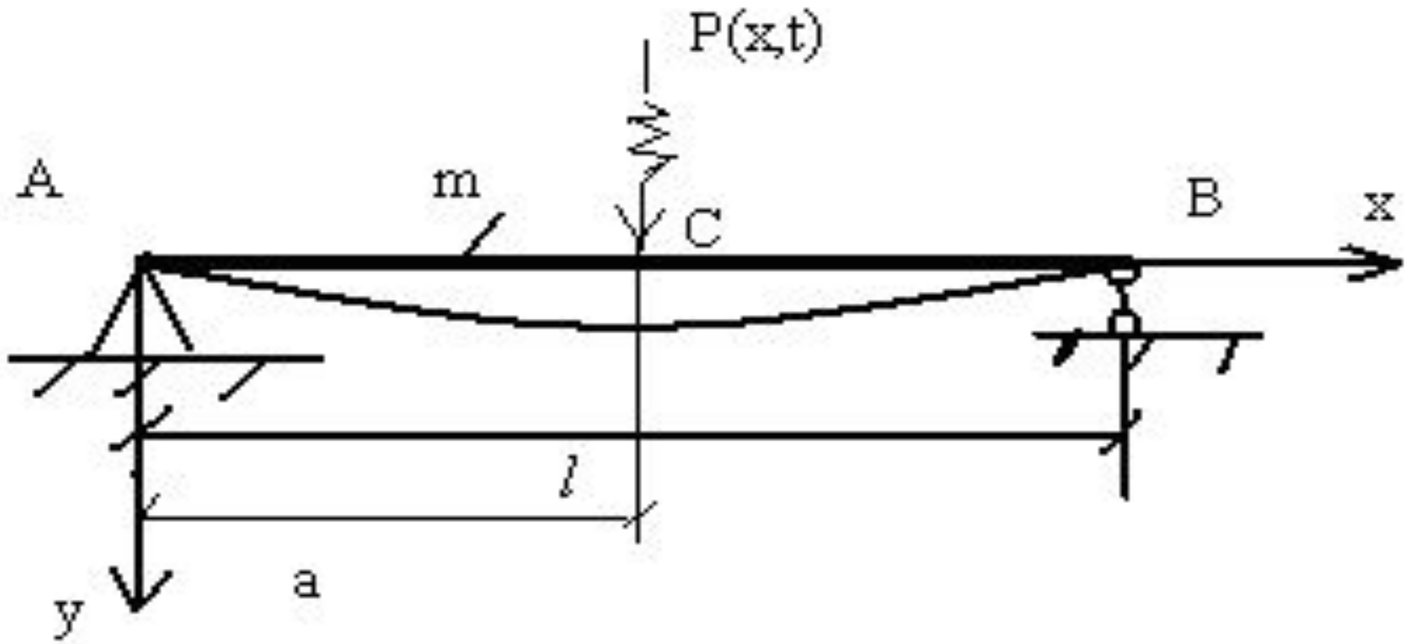
Лекция 19-20
Вынужденные гармонические колебания стержней с распределенной массой при изгибе



Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\mathrm{EI}\frac{\partial^4 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}^4} + \mathrm{m}\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}^2} = \mathrm{PSin}\theta\mathrm{t},$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{y_o} + \mathrm{y}_{\text{част}}$$

$$y(x,t) = y(x)Sin\theta t$$

$$s_k = \sqrt[4]{\frac{m\omega_k^2}{EI}}$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m\theta^2}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{EI}, \qquad u = l\sqrt[4]{\frac{m\theta^2}{EI}} = kl, \qquad k = \sqrt[4]{\frac{m\theta^2}{EI}},$$

$$y = y_o + y_{\text{част}}$$

Если на балке рассматриваются 2 участка (АС, СВ), то решение уравнения (1) необходимо составлять на каждом участке и использовать условия сопряжения на границе участков. Например, на 1 участке нет внешней нагрузки, поэтому уравнение (1) можно рассматривать как однородное и использовать решение однородного уравнения.

Решение дифференциального уравнения на 2-х участках

$$y_1(x) = y_1(0)A(kx) + \frac{y_1'(0)}{k}B(kx) - \frac{M_1(0)}{k^2EI}C(kx) \quad - \frac{Q_1(0)}{k^3EI}D(kx)$$

$$A(kx) = \frac{ch(kx) + Cos(kx)}{2}, \qquad B(kx) = \frac{sh(kx) + Sin(kx)}{2},$$

$$C(kx) = \frac{ch(kx) - Cos(kx)}{2}, \qquad D(kx) = \frac{sh(kx) - Sin(kx)}{2}$$

$$y_2(x) = y_1(x) - \frac{\Delta M_1}{k^2EI}C(kx_1) - \frac{\Delta Q_1}{k^3EI}D(kx_1),$$

$$\Delta M_1 = M_1, \qquad \Delta Q_1 = Q_1, \qquad x_1 = x - a$$

Формула для амплитудной функции прогибов на любом участке балки для случая действия системы гармонических сосредоточенных сил, моментов и равномерно распределенных нагрузок

$$y(x) = y(0)A(kx) + \frac{y^{/}(0)}{k}B(kx) - \frac{M(0)}{k^2 EI}C(kx) \quad - \frac{Q(0)}{k^3 EI}D(kx) -$$

$$- \sum_{1} \frac{P_i}{k^3 EI} D\left[k(x - a_i)\right] - \sum_{1} \frac{M_i}{k^2 EI} C\left[k(x - a_i)\right] + \sum_{1} \frac{\Delta q_i}{k^4 EI} \left\{A\left[k(x - a_i)\right] - 1\right\}$$

Формулы для амплитудных функций прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил

$$y^{/}(x) = y\ \ (0)kD(kx) + y^{/}(0)A(kx) - \frac{M\ \ (0)}{kEI}B(kx)\ \ - \frac{Q(0)}{k^2EI}C(kx) -$$

$$-\sum_{1}\frac{P_i}{k^2EI}C\left[k(x-a_i)\right] - \sum_{1}\frac{M_i}{k\ \ EI}B\left[k(x-a_i)\right] + \sum_{1}\frac{\Delta q_i}{k^3EI}\left\{D\left[k(x-a_i)\right]\right\}$$

$$\mathrm{M(x) = -EIy\ \ (0)k^2C(kx) - EIy^{/}(0)kD(kx) + M\ \ (0)A(kx)}\ \ + \frac{\mathrm{Q(0)}}{\mathrm{k}}\mathrm{B(kx)} +$$

$$+\sum_{1}\frac{\mathrm{P_i}}{\mathrm{k}}\mathrm{B}\left[\mathrm{k(x-a_i)}\right] + \sum_{1}\mathrm{M_i A}\left[\mathrm{k(x-a_i)}\right] - \sum_{1}\frac{\Delta \mathrm{q_i}}{\mathrm{k}^2}\left\{\mathrm{C}\left[\mathrm{k(x-a_i)}\right]\right\},$$

$$\mathrm{Q(x) = -EIy\ \ (0)k^3B(kx) - EIy^{/}(0)k^2C(kx) + M\ \ (0)kD(kx)\ \ + Q(0)A(kx) +}$$

$$+\sum_{1}\mathrm{P_i A}\left[\mathrm{k(x-a_i)}\right] + \sum_{1}\mathrm{M_i kD}\left[\mathrm{k(x-a_i)}\right] - \sum_{1}\frac{\Delta \mathrm{q_i}}{\mathrm{k}}\left\{\mathrm{B}\left[\mathrm{k(x-a_i)}\right]\right\}$$

Граничные условия для балки шарнирно опертой двумя концами, находящейся под действием сосредоточенной силы P

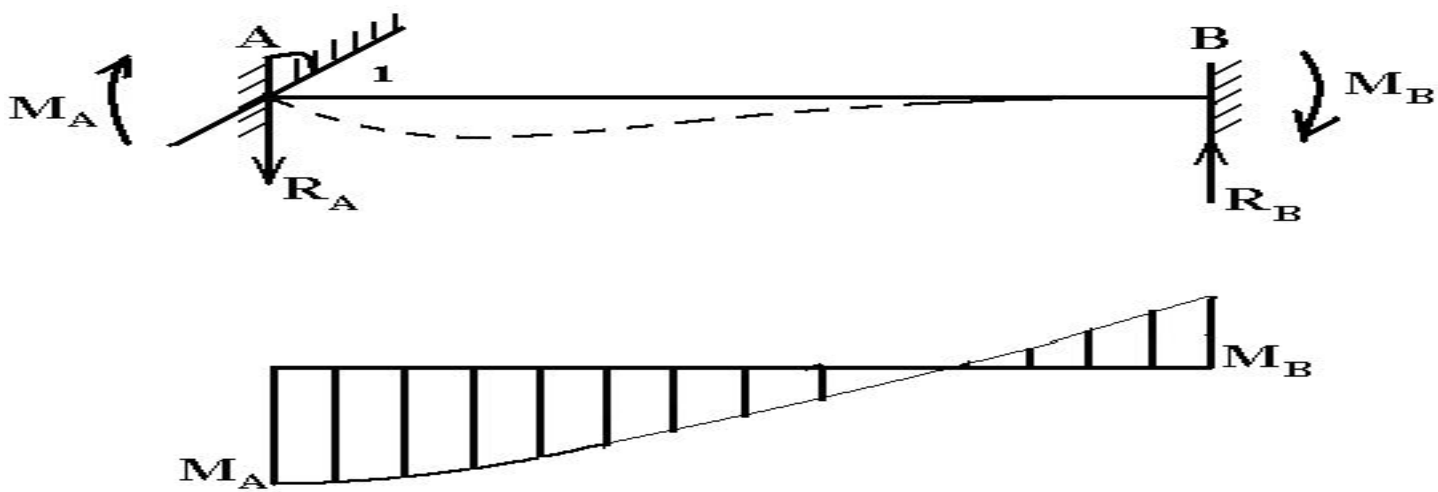
$\Delta M_1 = 0$, $\Delta Q_1 = P$, $\Delta q_i = 0$

$$x = 0 \qquad y_1(0) = 0, M_1(0) = 0,$$

$$x = l \qquad y_2(l) = 0, M_2(l) = 0$$

Случай вынужденных колебаний стержня – кинематическое возбуждение колебаний стержня, вызванное периодическим смещением опор (угловое). Например, пусть поворот левой заделки на угол, равный 1.

$$\varphi(t) = 1 \cdot Sin\theta t$$



Решение и граничные условия

$$y_1(x) = \frac{1}{k} B(kx) - \frac{M_A}{k^2 EI} C(kx) \quad - \frac{Q_A}{k^3 EI} D(kx)$$

$$y(0) = 0, \qquad y^{/}(0) = 1, \qquad M_o = M_A, \qquad Q_o = Q_A$$

$$\mathrm{u} = \lambda = \mathrm{l}\sqrt[4]{\frac{\mathrm{m}\theta^2}{\mathrm{EI}}}$$

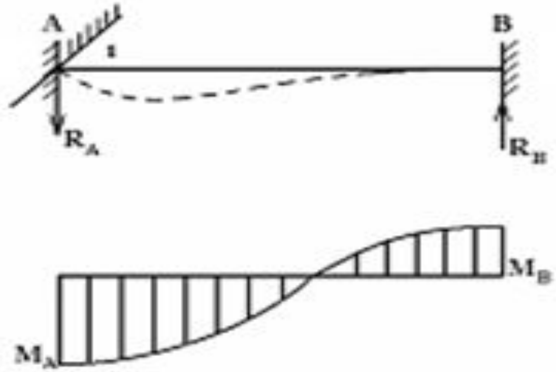
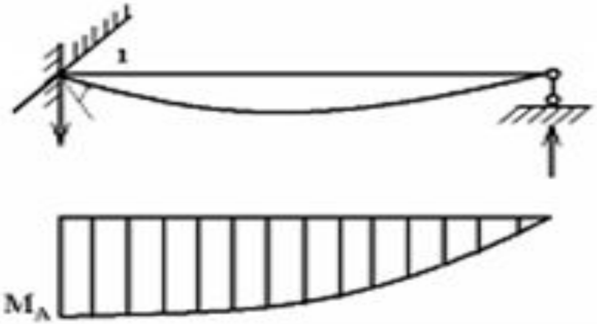
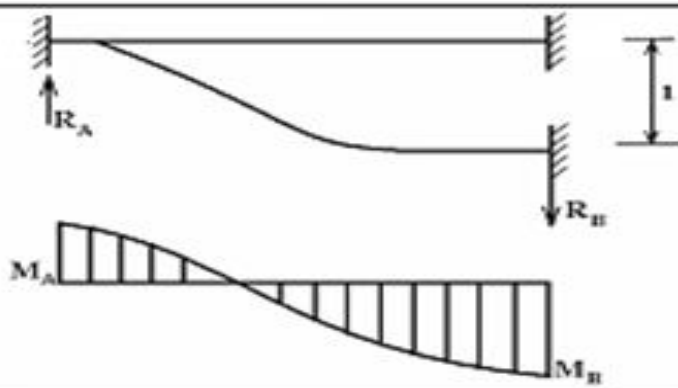
Формулы для реактивных моментов и сил

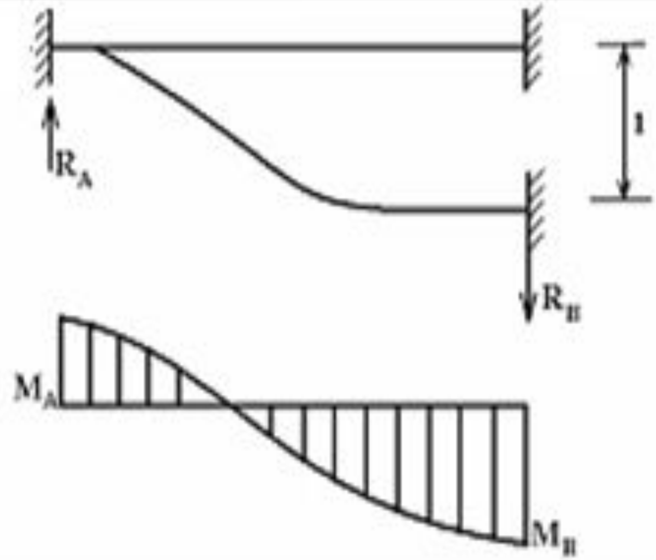
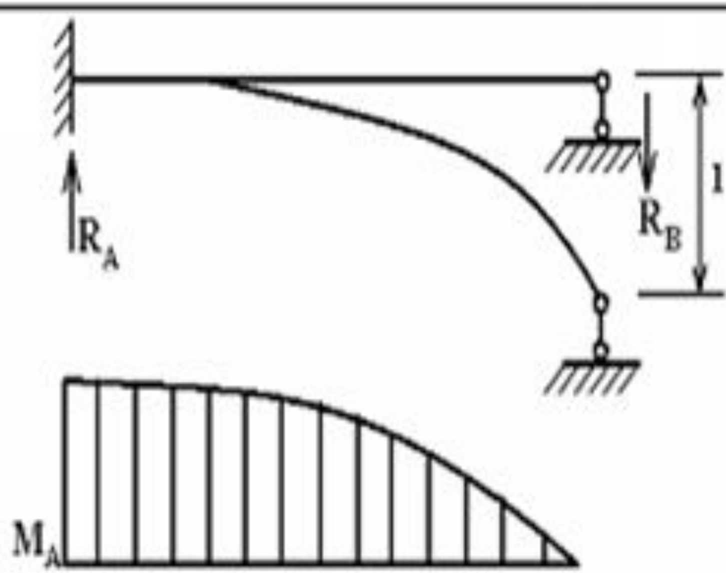
$$M_A = \frac{4EI}{l}\psi_2(u), \qquad R_A = \frac{6EI}{l^2}\psi_5(u),$$

$$M_B = \frac{2EI}{l}\psi_3(u), \qquad R_B = \frac{6EI}{l^2}\psi_6(u),$$

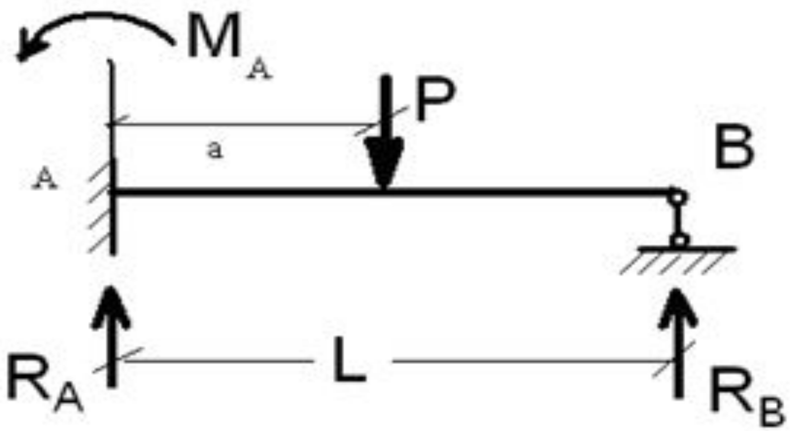
$$\psi_2(u) = \frac{u}{4}\frac{chuSinu - shuCosu}{1 - chuCosu}$$

Таблицы амплитудных значений реакций

	$R_A = -\frac{6EI}{l^2}\varepsilon_1(\lambda), \quad R_B = \frac{6EI}{l^2}\varepsilon_2(\lambda)$ $M_A = \frac{4EI}{l}\mu_1(\lambda)$ $M_B = \frac{2EI}{l}\mu_2(\lambda)$
	$R_A = \frac{3EI}{l^2}\mu_6(\lambda), \quad R_B = \frac{3EI}{l^2}\mu_7(\lambda),$ $M_A = \frac{3EI}{l}\mu_5(\lambda)$
	$R_A = \frac{12EI}{l^3}\varepsilon_4(\lambda), \quad R_B = \frac{12EI}{l^3}\varepsilon_3(\lambda),$ $M_A = \frac{6EI}{l^2}\mu_4(\lambda) \quad M_B = \frac{6EI}{l^2}\mu_3(\lambda)$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$R_A = \frac{12EI}{l^3}\varepsilon_4(\lambda), \quad R_B = \frac{12EI}{l^3}\varepsilon_5(\lambda),$
$M_A = \frac{6EI}{l^2}\mu_4(\lambda) \quad M_B = \frac{6EI}{l^2}\mu_5(\lambda)$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$R_A = \frac{3EI}{l^3}\varepsilon_6(\lambda), \; R_B = \frac{3EI}{l^3}\varepsilon_7(\lambda),$
$M_A = \frac{3EI}{l^2}\mu_6(\lambda)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>СХЕМЫ ЗАГРУЖЕНИЯ</th><th>АМПЛИТУДНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ
(M_A , R_A)</th></tr>
<tr><td>

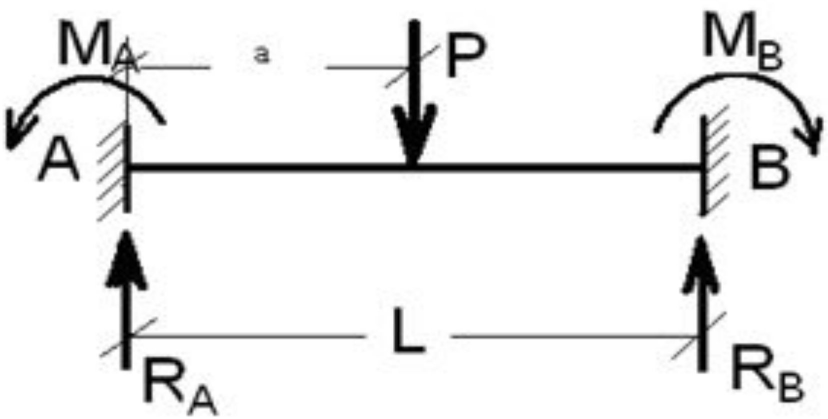


</td><td>

$$M_A = \frac{P}{s} \cdot \frac{-B_\lambda D_{s(l-a)} + D_\lambda B_{s(l-a)}}{\Delta_2},$$

$$R_A = P \cdot \frac{-C_\lambda B_{s(l-a)} + A_\lambda D_{s(l-a)}}{\Delta_2}$$

</td></tr>
<tr><td>

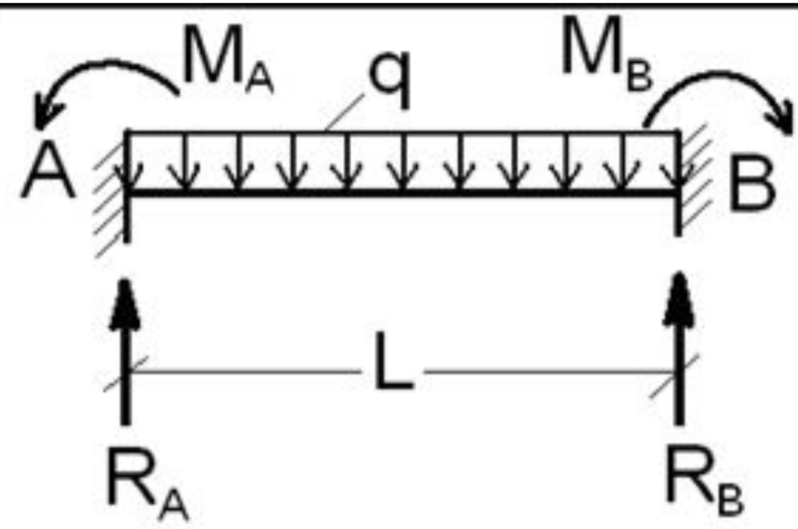


</td><td>

$$M_A = \frac{P}{s} \cdot \frac{C_\lambda D_{s(l-a)} - D_\lambda C_{s(l-a)}}{\Delta_1}$$

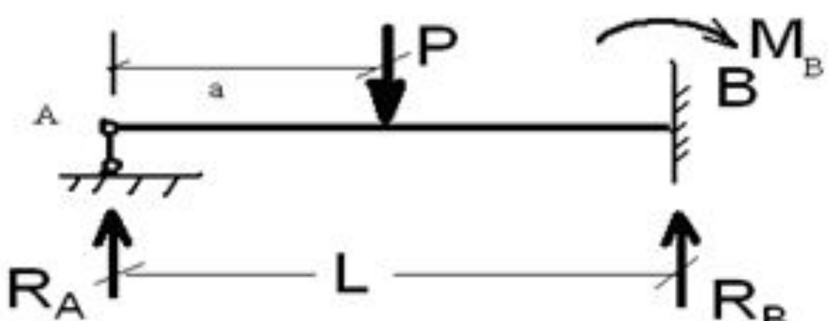
$$R_A = P \cdot \frac{C_\lambda C_{s(l-a)} - B_\lambda D_{s(l-a)}}{\Delta_1}$$

</td></tr>
</table>



$$M_A = \frac{q}{s^2} \cdot \frac{C_\lambda (A_\lambda - 1) - D_\lambda^2}{\Delta_1}$$

$$R_A = \frac{q}{s} \cdot \frac{C_\lambda D_\lambda - B_\lambda (A_\lambda - 1)}{\Delta_1}$$



$$y'_A = \frac{P}{s^2 EI} \cdot \frac{-D_\lambda C_{s(l-a)} + C_\lambda D_{s(l-a)}}{\Delta_2},$$

$$R_A = P \cdot \frac{-B_\lambda C_{s(l-a)} + A_\lambda D_{s(l-a)}}{\Delta_2}$$

Круговые функции

$$\Delta_1 = C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda = \frac{1}{2}(1 - ch\lambda Cos\lambda), \qquad \lambda = sl = l\sqrt[4]{\frac{m\theta^2}{EI}}$$

$$\Delta_2 = A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda = \frac{1}{2}(sh\lambda Cos\lambda - ch\lambda Sin\lambda)$$

$$A_\lambda = \frac{ch\lambda + Cos\lambda}{2}, \qquad B_\lambda = \frac{sh\lambda + Sin\lambda}{2},$$

$$C_\lambda = \frac{ch\lambda - Cos\lambda}{2}, \qquad D_\lambda = \frac{sh\lambda - Sin\lambda}{2}$$

$$\mu_1(\lambda) = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{ch\lambda Sin\lambda - sh\lambda Cos\lambda}{1 - ch\lambda Cos\lambda},$$

$$\mu_2(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{sh\lambda - Sin\lambda}{1 - ch\lambda Cos\lambda},$$

$$\mu_3(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{D_\lambda^2 - A_\lambda C_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{Sin\lambda sh\lambda}{1 - ch\lambda Cos\lambda},$$

$$\mu_4(\lambda) = \frac{\lambda}{6}^2 \cdot \frac{C_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{ch\lambda - Cos\lambda}{1 - ch\lambda Cos\lambda},$$

$$\mu_5(\lambda) = \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{2sh\lambda Sin\lambda}{ch\lambda Sin\lambda - sh\lambda Cos\lambda}$$

$$\varepsilon_4(\lambda) = \frac{\lambda^3}{12} \cdot \frac{B_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^3}{12} \cdot \frac{sh\lambda + Sin\lambda}{1 - ch\lambda Cos\lambda},$$

$$\varepsilon_3(\lambda) = \frac{\lambda^3}{12} \cdot \frac{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^3}{12} \cdot \frac{sh\lambda Cos\lambda + ch\lambda Sin\lambda}{1 - ch\lambda Cos\lambda},$$

$$\varepsilon_1(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{A_\lambda C_\lambda - B_\lambda^2}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{Sin\lambda sh\lambda}{1 - ch\lambda Cos\lambda} = \mu_3(\lambda),$$

$$\varepsilon_2(\lambda) = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{C_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{ch\lambda - Cos\lambda}{1 - ch\lambda Cos\lambda} = \mu_4(\lambda),$$

$$\varepsilon_8(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{1 + ch\lambda Cos\lambda}{ch\lambda Sin\lambda - sh\lambda Cos\lambda}$$

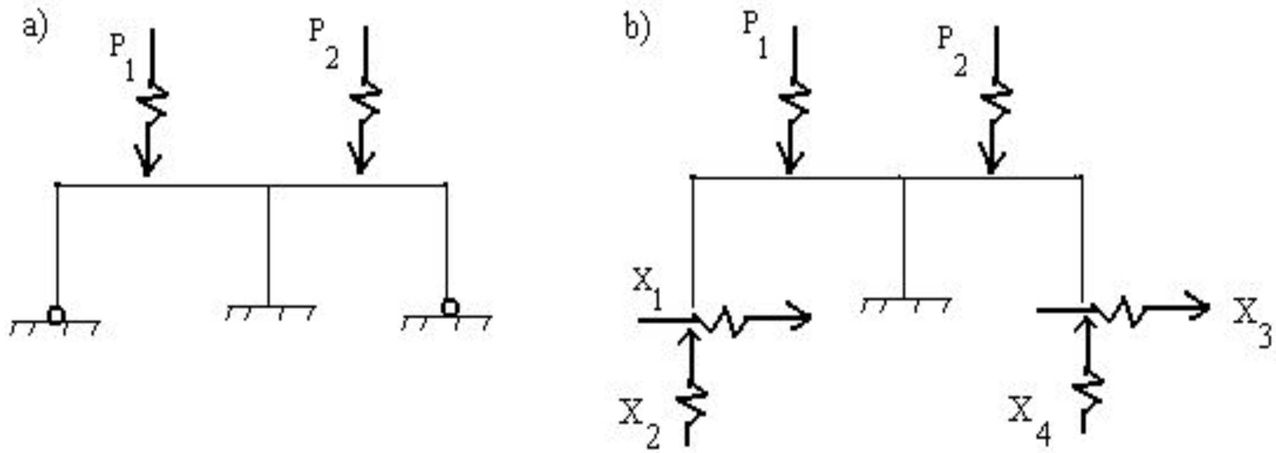
Значения специальных функций

λ	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda)$	$\mu_4(\lambda)$	$\mu_5(\lambda)$	$\varepsilon_3(\lambda)$	$\varepsilon_4(\lambda)$	$\varepsilon_8(\lambda)$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	0,9999
0,2	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	0,9999	0,9999	1,0000	0,9999
0,3	0,9999	1, 0001	0,9998	1,0001	0,9999	0,9999	1,0000	0,9994
0,4	0,9999	1, 0001	0,9998	1,0002	0,9998	0,9997	1,0001	0,9980
0,5	0,9999	1, 0002	0,9995	1,0003	0,9996	0,9992	1,0004	0,9951
0,6	0,9997	1, 0005	0,9989	1,0007	0,9992	0,9981	1,0007	0,9898
0,7	0,9994	1, 0009	0,9979	1,0012	0,9985	0,9960	1,0014	0,9811
0,8	0,9990	1, 0015	0,9964	1,0021	0,9974	0,9926	1,0026	0,9678
0,9	0,9984	1, 0023	0,9943	1,0034	0,9958	0,9873	1,0044	0,9484
1,0	0,9976	1, 0036	0,9913	1,0052	0,9936	0,9997	1,0070	0,9213
1,1	0,9965	1, 0052	0,9872	1,0076	0,9906	0,9690	1,0107	0,8846
1,2	0,9950	1, 0074	0,9818	1,0108	0,9867	0,9546	1,0157	0,8363
1,3	0,9932	1, 0103	0,9750	1,0148	0,9817	0,9357	1,0223	0,7741
1,4	0,9908	1, 0138	0,9998	1,0200	0,9752	0,9113	1,0308	0,6955
1,5	0,9878	1, 0182	0,9555	1,0265	0,9672	0,8806	1,0416	0,5976
1,6	0,9842	1, 0237	0,9422	1,0343	0,9573	0,8425	1,0549	0,4772
1,7	0,9798	1, 0304	0,9262	1,0439	0,9453	0,7958	1,0714	0,3309
1,8	0,9745	1, 0384	0,9069	1,0555	0,9306	0,7393	1,0914	0,1547
1,9	0,9682	1, 0479	0,8840	1,0693	0,9130	0,6716	1,1155	-0,0559
2,0	0,9608	1, 0592	0,8569	1,0857	0,8919	0,5913	1,1444	-0,3059

2,1	0,9521	1, 0725	0,8252	1,1051	0,8667	0,4967	1,1787	-0,6012
2,2	0,9419	1, 0885	0,7881	1,1278	0,8368	0,38617	1,2192	-0,9487
2,3	0,9300	11064	0,7451	1,1544	0,8012	0,2574	1,2668	-1,3563
2,4	0,9162	1, 1277	0,6953	1,1853	0,7589	0,1087	1,3227	-1,8377
2,5	0,9002	1, 1525	0,6379	1,2215	0,7085	-0,0626	1,3879	-2,3928
2,6	0,8819	1,1813	0,5718	1,2635	0,6484	-0,2592	1,4641	-3.0482
2,7	0,8606	1,2146	0,4958	1,3122	0,5761	-0,4840	1,5530	-3,8189
2,8	0,8362	1,2534	0,4086	1,3691	0,4886	-0,7405	1,6565	-4,7296
2,9	0,8080	1,2984	0,3084	1,4352	0,3817	-1,0327	1,7775	-5,8136
3,0	0,7754	1,3509	0,1934	1,5124	0,2494	-1,3651	1,9187	-7,1176
3,1	0,7377	1,4121	0,0609	1,6028	0,0826	-1,7432	2,0842	-8,7095
3,2	0,6940	1,4840	-0,0920	1,7091	-0,1321	-2,1736	2,2789	-10,693
3,3	0,6430	1,5687	-0,2691	1,8349	-0,4185	-2,6641	2,5087	-13,236
3,4	0,5932	1,6693	-0,4753	1,9844	-0,8150	-3,2245	2,7817	-16,631
3,5	0,5126	1,7896	-0,7172	2,1640	-1,3990	-3,8671	3,1083	-22,442
3,6	0,4284	1,9349	-1,0032	2,3816	-2,3415	-4,6079	3,5020	-28,918
3,7	0,3269	2,1127	-1,3453	2,6487	-4,1148	-5,4678	3,9819	-42,510
3,8	0,2027	2,3335	-1,7603	2,9817	-8,6838	-6,4756	4,5742	-76,545

3,9	0,0478	2,6131	-2,2730	3,4048	-47,556	-7,6716	5,3165	-360,80
4,0	-0,1501	2,9758	-2,9217	3,9557	19,468	-9,1145	6,2652	120,06
4,1	-0,4110	3,4615	-3,7687	4,6961	9,1701	-10,894	7,5072	51,053
4,2	-0,7700	4,1402	-4,9232	5,7342	6,3934	-13,157	9,1857	29,793
4,3	-1,2950	5,1472	-6,5952	7,2795	5,0927	-16,158	11,552	19,210
4,4	-2,1357	6,7817	-9,2489	9,7956	4,3307	-20,388	15,092	12,461
4,5	-3,7021	9,8635	-14,155	14,552	3,8236	-26,985	20,883	7,4703
4,6	-7,6655	17,734	-26,492	26,735	3,4560	-38,725	31,873	3,3879
4,7	-37,947	78,238	-120,37	120,43	3,1721	-67,821	60,093	0,2033
4,8	18,304	-34,332	53,839	-53,975	2,9412	-286,43	277,75	-3,5364
4,9	8,3439	-14,483	22,905	-23,252	2,7452	117,88	-127,58	-6,7568
5,0	5,7486	-9,3710	14,786	-15,362	2,5722	45,470	-56,284	

Динамический расчет рам по методу сил



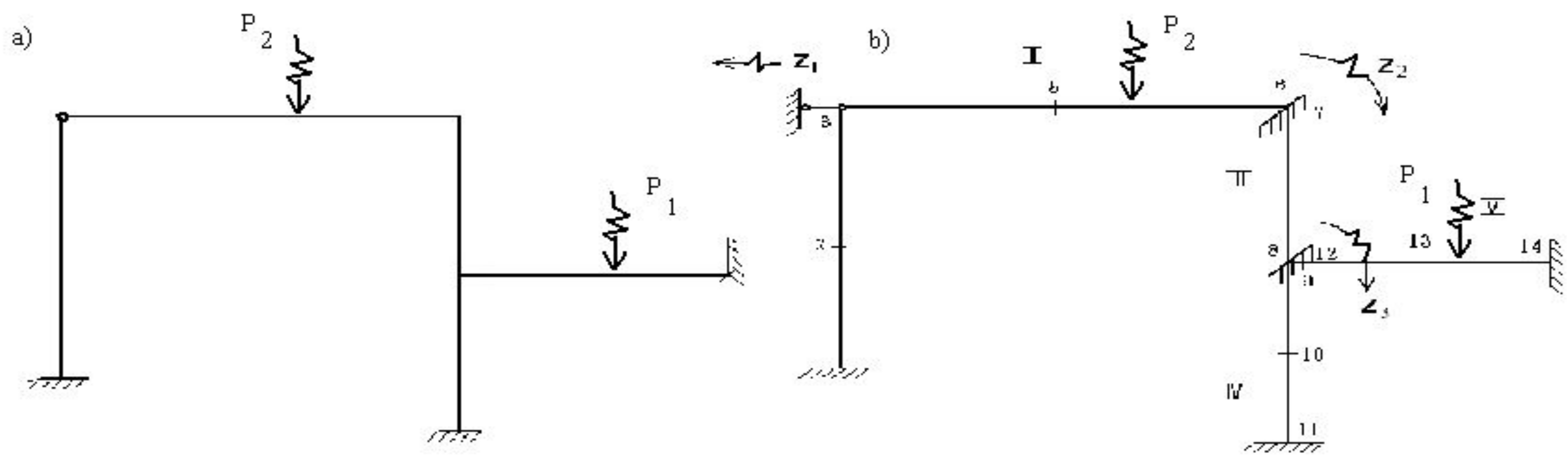
$$x_1\delta_{11} + x_2\delta_{12} + x_3\delta_{13} + x_4\delta_{14} + \Delta_{1p} = 0$$

$$x_1\delta_{21} + x_2\delta_{22} + x_3\delta_{23} + x_4\delta_{24} + \Delta_{2p} = 0$$

$$x_1\delta_{31} + x_2\delta_{32} + x_3\delta_{33} + x_4\delta_{34} + \Delta_{3p} = 0$$

$$x_1\delta_{41} + x_2\delta_{42} + x_3\delta_{43} + x_4\delta_{44} + \Delta_{4p} = 0$$

Динамический расчет рам по методу перемещений



$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1P} = 0$$

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + R_{2P} = 0$$

$$Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3p} = 0$$

Обозначения в канонических уравнениях метода перемещений

В (1) коэффициенты r_{ij} (i=1,2,3,4; j=1,2,3,4) представляют амплитудные значения реакций в дополнительных связях по направлению неизвестных динамических перемещений $Z_1(t)= z_1 \sin\theta t$, $Z_2(t)= z_2 \sin\theta t$ $Z_3(t)= z_3 \sin\theta t$, где z_1, z_2, z_3 – амплитудные значения перемещений, а R_{1p}, R_{2p}, R_{3p} – амплитудные значения реакций в дополнительных связях от динамических нагрузок.