *фокальные радиусы.*

2a и 2b - длины его осей симметрии

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Задача . Привести уравнение кривой второго порядка
$4x^2-16x+y^2+2y+13 = 0$ к каноническому виду Построить график кривой.

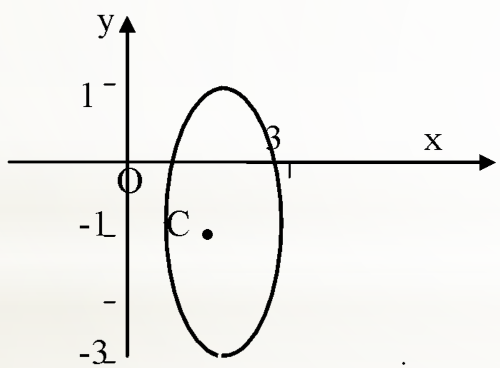
Р е ш е н и е.

$$4x^2-16x+y^2+2y+13 = \left\{ az^2 + bz = a\left(z^2 + 2z\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = \atop = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} \right\} =$$

$$=4\left(x^2 - 2x\cdot 2 + 2^2 - 4\right) + \left(y^2 + 2y\cdot 1 + 1^2\right) - 1 + 13 =$$

$$= 4(x - 2)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 + 13 = 4(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 4 .$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 : \qquad 4(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4 \quad <=>$$



$$\frac{4(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{4} = \frac{4}{4} \quad =>$$

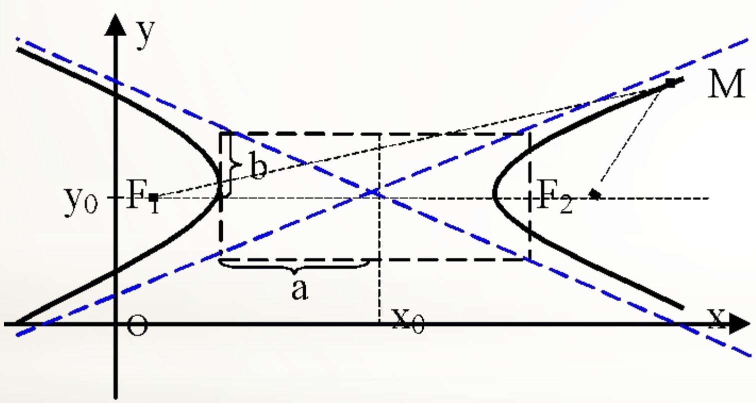
$$\frac{(x - 2)^2}{1} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$$

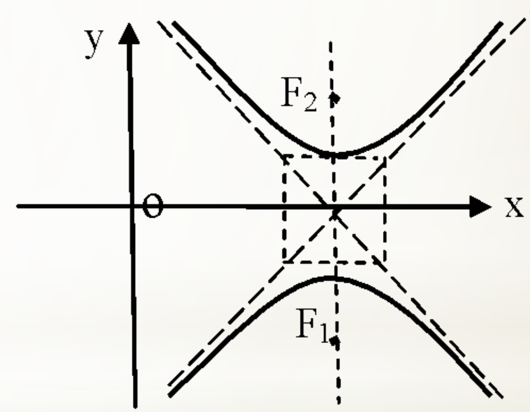
Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная 2a, причём 2a меньше расстояния между F_1 и F_2 (рис. 3). Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы.

Канонические уравнения гипербол

а) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ б) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$



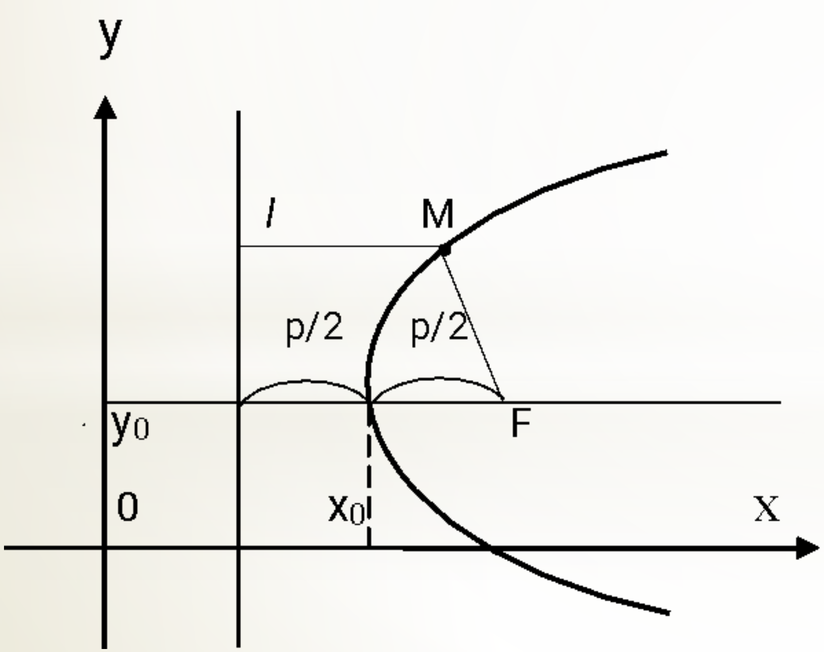


Парабола.

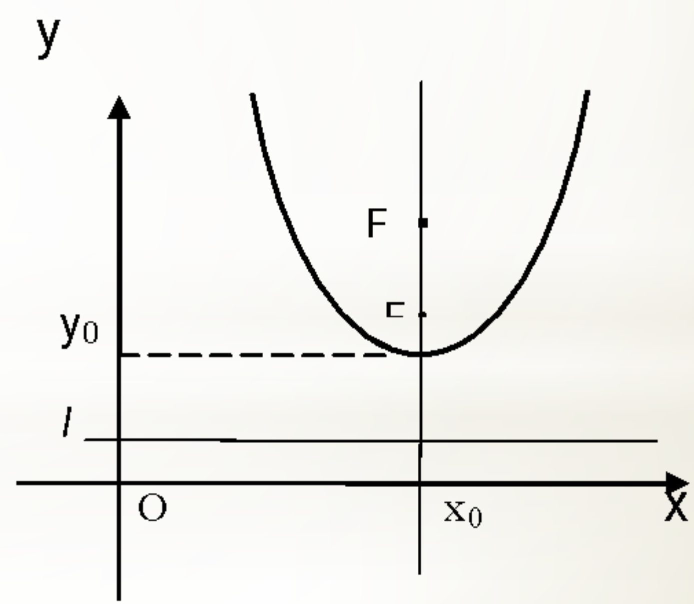
Параболой называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой *l* (рис. 4). Точка F называется *фокусом,* а прямая *l* - *директрисой* параболы.

Каноническое уравнение параболы при $p > 0$:

а) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

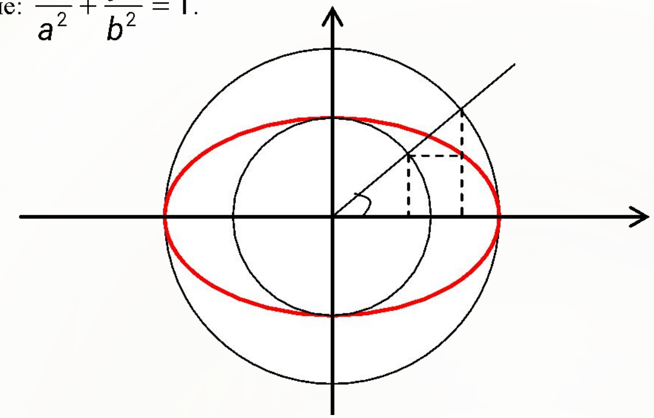


б) $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$



Уравнения некоторых типов кривых в параметрической форме.

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$



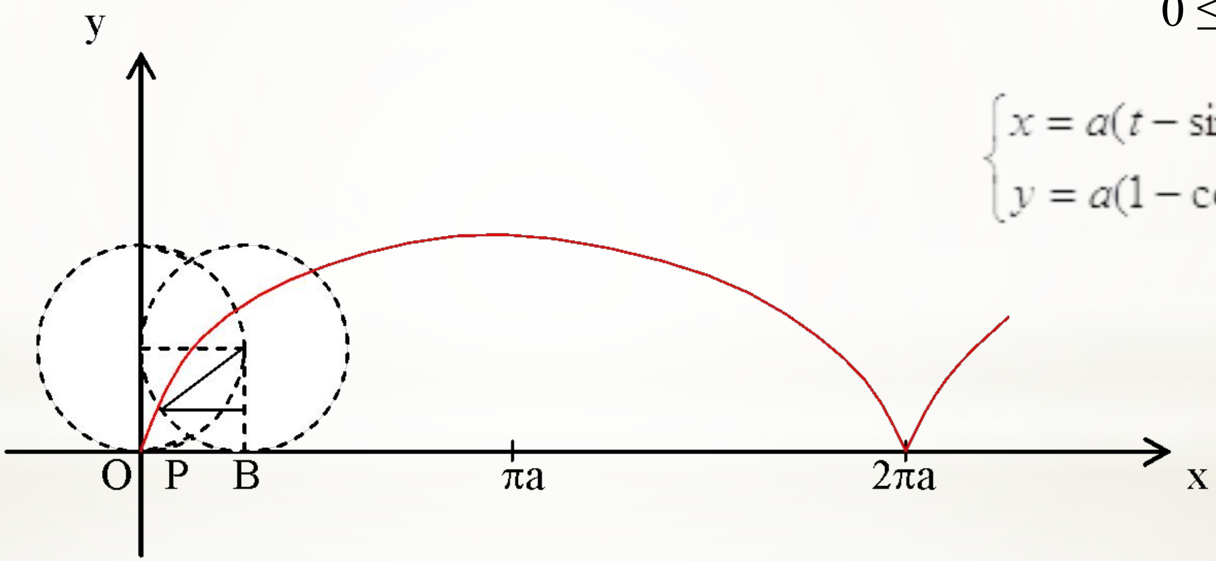
<u>Эллипс</u> $0 \le t \le 2\pi$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

<u>Циклоида.</u>

$0 \le t \le 2\pi$

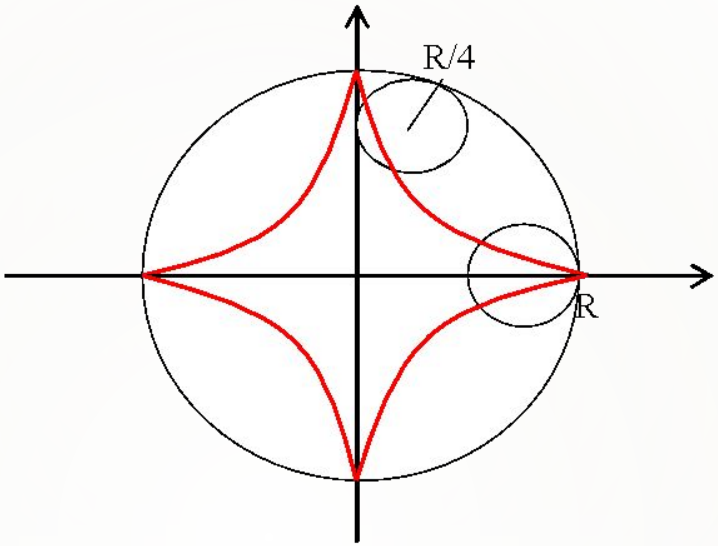
$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$$



Циклоидой называется кривая, которую описывает некоторая точка, лежащая на окружности, когда окружность без скольжения катится по прямой.

Астроида.

Данная кривая представляет собой траекторию точки окружности радиуса R/4, вращающейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R.



Параметрические уравнения, задающие изображенную выше кривую,

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

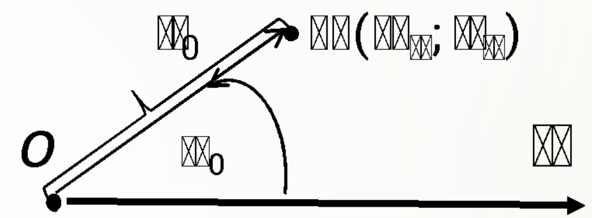
Преобразуя, получим: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^{2/3}$

Полярная система координат.

Полярной системой координат называется масштабированный луч или полупрямая. Точка O называется **полюсом**, а луч l – **полярной осью.**

Положение точки M на плоскости в п.с.к. определяется упорядоченной парой чисел $(\varphi, \rho) \in \{\mathbf{0 \le \varphi < 2\pi;\ 0 \le \rho < +\infty}\}$.

Значение φ равно величине *полярного угла* между осью $o\rho$ и радиус-вектором $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, отсчитываемого от поляры в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки.



Значение ρ равно расстоянию точки M до полюса: $\rho = |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$.

Совмещая поляру $o\rho$ с положительной полуосью ox декартовой системы координат, получим формулы связи между прямоугольными (x, y) и криволинейными (φ, ρ) координатами точки M:

$$x = \rho\ \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad ($$

Пример. Построить точку M с полярными координатами $(2;\sqrt{3})$ в полярной и декартовой системах координат.

Р е ш е н и е.

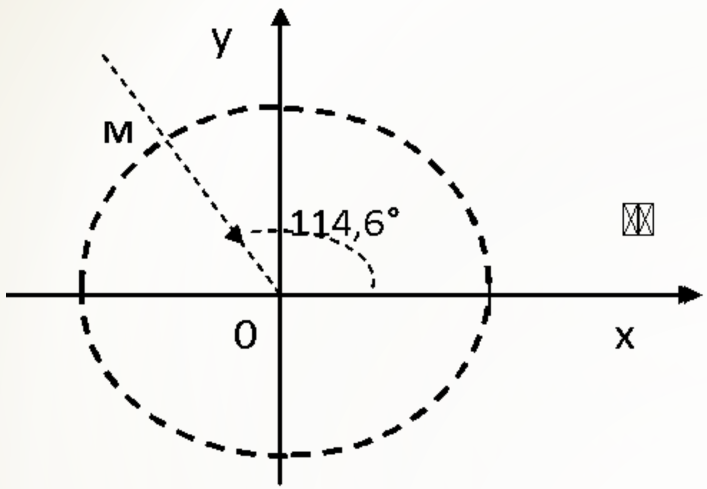


Рис. 1

Точка M лежит на пересечении луча OM: $\varphi = 2$, образующего угол $\varphi = \angle xOM = 2 = 2$ (рад) $= \frac{180^{\circ} \cdot 2}{\pi} \approx 114.6^{\circ}$ с осью Ox и окружности $\rho = \sqrt{3}$ с центром в точке O радиусом $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.

Декартовые координаты точки M определяются по формулам

$x = \sqrt{3}\cos 2 \approx 1{,}73 \cdot (-0.41) \approx -$[illegible],

$y = \sqrt{3}\sin 2 \approx 1{,}73 \cdot 0.91 \approx$ [illegible]

З а м е ч а н и е. Если $\varphi \notin [0; 2\pi)$, *нарушается взаимно однозначное соответствие между парами чисел* (φ, ρ) *и точками плоскости. В этом случае бесконечное множество пар чисел* $(\varphi_0 \pm 2\pi k; \rho)$, $k = 1; 2; 3; \ldots$, *где* $(\varphi_0, \rho) \in \{0 \le \varphi_0 < 2\pi;\ 0 \le \rho < +\infty\}$, *в п.с.к. изобразится одной точкой* (φ_0, ρ).

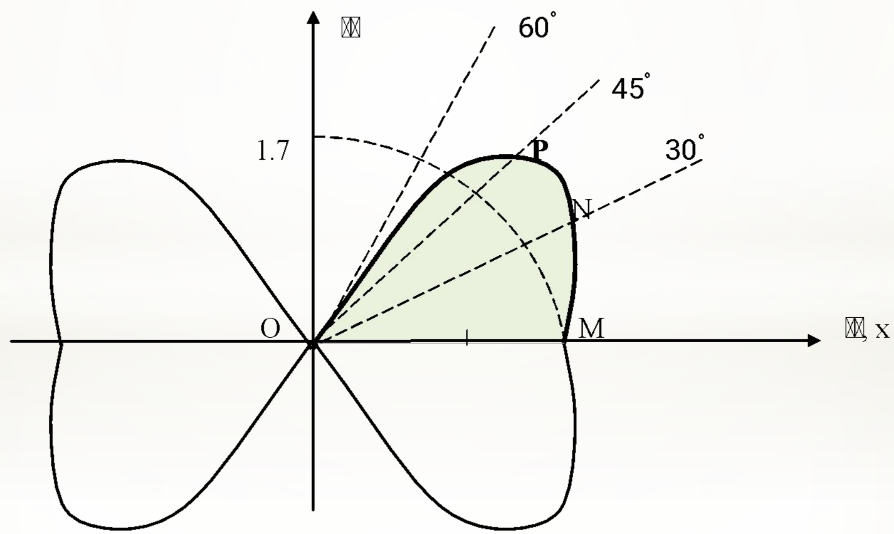
Пример. Построить кривую $\rho^4 = 3x^2 - y^2$ в п.с.к..

Подставляя $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ в заданное уравнение,

получим $\rho^4 = \rho^2(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$ => $\rho = \dfrac{\sqrt{4\cos^2\varphi - 1}}{\cos^2\varphi}$

Составляем расчётную таблицу для построения кривой в первом квадранте.
Симметрично достраиваем полный график функции в остальные четверти.

φ	$\cos\varphi$	$A = \cos^2\varphi$	B = 4A-1	$C = \sqrt{B}$	ρ = [illegible]	точка
0°	1	1	3	$\sqrt{3} \approx 1{,}7$	1,7	M (0; 1,7)
30°	$\sqrt{3}/2$	$3/4$	2	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	1,4	N ($\pi/6$; 1,9)
45°	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	1	1	1	P ($\pi/4$; 2)
60°	$1/2$	$1/4$	0	0	0	O ($\pi/3$; 0)



Комплексные числа

Введём *мнимую единицу* i, удовлетворяющую равенству $i^2 = -1$,
Выражение $z = x + iy$ с действительными (вещественными) числами x и y называется *алгебраической формой записи комплексных или мнимых чисел*.
Число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряжённым числу z.

Замечание. В технической литературе для обозначения мнимой единицы используется буква j (в отличие от комплекса тока i)

Переходя к полярным координатам (r, φ), $(0 \le \varphi < 2\pi;\ 0 \le r < +\infty)$, получаем *тригонометрическую форму записи комплексных чисел*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Пользуются *показательной формой записи комплексных чисел* $z = re^{i\varphi}$, полученной из (4) с помощью формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, где трансцендентное число $e = 2{,}71828\ldots \approx 2{,}72$.

З а м е ч а н и е. *В инженерных расчётах используют полярные координаты при* $0 \le r < +\infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$. *Полагают главное значение* φ *аргумента комплексного числа* $z = x + iy$ *равным*

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0;\ -\infty < y < +\infty; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ y < 0; \\ \pi/2, & \text{если } x = 0,\ y > 0; \\ -\pi/2, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

1. $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, если $x > 0$; $-\infty < y < +\infty$;
2. $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, если $x < 0$, $y \ge 0$;
3. $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, если $x < 0$, $y < 0$;
4. $\varphi = \pi/2$, если $x = 0$, $y > 0$;
5. $\varphi = -\pi/2$, если $x = 0$, $y < 0$.

П р и м е р. Представить комплексное число $z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{1-i}$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах записи.

Р е ш е н и е. $z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{1-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{(1+i)(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(1-i)(1-i)} =$

$$\frac{(1^2+2\cdot 1\cdot i+i^2)(\sqrt{3}+i)}{1^2-i^2} = \frac{(1+2i-1)(\sqrt{3}+i)}{1-(-1)} = \frac{2i(\sqrt{3}+i)}{2} = i(\sqrt{3}+i) = i\sqrt{3}+i^2 = -1+i\sqrt{3}.$$

Определим полярные координаты z.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{(-1)} = \pi + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{3} =$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} = \frac{[illegible]}{[illegible]}(\text{рад.}),\ \varphi = 120^\circ.$$

О т в е т: $z = -1+i\sqrt{3} = 2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.