Пусть $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.
Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется k-**значной**, если

$$f^n : E_k^n \to E_k,$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Множество всех k-значных функций обозначим как P_k, множество всех k-значных функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, обозначим как P_k^n.

При $k = 2$ функции называются **булевыми**, при $k \geq 3$ – многозначными.

Аналогично булеву случаю равенство k-значных функций ($k \geq 3$) рассматривается с точностью до несущественных (фиктивных) переменных.

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, если найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_k$, что

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq Const.$$

Переменная x_i является существенной, если все другие переменные можно так зафиксировать, полученная новая функция одной этой переменной принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.
Фиктивные переменные можно удалять и добавлять.

Функции f и g называются **равными**, если при помощи конечного числа удалений или добавлений фиктивных переменных они их можно сделать совпадающими.

Функции f и g называются **конгруэнтными**, если равные им функции осуществляют одинаковые отображения, т.е. отличаются только именами переменных.

Примеры.
1. Функции $f_1(x) = 0$ и $f_2 = 0$ – равны.

2. Функции $g(x) = x$ и $h(y) = y$ – конгруэнтны.

Способы задания k-значных функций

1. Таблицы значений. Упорядочим все наборы множества E_k^n в **лексико-графическом**, или **алфавитном** порядке (в алфавите $0, 1, \ldots, k-1$), сопоставим каждому набору – значение функции на нем.

x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\ldots$	0	0	$f(0, \ldots, 0, 0)$
0	$\ldots$	0	1	$f(0, \ldots, 0, 1)$
	$\ldots$			
0	$\ldots$	0	$k-1$	$f(0, \ldots, 0, k-1)$
	$\ldots$			
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	0	$f(k-1, \ldots, k-1, 0)$
	$\ldots$			
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	$k-2$	$f(k-1, \ldots, k-1, k-2)$
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	$k-1$	$f(k-1, \ldots, k-1, k-1)$

Теорема 1. *Пусть* $k \geq 2$. *При* $n \geq 1$ *верно* $|P_k^n| = k^{k^n}$.

Доказательство.
Для каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^n$ – в ее таблице k^n строк.
В каждой строке вне зависимости от других строк – ее значение на этом наборе из k возможных.
Откуда $|P_k^n| = k^{k^n}$.

Элементарные k-значные функции ($k \geq 3$).

$\mathbf{n = 0}$:

константы $0, 1, \ldots, k-1$.

$\mathbf{n = 1}$:

x	x	$\bar{x}$	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k-1$	0
1	1	2	$k-2$	$k-1$
$\ldots$				
$k-2$	$k-2$	$k-1$	1	2
$k-1$	$k-1$	0	0	1

x – тождественно x;

$\bar{x} = x + 1 (\bmod\ k)$ – отрицание Поста x;

$\sim x = (k-1) - x$ – отрицание Лукасевича x;

$-x = k - x (\bmod\ k)$ – минус x.

Характеристические функции выделенного значения $J_i(x)$, $j_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$:

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & x = i; \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i; \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

n = 2:

$x + y(\mathrm{mod}\ k)$, $x - y(\mathrm{mod}\ k)$, $x \cdot y(\mathrm{mod}\ k)$ – сложение, вычитание и умножение по модулю k;

$\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \le y; \\ y, & x > y. \end{cases}$ – минимум из x и y;

$\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \ge y; \\ y, & x < y. \end{cases}$ – максимум из x и y;

$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \ge y; \\ 0, & x < y. \end{cases}$ – усеченная разность;

$x \supset y = \begin{cases} k - 1, & x \le y; \\ (k-1) - (x - y), & x > y. \end{cases}$ – импликация.

обобщения:

$\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \ldots, x_n))$;

$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \ldots, x_n))$;

$x^m = \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{m}$ – степень.

Обобщения булевых функций

n	P_2	$P_k,\ k \geq 3$	пояснения
$n = 0$	$0,\ 1$	$0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$	константы
$n = 1$	x	x	тождественная функция
	$\bar{x}$	$\bar{x},\ \sim x$	отрицание
$n = 2$	$x \& y$	$\min(x, y)$	конъюнкция или минимум
	$x \vee y$	$\max(x, y)$	дизъюнкция или максимум
	$x \oplus y$	$x + y \pmod{k}$	сложение по модулю k
	$x \to y$	$x \supset y$	импликация

В связи с расширением исходного множества значений появляются элементарные функции, не имеющие явного элементарного прообраза в булевом случае: $-x$, $J_i(x)$, $j_i(x)$, $x \dot{-} y$.

Понятия **формулы** и **функции, реализуемой формулой**, вводятся аналогично булеву случаю.

Пусть $A \subseteq P_k$.

Формула над множеством A определяется по индукции.

1. Базис индукции. Если $f^n \in A$ – n-местная функция и $u_1, \dots, u_n$ – набор из n произвольных имен переменных, то выражение $f(u_1, \dots, u_n)$ – формула.

2. Индуктивный переход. Если $F_1, \dots, F_n$ – уже построенные формулы или имена переменных и $f^n \in A$ – n-местная функция, то выражение $f(F_1, \dots, F_n)$ – формула.

3. Других формул нет, т.е. каждая формула или построена по по базису индукции, или построена по индуктивному переходу.

Пример. Пусть $A \subseteq P_5$ – множество элементарных функций. Тогда

$F_1 = x^2$	формула по базису индукции для функции $x^2 \in A$ и имени переменной x;
$F_2 = 3$	формула по базису индукции для функции $3 \in A$;
$F_3 = 3 \cdot x^2$	формула по индуктивному переходу для уже построенных формул F_1, F_2 и функции $x \cdot y \in A$;
$F_4 = \sim (3 \cdot x^2)$	формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы F_3 и функции $\sim x \in A$;
	и т.д.

Каждая формула над множеством $A \subseteq P_k$ определяет некоторую k-**значную функцию**.

Функция f_F, реализуемая формулой F, определяется по индукции.

1. Базис индукции. Если $F = u$, где u – имя переменной, то $f_F = u$, т.е. функция f_F тождественно равна переменной u.

2. Индуктивный переход. Если $F = f(F_1, \ldots, F_n)$, где $F_1, \ldots, F_n$ – формулы или имена переменных и $f^n \in A$, то $f_F = f(f_{F_1}, \ldots, f_{F_n})$.

Теорема 2 (о I-й форме). *Пусть $k \geq 2$. Каждая k-значная функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ может быть задана формулой вида:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \max_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} \min \left(J_{\sigma_1}(x_1), \dots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \right).$$