Семинар 4

доцент   Волков Н.П.

Занятие 4

Прямая на плоскости

Определение 1 Прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ ортогонально вектору $\vec{n} = \{A\ B\}$ будем называть г.м.т. $M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$. При этом $\vec{n}$ называется нормалью к прямой l.

$$l: \ \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \iff A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$$

Определение 2. 1) Уравнение прямой l в виде: $Ax + By + D = 0$ $(A^2+B^2 \neq 0)$ называется общим уравнением прямой на плоскости

2) Уравнение $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ называется уравнением прямой l на плоскости в отрезках.

Определение 3. Уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{\tau} = \{\lambda, \mu\}$ вида:

$$l: \ \frac{x-x_0}{\lambda} = \frac{y-y_0}{\mu}$$ называется каноническим уравнением, а вектор $\vec{\tau}$ — направляющим вектором.

214) Найти точку пересечения прямых:
$l_1: 3x-4y-29=0$ и $l_2: 2x+5y+19=0$

Решение: $\begin{cases} 3x-4y=29 \\ 2x+5y=-19 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 5 \\ \cdot 4 \end{vmatrix} + \Rightarrow 23x=69$

$\Rightarrow x=3 \Rightarrow -4y=20 \Rightarrow y=-5$

$\boxed{M_0(3;-5)}$

217) $l_1: x+5y-7=0$, $l_2: 3x-2y-4=0$,
$l_3: 7x+y+19=0$ – прямые, на которых лежат стороны треугольника ABC.
Найти $S_{\triangle ABC}$ – ?

Решение: Вершины $\triangle ABC$?

$l_1 \cap l_2 = A \Rightarrow \begin{cases} x+5y-7=0 \\ 3x-2y-4=0 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 5 \end{vmatrix} + \Rightarrow 17x=34$

$x=2 \Rightarrow 5y=7-2=5 \quad y=1 \Rightarrow A(2;1)$

$l_2 \cap l_3 = B \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y-4=0 \\ 7x+y+19=0 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{vmatrix} + \Rightarrow 17x=-34$

$x=-2 \Rightarrow -2y=4+6 \Rightarrow y=-5 \Rightarrow B(-2;-5)$

$l_1 \cap l_3 = C \Rightarrow \begin{cases} x+5y-7=0 \\ 7x+y+19=0 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot -5 \end{vmatrix} + \Rightarrow -34x=102$

$x=-3 \Rightarrow 5y=10 \Rightarrow y=2 \Rightarrow C(-3;2)$

$\Rightarrow \vec{AB}=\{-4;-6;0\}$, $\vec{AC}=\{-5;1;0\}$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -6 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-34\vec{k}|=\boxed{17}$

223| Дана прямая $\ell: 2x+3y+4=0$

1) $\ell_1 - ?$: $\ell_1 \ni M_0(2;1)$ и $\ell_1 \parallel \ell$.

Решение: $\vec{n}_1 = \vec{n} = \{2;3\}$

$\Rightarrow \ell_1: 2(x-2)+3(y-1)=0 \Rightarrow \ell_1: \boxed{2x+3y-7=0}$

2) $\ell_2 - ?$: $\ell_2 \ni M_0(2;1)$ и $\ell_2 \perp \ell$.

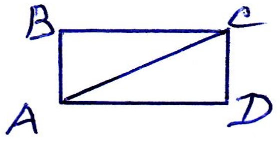
Решение: $\vec{\tau}_2 = \vec{n} = \{2;3\}$

$\Rightarrow$ каноническое уравнение:

$\ell_2: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} \Rightarrow 3(x-2)=2(y-1)$

$\Rightarrow \ell_2: \boxed{3x-2y-4=0}$.

225| Дан прямоугольник ABCD:



AB: $x-2y=0$

CD: $x-2y+15=0$

AC: $7x+y-15=0$

Решение: A-? $\begin{cases} x-2y=0 & \cdot 1 \\ 7x+y-15=0 & \cdot 2 \end{cases} + \Rightarrow 15x=30$

$x=2 \Rightarrow 2-2y=0 \quad y=1 \Rightarrow \boxed{A(2;1)}$

C-? $\begin{cases} x-2y+15=0 & \cdot 1 \\ 7x+y-15=0 & \cdot 2 \end{cases} + \Rightarrow 15x=15 \Rightarrow x=1$

$1-2y+15=0 \Rightarrow y=8 \Rightarrow \boxed{C(1;8)}$.

B-? BC: $BC \perp AB \Rightarrow \vec{\tau}_{BC} = \vec{n}_{AB} = \{1;-2\}$

BC: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-8}{-2} \Rightarrow -2(x-1) = y-8 \Rightarrow 2x+y-10=0$

$\Rightarrow B: \begin{cases} x-2y=0 & \cdot 1 \\ 2x+y-10=0 & \cdot 2 \end{cases} + \Rightarrow 5x=20 \Rightarrow x=4$

$4-2y=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow \boxed{B(4;2)}$.

$D-?$ AD: $AD \parallel BC \Rightarrow \vec{n}_{AD} = \vec{n}_{BC} = \{2;1\}$

$\Rightarrow AD: 2(x-2)+(y-1)=0 \Rightarrow 2x+y-5=0$

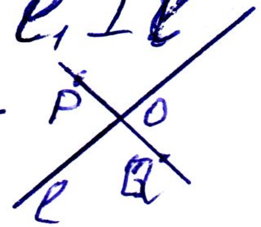
$D: \begin{cases} x-2y+15=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{vmatrix} + \Rightarrow 5x=-5 \Rightarrow x=-1$

$-1-2y+15=0 \Rightarrow 2y=14 \quad y=7$

$\boxed{D(-1;7)}$.

227) Q - точка симметричная точке $P(-5;13)$ относительно прямой $l: 2x-3y-3=0$

Решение: Построим l_1: $l_1 \ni P$ и $l_1 \perp l$



$\vec{\tau}_1 = \vec{n} = \{2,-3\} \Rightarrow l_1: \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-13}{-3}$

$\Rightarrow l_1: 3x+2y-11=0$

$O = l \cap l_1 \Rightarrow O: \begin{cases} 2x-3y-3=0 \\ 3x+2y-11=0 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{vmatrix} + \Rightarrow 13x=39$

$\Rightarrow x=3, \quad 6-3y-3=0 \Rightarrow y=1$

$O(3;1)$

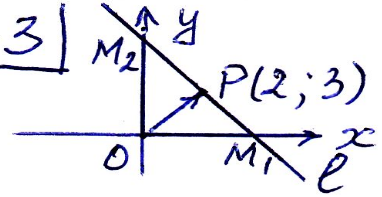
Формулы для средней точки: $\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_P+x_Q}{2} \\ y_0 = \dfrac{y_P+y_Q}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow x_Q = 2x_0 - x_P = 6+5 = 11$

$y_Q = 2y_0 - y_P = 2-13 = -11$

$\boxed{Q(11;-11)}$

233



$l - ?$

$\vec{n} = \vec{OP} = \{2;3\}$

$l: 2(x-2) + 3(y-3) = 0$

$l: \boxed{2x + 3y - 13 = 0}$

239 $l - ?$ $l \ni M_1(-1;2)$, $l \ni M_2(2;3)$

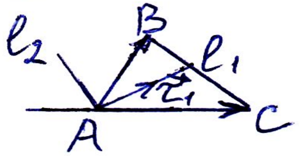
Решение $\vec{\tau} = \vec{M_1M_2} = \{3;1\}$

$l: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow l: x - 3y + 7 = 0$

$Ox: y = 0 \Rightarrow M_1(-7;0)$

$Oy: x = 0 \Rightarrow M_2(0;\frac{7}{3})$

245 $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$



Решение $\vec{AB} = \{4;6\}$

$\vec{AC} = \{-3;2\}$

$\vec{e}_{\vec{AB}} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{52}}\{4;6\} = \frac{1}{\sqrt{13}}\{2;3\}$

$\vec{e}_{\vec{AC}} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{13}}\{-3;2\}$

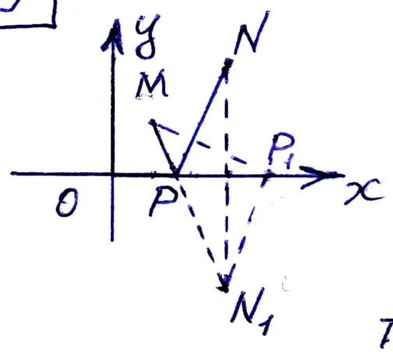
$\vec{\tau}_1 = \vec{e}_{\vec{AB}} + \vec{e}_{\vec{AC}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\{-1;5\} \Rightarrow \vec{\tau}_1' = \{-1;5\}$

$l_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow l_1: \boxed{5x + y - 3 = 0}$

$l_2: \ l_2 \perp l_1 \Rightarrow \vec{n}_2 = \vec{\tau}_1' = \{-1;5\}$

$\Rightarrow l_2: -(x-1) + 5(y+2) = 0 \quad \boxed{l_2: x - 5y - 11 = 0}$

249



$M(1;2)$, $N(3;4)$

P – ?

$MP + PN \to \min$

Решение

точка N_1 – симметричная точка для N относительно оси Ox.

$\Rightarrow N_1(3;-4)$

l: $\vec{\tau} = \overrightarrow{MN_1} = \{2;-6\}$

$\Rightarrow \vec{l}: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-6} \Rightarrow \vec{l}: 3x + y - 5 = 0$

$P = l \cap Ox \Rightarrow P: \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

$\boxed{P\left(\frac{5}{3};0\right)}$

Дома: К.210, 216, 224, 226, 230, 243, 247, 251.