

# Семинар 4

доцент Волков Н.П.

# Занятие 4

## Прямая на плоскости

Определение 1 Прямой на плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  ортогонально вектору  $\vec{n} = \{A, B\}$  будем называть г.м.т.  $M(x, y) \in \mathbb{R}^2: \vec{M_0M} \perp \vec{n}$ . При этом  $\vec{n}$  называется нормалью к прямой  $l$ .

$$l: \vec{n} \cdot \vec{M_0M} = 0 \Leftrightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$$

Определение 2. 1) Уравнение прямой  $l$  в виде:  $Ax + By + D = 0$  ( $A^2 + B^2 \neq 0$ ) называется общим уравнением прямой на плоскости

2) Уравнение  $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  называется уравнением прямой  $l$  на плоскости в отрезках.

Определение 3. Уравнение прямой  $l$ , проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  параллельно вектору  $\vec{\tau} = \{\lambda, \mu\}$  вида:  
 $l: \frac{x-x_0}{\lambda} = \frac{y-y_0}{\mu}$  называется каноническим уравнением, а вектор  $\vec{\tau}$  - направляющим вектором.

214) Найти точку пересечения прямых:

$$l_1: 3x - 4y - 29 = 0 \text{ и } l_2: 2x + 5y + 19 = 0$$

Решение: 
$$\begin{cases} 3x - 4y = 29 & | \cdot 5 \\ 2x + 5y = -19 & | \cdot 4 \end{cases} + \Rightarrow 23x = 69$$

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow -4y = 20 \Rightarrow y = -5$$

$$M_0(3; -5)$$

217)  $l_1: x + 5y - 7 = 0$ ,  $l_2: 3x - 2y - 4 = 0$ ,  
 $l_3: 7x + y + 19 = 0$  - прямые, на которых  
лежат стороны треугольника ABC.  
Найти  $S_{\Delta ABC}$ ?

Решение: Вершины  $\Delta ABC$ ?

$$l_1 \cap l_2 = A \Rightarrow \begin{cases} x + 5y - 7 = 0 & | \cdot 2 \\ 3x - 2y - 4 = 0 & | \cdot 5 \end{cases} + \Rightarrow 17x = 34$$

$$x = 2 \Rightarrow 5y = 7 - 2 = 5 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(2; 1)$$

$$l_2 \cap l_3 = B \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 & | \cdot 1 \\ 7x + y + 19 = 0 & | \cdot 2 \end{cases} + \Rightarrow 17x = -34$$

$$x = -2 \Rightarrow -2y = 4 + 6 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow B(-2; -5)$$

$$l_1 \cap l_3 = C \Rightarrow \begin{cases} x + 5y - 7 = 0 & | \cdot 1 \\ 7x + y + 19 = 0 & | \cdot (-5) \end{cases} + \Rightarrow -34x = 102$$

$$x = -3 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow C(-3; 2)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = \{-4; -6; 0\}, \vec{AC} = \{-5; 1; 0\}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -6 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-34\vec{k}| = \boxed{17}$$

223) Дана прямая  $l: 2x+3y+4=0$

1)  $l_1$ -? :  $l_1 \ni M_0(2; 1)$  и  $l_1 \parallel l$ .

Решение:  $\vec{n}_1 = \vec{n} = \{2; 3\}$

$$\Rightarrow l_1: 2(x-2)+3(y-1)=0 \Rightarrow l_1: \boxed{2x+3y-7=0}$$

2)  $l_2$ -? :  $l_2 \ni M_0(2; 1)$  и  $l_2 \perp l$ .

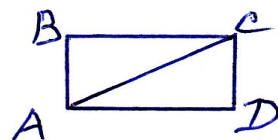
Решение:  $\vec{\tau}_2 = \vec{n} = \{2; 3\}$

$\Rightarrow$  каноническое уравнение:

$$l_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow 3(x-2) = 2(y-1)$$

$$\Rightarrow l_2: \boxed{3x-2y-4=0}$$

225) Дан прямоугольник ABCD:



$$AB: x-2y=0$$

$$CD: x-2y+15=0$$

$$AC: 7x+y-15=0$$

Решение: A-?  $\begin{cases} x-2y=0 \\ 7x+y-15=0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array} \Rightarrow 15x=30$

$$x=2 \Rightarrow 2-2y=0 \quad y=1 \Rightarrow \boxed{A(2; 1)}$$

C-?  $\begin{cases} x-2y+15=0 \\ 7x+y-15=0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array} \Rightarrow 15x=15 \Rightarrow x=1$

$$1-2y+15=0 \Rightarrow y=8 \Rightarrow \boxed{C(1; 8)}$$

B-? BC:  $BC \perp AB \Rightarrow \vec{\tau}_{BC} = \vec{n}_{AB} = \{1; -2\}$

$$BC: \frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{-2} \Rightarrow -2(x-1) = y-8 \Rightarrow 2x+y-10=0$$

$\Rightarrow B: \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y-10=0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array} \Rightarrow 5x=20 \Rightarrow x=4$

$$4-2y=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow \boxed{B(4; 2)}$$

$$D-? \quad AD: AD \parallel BC \Rightarrow \vec{n}_{AD} = \vec{n}_{BC} = \{2; 1\}$$

$$\Rightarrow AD: 2(x-2) + (y-1) = 0 \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

$$D: \begin{cases} x - 2y + 15 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array} + \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1$$

$$-1 - 2y + 15 = 0 \Rightarrow 2y = 14 \quad y = 7$$

$$\boxed{D(-1; 7)}$$

227] Q - точка симметричная точке P(-5; 13) относительно прямой l: 2x - 3y - 3 = 0

Решение: Построим  $l_1: l_1 \ni P$  и  $l_1 \perp l$

$$\vec{c}_1 = \vec{n} = \{2, -3\} \Rightarrow l_1: \frac{x+5}{2} = \frac{y-13}{-3}$$

$$\Rightarrow l_1: 3x + 2y - 11 = 0$$

$$O = l \cap l_1 \Rightarrow O: \begin{cases} 2x - 3y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} + \Rightarrow 13x = 39$$

$$\Rightarrow x = 3, \quad 6 - 3y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$$

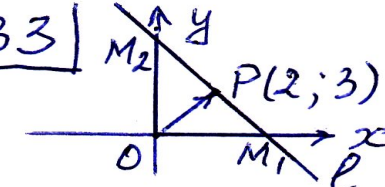
$$O(3; 1)$$

$$\text{Формулы для средней точки: } \begin{cases} x_0 = \frac{x_p + x_q}{2} \\ y_0 = \frac{y_p + y_q}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_q = 2x_0 - x_p = 6 + 5 = 11$$

$$y_q = 2y_0 - y_p = 2 - 13 = -11$$

$$\boxed{Q(11; -11)}$$

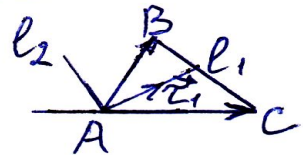
233 |   $l - ?$   
 $\vec{n} = \vec{OP} = \{2; 3\}$   
 $l: 2(x-2) + 3(y-3) = 0$   
 $l: \boxed{2x + 3y - 13 = 0}$

239 |  $l - ?$   $l \ni M_1(-1; 2), l \ni M_2(2; 3)$   
 Решение  $\vec{\tau} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{3; 1\}$

$l: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow l: x - 3y + 7 = 0$

$0x: y = 0 \Rightarrow M_1(-7; 0)$   
 $0y: x = 0 \Rightarrow M_2(0; \frac{7}{3})$

245 |  $A(1; -2), B(5; 4), C(-2; 0)$



Решение  $\vec{AB} = \{4; 6\}$   
 $\vec{AC} = \{-3; 2\}$

$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{52}} \{4; 6\} = \frac{1}{\sqrt{13}} \{2; 3\}$

$\vec{e}_{AC} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \{-3; 2\}$

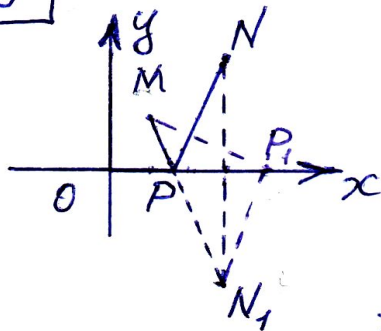
$\vec{\tau}_1 = \vec{e}_{AB} + \vec{e}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{13}} \{-1; 5\} \Rightarrow \vec{\tau}'_1 = \{-1; 5\}$

$l_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow l_1: \boxed{5x + y - 3 = 0}$

$l_2: l_2 \perp l_1 \Rightarrow \vec{n}_2 = \vec{\tau}'_1 = \{-1; 5\}$

$\Rightarrow l_2: -(x-1) + 5(y+2) = 0 \Rightarrow \boxed{l_2: x - 5y - 11 = 0}$

249



$$M(1;2), N(3;4)$$

P-?

$$MP + PN \rightarrow \min$$

Решение

Точка  $N_1$  - симметричная

точка для N относительно оси Ox.

$$\Rightarrow N_1(3; -4)$$

$$l: \vec{r} = \overrightarrow{MN_1} = \{2; -6\}$$

$$\Rightarrow l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-6} \Rightarrow l: 3x + y - 5 = 0$$

$$P = l \cap Ox \Rightarrow P: \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{P\left(\frac{5}{3}; 0\right)}$$

---

Дома: К. 210, 216, 224, 226, 230, 243, 247, 251.