

Пусть $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \dots, k - 1\}$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется k -значной, если

$$f^n : E_k^n \rightarrow E_k,$$

где $n = 1, 2, \dots$

Множество всех k -значных функций обозначим как P_k ,
множество всех k -значных функций, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, обозначим как P_k^n .

При $k = 2$ функции называются **булевыми**, при $k \geq 3$ –
многозначными.

Аналогично булеву случаю равенство k -значных функций
($k \geq 3$) рассматривается с точностью до несущественных
(фиктивных) переменных.

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, если найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_k$, что

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq \text{Const}.$$

Переменная x_i является существенной, если все другие переменные можно так зафиксировать, полученная новая функция одной этой переменной принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Фиктивные переменные можно удалять и добавлять.

Функции f и g называются **равными**, если при помощи конечного числа удалений или добавлений фиктивных переменных они их можно сделать совпадающими.

Функции f и g называются **конгруэнтными**, если равные им функции осуществляют одинаковые отображения, т.е. отличаются только именами переменных.

Примеры.

1. Функции $f_1(x) = 0$ и $f_2 = 0$ – равны.
2. Функции $g(x) = x$ и $h(y) = y$ – конгруэнтны.

Способы задания k -значных функций

1. Таблицы значений. Упорядочим все наборы множества E_k^n в лексико-графическом, или алфавитном порядке (в алфавите $0, 1, \dots, k - 1$), сопоставим каждому набору – значение функции на нем.

x_1	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\dots$	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	$\dots$	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
	$\dots$			
0	$\dots$	0	$k - 1$	$f(0, \dots, 0, k - 1)$
	$\dots$			
$k - 1$	$\dots$	$k - 1$	0	$f(k - 1, \dots, k - 1, 0)$
	$\dots$			
$k - 1$	$\dots$	$k - 1$	$k - 2$	$f(k - 1, \dots, k - 1, k - 2)$
$k - 1$	$\dots$	$k - 1$	$k - 1$	$f(k - 1, \dots, k - 1, k - 1)$

Теорема 1. Пусть $k \geq 2$. При $n \geq 1$ верно $|P_k^n| = k^{k^n}$.

Доказательство.

Для каждой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^n$ – в ее таблице k^n строк.

В каждой строке вне зависимости от других строк – ее значение на этом наборе из k возможных.

Откуда $|P_k^n| = k^{k^n}$.

Элементарные k -значные функции ($k \geq 3$).

$n = 0$:

константы $0, 1, \dots, k - 1$.

$n = 1$:

x	x	$\bar{x}$	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k - 1$	0
1	1	2	$k - 2$	$k - 1$
...				
$k - 2$	$k - 2$	$k - 1$	1	2
$k - 1$	$k - 1$	0	0	1

x – тождественно x ;

$\bar{x} = x + 1(\bmod k)$ – отрицание Поста x ;

$\sim x = (k - 1) - x$ – отрицание Лукасевича x ;

$-x = k - x(\bmod k)$ – минус x .

Характеристические функции выделенного значения $J_i(x)$, $j_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, k - 1$:

$$J_i(x) = \begin{cases} k - 1, & x = i; \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i; \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

$n = 2$:

$x + y(\bmod k)$, $x - y(\bmod k)$, $x \cdot y(\bmod k)$ – сложение, вычитание и умножение по модулю k ;

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y; \\ y, & x > y. \end{cases} \quad \text{– минимум из } x \text{ и } y;$$

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y; \\ y, & x < y. \end{cases} \quad \text{– максимум из } x \text{ и } y;$$

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geq y; \\ 0, & x < y. \end{cases} \quad \text{– усеченная разность;}$$

$$x \supset y = \begin{cases} k - 1, & x \leq y; \\ (k - 1) - (x - y), & x > y. \end{cases} \quad \text{– импликация.}$$

обобщения:

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \dots, x_n));$$

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \dots, x_n));$$

$$x^m = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_m \quad \text{– степень.}$$

Обобщения булевых функций

n	P_2	$P_k, k \geq 3$	пояснения
$n = 0$	0, 1	0, 1, ..., $k - 1$	константы
$n = 1$	x $\bar{x}$	x $\bar{x}, \sim x$	тождественная функция отрицание
$n = 2$	$x \& y$ $x \vee y$ $x \oplus y$ $x \rightarrow y$	$\min(x, y)$ $\max(x, y)$ $x + y \pmod k$ $x \supset y$	конъюнкция или минимум дизъюнкция или максимум сложение по модулю k импликация

В связи с расширением исходного множества значений появляются элементарные функции, не имеющие явного элементарного прообраза в булевом случае: $-x$, $J_i(x)$, $j_i(x)$, $x \dot{-} y$.

Понятия **формулы** и **функции**, реализуемой формулой, вводятся аналогично булеву случаю.

Пусть $A \subseteq P_k$.

Формула над множеством A определяется по индукции.

1. Базис индукции. Если $f^n \in A$ – n -местная функция и $u_1, \dots, u_n$ – набор из n произвольных имен переменных, то выражение $f(u_1, \dots, u_n)$ – формула.
2. Индуктивный переход. Если $F_1, \dots, F_n$ – уже построенные формулы или имена переменных и $f^n \in A$ – n -местная функция, то выражение $f(F_1, \dots, F_n)$ – формула.
3. Других формул нет, т.е. каждая формула или построена по базису индукции, или построена по индуктивному переходу.

Пример. Пусть $A \subseteq P_5$ – множество элементарных функций.

Тогда

$$F_1 = x^2$$

формула по базису индукции для функции $x^2 \in A$ и имени переменной x ;

$$F_2 = 3$$

формула по базису индукции для функции $3 \in A$;

$$F_3 = 3 \cdot x^2$$

формула по индуктивному переходу для уже построенных формул F_1 , F_2 и функции $x \cdot y \in A$;

$$F_4 = \sim (3 \cdot x^2)$$

формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы F_3 и функции $\sim x \in A$;

и т.д.

Каждая формула над множеством $A \subseteq P_k$ определяет некоторую k -значную функцию.

Функция f_F , реализуемая формулой F , определяется по индукции.

1. Базис индукции. Если $F = u$, где u – имя переменной, то $f_F = u$, т.е. функция f_F тождественно равна переменной u .
2. Индуктивный переход. Если $F = f(F_1, \dots, F_n)$, где $F_1, \dots, F_n$ – формулы или имена переменных и $f^n \in A$, то $f_F = f(f_{F_1}, \dots, f_{F_n})$.

Теорема 2 (о I-й форме). Пусть $k \geq 2$. Каждая k -значная функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ может быть задана формулой вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \max_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} \min (J_{\sigma_1}(x_1), \dots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)) .$$

