Дифференциальные уравнения

Подготовила работу
студентка гр.ГФ-131б
Мажарова А.О.
Проверила: Вагизова Г.Г.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные различных порядков по x.

Общий вид дифференциального уравнения *n*-го порядка:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Решаем дифференциальное уравнение:

$$4\ y(x)+x\ y'(x)\ =\ 5\ x+x^2$$

$$\frac{4\ y(x)}{x}+y'(x)\ =\ \frac{5\ x+x^2}{x}$$

Порядок дифференциального уравнения

Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Примеры.

Первый порядок $y' = xy$

Второй порядок $y'' + 2y' + y = 0$

Третий порядок $y''' = e^{2x}$

[redacted]

Линейное дифференциальное уравнение

Дифференциальное уравнение называется **линейным**, если его левая часть является многочленом от неизвестной функции и ее производных различных порядков, то есть имеет общий вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

Коэффициенты линейного уравнения

Правая часть, свободный член

Пример Найти общий интеграл уравнения $(2x - y^2)y' = 2y$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

▶ Данное уравнение является линейным отиосительно функции $x(y)$. Действительно,

$$(2x - y^2)\frac{dy}{dx} = 2y,\ 2x - y^2 = 2y\frac{dx}{dy},\ \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{2},$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{y}{2},\ p(y) = -\frac{1}{y},\ q(y) = -\frac{y}{2},$$

т. е. получили уравнение вида . Согласно формуле общее решение исходиого уравнения имеет вид

$$x = e^{\int\frac{dy}{y}}\left(-\int\frac{y}{2}e^{-\int\frac{dy}{y}}dy + C\right) = e^{\ln|y|}\left(-\int\frac{y}{2}e^{-\ln|y|}dy + C\right) =$$

$$= |y|\left(-\frac{1}{2}\int\frac{y}{|y|}dy + C\right) = -\frac{y}{2}\int dy + Cy = Cy - \frac{1}{2}y^2. \ ◀$$

Однородное дифференциальное уравнение

Дифференциальное уравнение называется **однородным**, если его правая часть равна нулю. В противном случае оно называется **неоднородным**.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

Коэффициенты линейного уравнения

Правая часть равна нулю.

[redacted]

Пример Проинтегрировать дифференциальное уравнение $2x^2y' = x^2 + y^2$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

▶ Так как функции $2x^2$ и $x^2 + y^2$ — однородные второго измерения, то данное уравнение — однородное. Сделаем замену $y = xu$, $y' = u + xu'$. Тогда

$$2x^2(u + xu') = x^2 + (xu)^2,\ 2x^2(u + xu') = x^2(1 + u^2).$$

Предполагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2. Далее имеем:

$$2u + 2x\frac{du}{dx} = 1 + u^2,\ 2xdu = (1 + u^2 - 2u)dx.$$

Разделяя переменные, последовательно находим:

$$\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \frac{dx}{2x},$$

$$\int\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \int\frac{dx}{2x},\ \int\frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x|,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C,\ 1 = (1 - u)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

В последнее выражение вместо u подставим значение y/x. Получим общий интеграл

$$1=\left(1-\frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right),\quad x=(x-y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Разрешив его относительно y, найдем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y=x-\frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

Использовав начальное условие $y(1)=0$, определим значение C:

$$0=1-\frac{1}{\ln C},\quad \ln C=1,\quad C=e.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y=x-\frac{x}{1+\ln\sqrt{|x|}}.\ \blacktriangleleft$$

Решение дифференциального уравнения

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество относительно x.

Решить, или **проинтегрировать**, данное дифференциальное уравнение – означает найти все его решения в заданной области.

График решения называется **интегральной кривой**.

Общее и частное решения

Общим решением дифференциального уравнения называется решение, которое содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое получается из общего, если приписать входящим в него произвольным постоянным определенные значения.

[redacted]

Пример

Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + y = 0$$

Легко сообразить, что sin x и cos x являются решениями.

Общее решение:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Частное решение: $y = 2\sin x - 5\cos x$

Проверка решений

Если в результате решения некоторого дифференциального уравнения найдена некоторая функция, то подставив эту функцию в уравнение, можно проверить правильность решения.

Пример. Функция: $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ есть решение уравнения:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Проверка.

$$y' = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^x$$
$$y'' = (C_1 + 2C_2 + C_2 x)e^x$$
$$\Rightarrow \quad y'' - 2y' + y = 0$$

Пример Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy+y)dx+(xy+x)dy=0.$$

▶ Предположив, что $x \neq 0$, $y \neq 0$ и разделив обе части данного уравнения на xy, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

Интегрируя его, согласно формуле последовательно находим (произвольную постоянную можно представить в виде $\ln|C|$):

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=\ln|C|,$$

$$x+\ln|x|+y+\ln|y|=\ln|C|,$$

$$\ln|xy|+\ln e^{x+y}=\ln|C|,\ xye^{x+y}=C.$$

Последнее равенство является общим интегралом уравнения При его нахождении былн приняты ограничения $x \neq 0$, $y \neq 0$. Однако функции $x=0$ и $y=0$ также являются решениями исходного уравнения, что легко проверяется; с другой стороны, они получаются из общего интеграла при $C=0$. Следовательно, $x=0$, $y=0$ — частные решения уравнення ◀

Пример Найти частное решение уравнения

$$(1+e^{2x})y^2y'=e^x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

▶ Запишем данное уравнение в дифференциальной форме формулу :

$$(1+e^{2x})y^2dy-e^xdx=0.$$

Теперь разделим переменные:

$$y^2dy-\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^2dy-\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\frac{C}{3},\ \frac{y^3}{3}-\operatorname{arctg} e^x=\frac{C}{3};$$

$$y=\sqrt[3]{C+3\operatorname{arctg} e^x}.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Использовав начальное условие, определим значение произвольной постоянной:

$$1=\sqrt[3]{C+\frac{3}{4}\pi},\ C=1-\frac{3}{4}\pi.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y=\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}\pi+3\operatorname{arctg} e^x}.$$ ◀

Уравнение первого порядка

Уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется **дифференциальным уравнением первого порядка**:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение **разрешено относительно производной**, то оно имеет вид:

$$y' = f(x, y)$$

Пример Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная в неявном виде: $F(x, y) \equiv \ln \frac{y}{x} - 5 + xy = 0$, обращает дифференциальное уравнение $(x + x^2 y)y' = y - xy^2$ в тождество, т. е. является его решением.

▶ Действительно, согласно правилу дифференцирования неявной функции $F(x, y) = 0$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\left(y - \frac{1}{x}\right) \Big/ \left(x + \frac{1}{y}\right) = \frac{y}{x} \frac{1 - xy}{1 + xy} = \frac{1 - xy^2}{x + x^2 y}.$$

Подставив найденную производную y' в исходное дифференциальное уравнение, получим тождество. ◀

Постановка задачи Коши

Задача нахождения решения дифференциального уравнения:

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворяющего **начальному условию:**

$$y(x_0) = y_0$$

где x_0 и y_0 - заданные числа, называется **задачей Коши** для уравнения первого порядка.

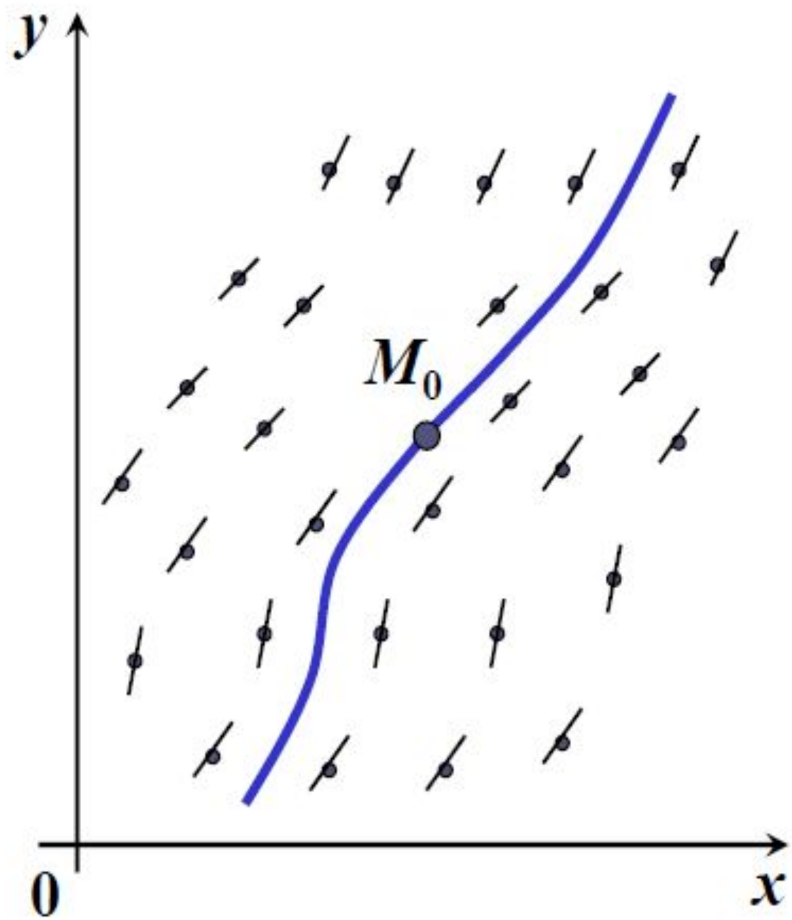
[redacted]

Геометрический смысл

Решить задачу Коши

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

означает **найти интегральную кривую** дифференциального уравнения, проходящую через заданную точку M_0 (x_0, y_0).



[redacted]

Пример Найти общее решение уравнения $(x^2-x)y'+y=$ $=x^2(2x-1)$.
Решить задачу Коши при начальном условии $y(-2)=2$.

▶ Приведем данное уравнение к виду разделив обе его части на $x^2-x\neq 0$. Получим

$$y'+\frac{y}{x^2-x}=\frac{x^2(2x-1)}{x^2-x}.$$

Здесь

$$P(x)=\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)},\ Q(x)=\frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)}=\frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Общее решение исходного уравнения в соответствии с формулой имеет вид

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\int\frac{dx}{x(x-1)}}dx+C\right).$$

Найдем входящие в это решение интегралы. Имеем:

$$\int\frac{dx}{x(x-1)}=\left|\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)},\ A=-1,\ B=1\right|=\int\left(-\frac{1}{x}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\ln|x-1|=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|,$$

$$\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}dx=\int\frac{x(2x-1)}{x-1}\left|\frac{x-1}{x}\right|dx=\pm\int(2x-1)dx=$$
$$=\pm(x^2-x),$$

где знаки «+» и «−» появляются в силу равенства $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \pm\frac{x-1}{x}$.

Подставляя найденые интегралы в решение окончательно получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}(\pm(x^2-x)+C) = \left|\frac{x}{x-1}\right|(\pm(x^2-x)+C) =$$

$$= \pm\frac{x}{x-1}(\pm x(x-1)+C) = x^2+\frac{Cx}{x-1}.$$

Из него выделяем частное решение, соответствующее начальному условию $y(-2)=2$:

$$2 = 4-\frac{2C}{-2-1},\ C=-3,\ y = x^2-\frac{3x}{x-1}.\ ◄$$

Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение, в котором путем преобразований переменные могут быть разделены, называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными**.

Его можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Пример

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

Объяснение. Покажем, как можно разделить переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} \cdot y$$

$$f(x) \cdot g(y)$$

[redacted]

Пример

Требуется найти решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y(2) = 6$$

[redacted]

Решение

1. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

2. Теперь интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

Решение

3. Получаем:

$$\ln|y| = \ln|x+1| + \ln|C| = \ln|C(x+1)|$$

$$y = C(x+1)$$

4. По начальному условию определяем значение константы:

$$6 = C(2+1) \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

Ответ. Решение дифференциального уравнения:

$$y = 2(x+1)$$

[redacted]

Проверка

Действительно ли уравнение:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

имеет в качестве решения функцию:

$$y = 2(x+1)$$

Проверка.

$$y' = (2(x+1))' = 2 = \frac{2(x+1)}{x+1}$$

Однородное и неоднородное уравнения

Если функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется **однородным**, в противном – **неоднородным**.

$y' + f(x) \cdot y = 0$	$y' + f(x) \cdot y = g(x)$
Однородное уравнение	**Неоднородное уравнение**

Линейное однородное уравнение решается методом разделения переменных. Линейное неоднородное уравнение решается методом вариации постоянных.

Пример

Решить линейное однородное уравнение:

$$y' + x^2 \cdot y = 0$$

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^3}{3} + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$

Проверьте ответ!

Метод вариации постоянной

1. В методе вариации постоянной сначала находится решение однородного уравнения:

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

2. Затем полагают постоянную C новой неизвестной функцией от x: $C = C(x)$ и находят общее решение неоднородного уравнения:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Пример

Решить линейное неоднородное уравнение:

$$xy' - 2y = 2x^2$$

Решение. 1. Поделим на x:

$$y' - 2\frac{y}{x} = 2x$$

2. Решаем однородное уравнение:

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0$$

Решение

3. Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

4. Интегрируем:

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C| = \ln Cx^2$$

$$y = Cx^2$$

5. Полагаем постоянную новой неизвестной функцией:

$$y = C(x) \cdot x^2$$

Решение

6. Подставляем в уравнение в п.1. и получим:

$$C'(x) \cdot x^2 = 2x^2$$

7. Отсюда находим $C(x)$:

$$C(x) = 2x + C_1$$

8. **Ответ**. Получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = (2x + C_1) \cdot x^2$$

[redacted]

Пример Проинтегрировать уравнение

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

методом Бернулли и решить задачу Коши при начальном условии $y(\pi) = 1$.

► Сделав подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим:

$$u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \ (v' + v \operatorname{tg} x)u + u'v = \frac{1}{\cos x}.$$

Находим частное решение уравнения $v' + v \operatorname{tg} x = 0$:

$$dv + v \operatorname{tg} x dx = 0, \ \frac{dv}{v} + \operatorname{tg} x dx = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int \operatorname{tg} x dx = 0, \ \ln |v| - \ln |\cos x| = \ln C_1.$$

Полагая $C_1 = 1$, выбираем частное решение $v = \cos x$. Далее ищем общее решение уравнения $u'v = 1/\cos x$, где $v = \cos x$. Имеем:

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ u = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C = \operatorname{tg} x + C.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = uv = (\operatorname{tg} x + C) \cos x.$$

Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi)=1$: $1=(0+C)(-1)$, откуда $C=-1$. Подставляя значение $C=-1$ в общее решение, получаем частное решеине исходного уравнения:

$$y=(\operatorname{tg} x-1)\cos x=\sin x-\cos x. \blacktriangleleft$$

Пример Найти общее решение уравнения Бернулли $y' + 2e^x y = 2e^x\sqrt{y}$.

▶ Так как для данного уравнения $\alpha = 1/2$, можно сделать замену $z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y}$. Согласно уравнеиию получим уравнение $z' + e^x z = e^x$, общее решеиие которого в соответствии имеет вид

$$z = e^{-\int e^x dx}\left(\int e^x e^{\int e^x dx} dx + C\right) =$$
$$= e^{-e^x}\left(\int e^x e^{e^x} dx + C\right) = e^{-e^x}\left(\int e^{e^x} de^x + C\right) =$$
$$= e^{-e^x}(e^{e^x} + C) = 1 + Ce^{-e^x}.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = z^2 = (1 + Ce^{-e^x})^2. ◀$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения $(x^2+y-4)dx+$ $+(x+y+e^y)dy=0$.

▶ Введем обозначения $P=x^2+y-4$, $Q=x+y+e^y$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$, т. е. условие выполнено, то данное уравнение является уравненим в полных дифференциалах. Его общий интеграл можно найти по формуле или положив для простоты $x_0=0$, $y_0=0$. Выбор этих значений x_0, y_0 допустим, так как функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные определены, т. е. точка $M_0(0, 0)\in D$. По формуле имеем

$$\int_0^x (x^2+0-4)dx+\int_0^y (x+y+e^y)dy=C,$$

$$\frac{x^3}{3}-4x+xy+\frac{y^2}{2}+e^y-1=C.$$

По формуле получаем общий интеграл:

$$\int_0^x (x^2+y-4)dx+\int_0^y (0+y+e^y)dy=C,$$

$$\frac{x^3}{3}+xy-4x+\frac{y^2}{2}+e^y-1=C,$$

который совпадает с уже найденным. ◀

Самостоятельная работа

1. 1. Является ли функция $y = Cx + 1/C$ решением дифференциального уравнения $xy' - y + 1/y = 0$? (*Ответ*: нет.)

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $4(x^2y + y)dy + \sqrt{5 + y^2}\,dx = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = \pm\frac{1}{16}(C - \right.$ $\left. - \operatorname{arctg} x)^2 - 5.\right)$

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $xy' = x \sin\frac{y}{x} + y$, $y(2) = \pi$. (*Ответ*: $y = 2x \operatorname{arctg}(x/2)$.)

2. 1. Является ли функция $y = y(x)$, заданная неявно уравнением $e^{y/x} = Cy$, интегралом дифференциального уравнения $xyy' - y^2 = x^2y'$? (*Ответ*: да.)