

Операции над графами

Преподаватель: Солодухин Андрей
Геннадьевич

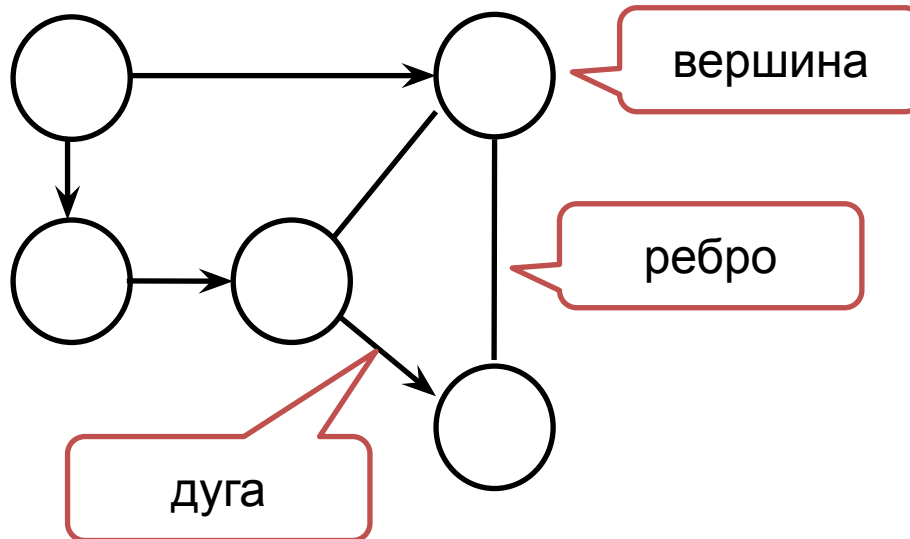
План

1. Бинарные операции.
2. Унарные операции.

ПОВТОРЕНИЕ

Геометрическое представление графа — это схемы, состоящие из точек и соединяющих эти точки отрезков прямых или кривых

Графом $G(V, E)$ называется **совокупность** двух множеств — непустого множества V (**множества вершин**) и множества E (**множество рёбер**)



СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ГРАФОВ

Способы описания графов

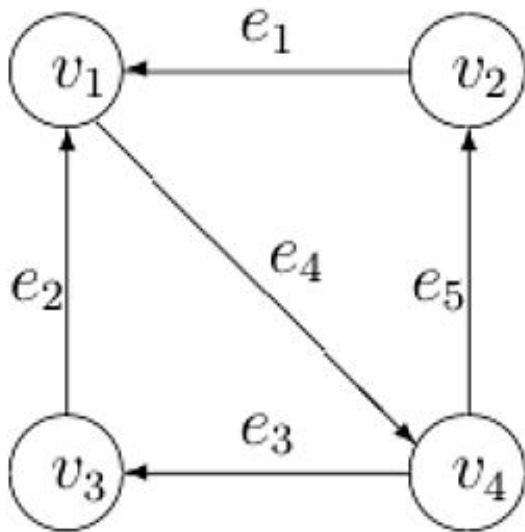
Перечисление элементов

Изображение

Матрица смежности

Матрица инциденций

Списки смежности



$$G = (V, E)$$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

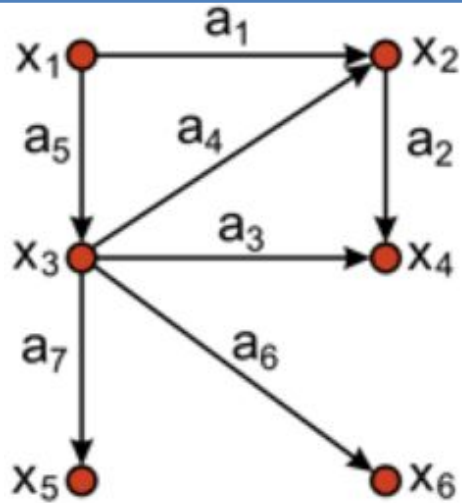
$$e_1 = (v_2, v_1); e_2 = (v_3, v_1);$$

$$e_3 = (v_4, v_3); e_4 = (v_1, v_4);$$

$$e_5 = (v_4, v_2);$$

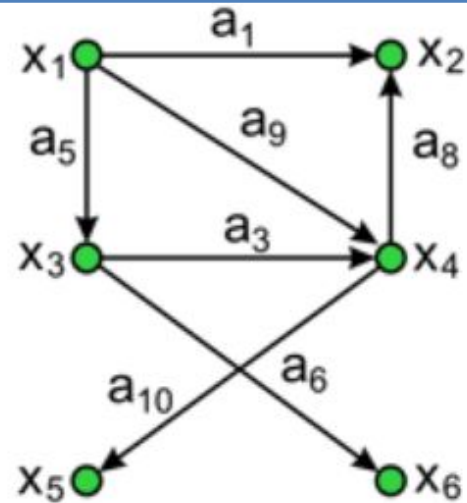
ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

Исходные графы



$A_1 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4						
x_5						
x_6						



$A_2 =$

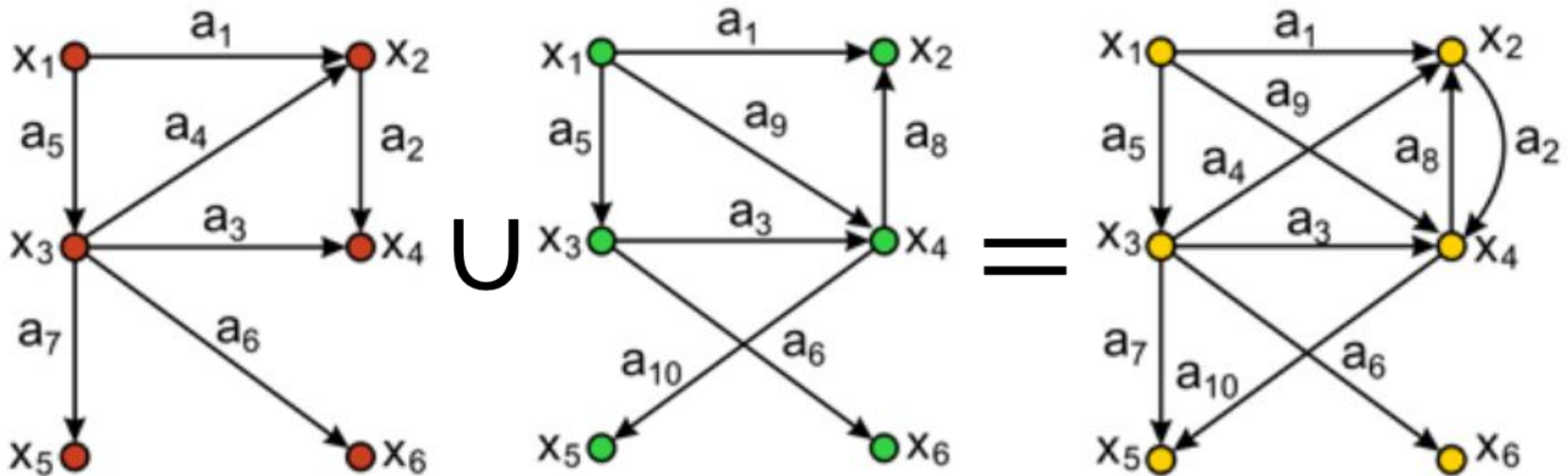
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2						
x_3				1		1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

Различают **бинарные** и **унарные** операции

ОБЪЕДИНЕНИЕ ГРАФОВ

$$G_3 = (X_1 \cup X_2; A_1 \cup A_2)$$

Множество вершин результата – объединение множеств вершин исходных графов, множество ребер – объединение множеств ребер исходных графов



Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Например, если $A=\{1,2,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

ОБЪЕДИНЕНИЕ ГРАФОВ

При объединении графов матрица смежности результата получается операцией поэлементного логического сложения матриц смежности исходных графов G_1 и G_2 .

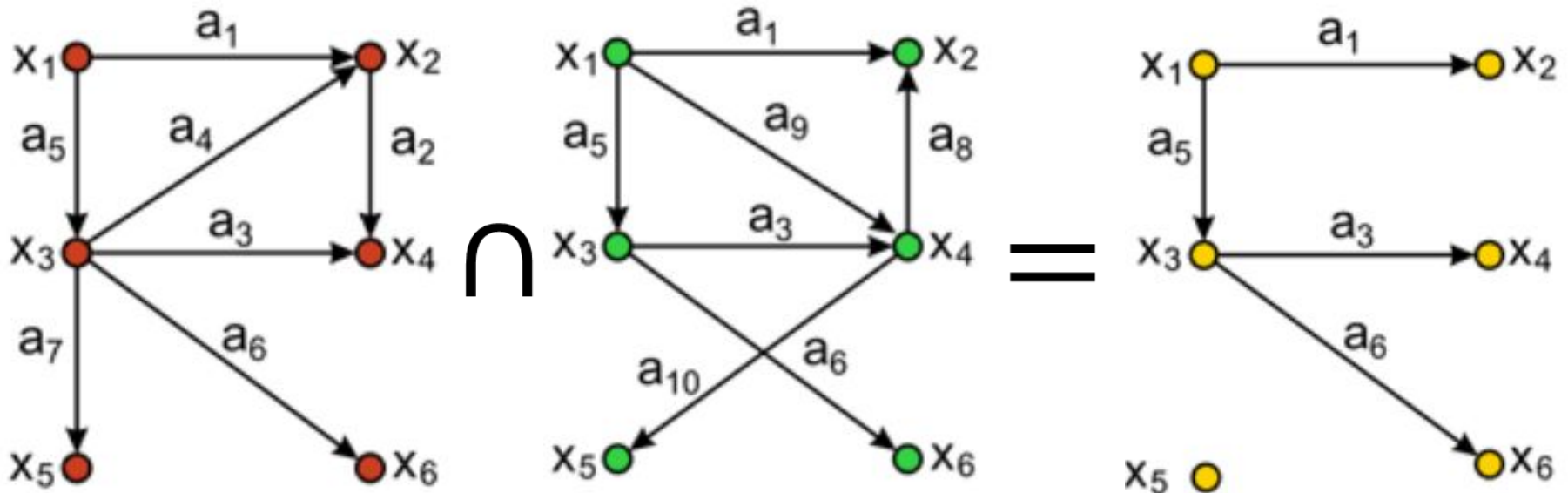
$$A_1 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}; A_2 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_3 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАФОВ

$$G_4 = (X_1 \cap X_2; A_1 \cap A_2)$$

множество вершин графа G_4 состоит из вершин, присутствующих одновременно в G_1 и G_2



Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A , так и множеству B . Например, если $A=\{1,2,4\}$, $B=\{3,4,5,2\}$, то $A \cap B = \{2,4\}$

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАФОВ

результатирующая матрица смежности получается операцией поэлементного логического умножения матриц смежности исходных графов G_1 и G_2

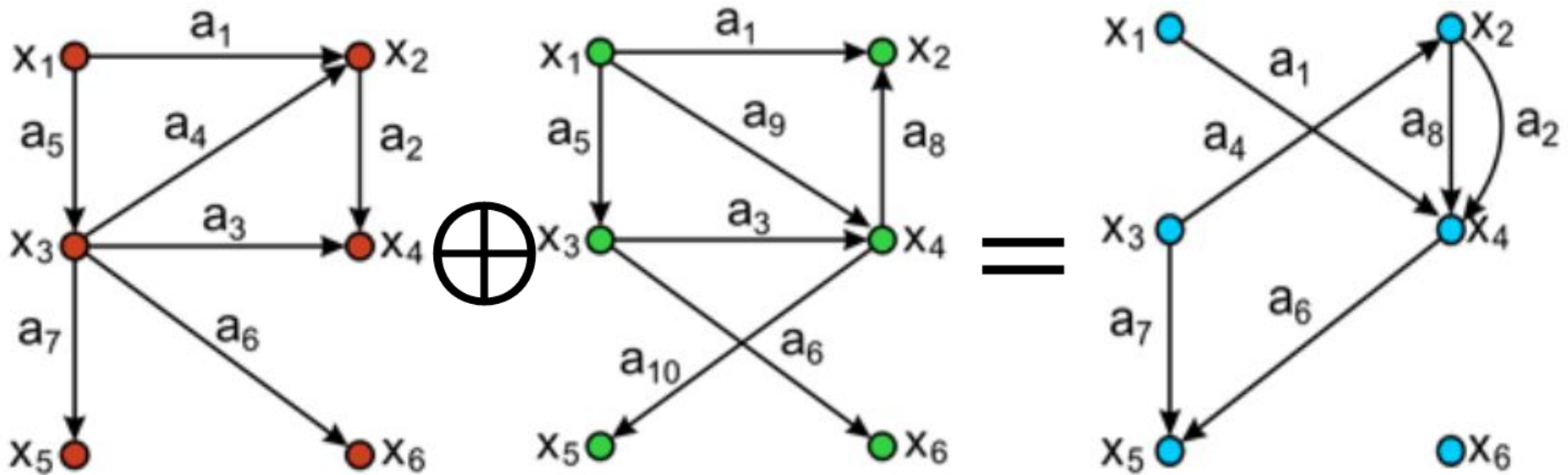
$$A_1 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}; A_2 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_3 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

КОЛЬЦЕВАЯ СУММА ГРАФОВ

$$G_5 = (X_1 \cup X_2; A_1 \oplus A_2)$$

граф G_5 состоит только из ребер, присутствующих либо в G_1 , либо в G_2 , но не в обоих одновременно



Кольцевой суммой множеств A и B называют множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B или принадлежат множеству B , но не принадлежат множеству A .

КОЛЬЦЕВАЯ СУММА ГРАФОВ

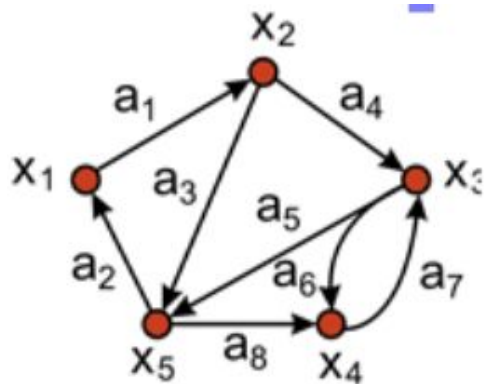
результатирующая матрица смежности получается операцией поэлементного логического сложения матриц смежности исходных графов

$$A_1 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}; A_2 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_3 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

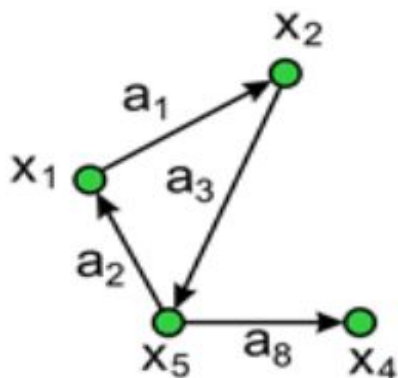
x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

УДАЛЕНИЕ ВЕРШИНЫ



$$\begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & & 1 & & & \\ x_2 & & & 1 & & 1 \\ x_3 & & & & 1 & 1 \\ x_4 & & & 1 & & \\ x_5 & 1 & & & 1 & \end{pmatrix}$$

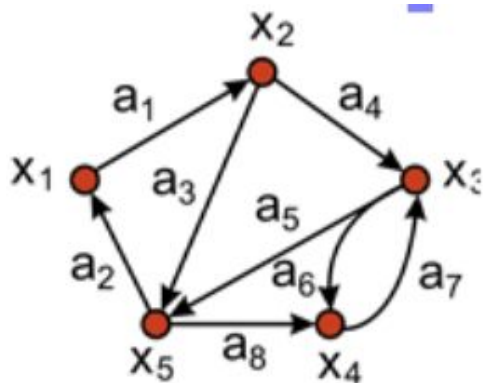
Результат - граф, получившимся после удаления из графа G вершины x_3 и всех ребер, инцидентных этой вершине



$$\begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \\ x_1 & & 1 & & \\ x_2 & & & & 1 \\ x_4 & & & & \\ x_5 & 1 & & 1 & \end{pmatrix}$$

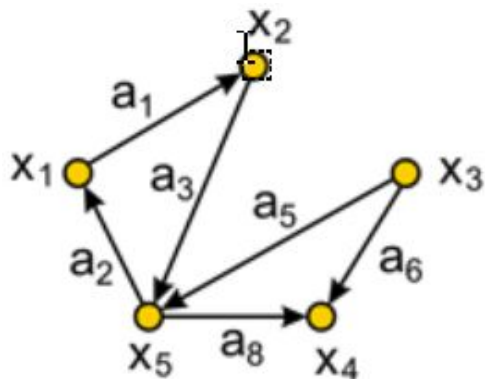
Удалена вершина x_3 , в матрице смежности удалены строка 3 и столбец 3

УДАЛЕНИЕ РЕБРА ИЛИ ДУГИ



$$\begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & & 1 & & & \\ x_2 & & & 1 & & 1 \\ x_3 & & & & 1 & 1 \\ x_4 & & & 1 & & \\ x_5 & 1 & & & 1 & \end{pmatrix}$$

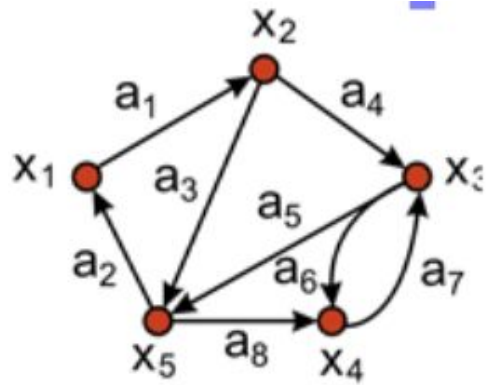
Концевые вершины удаляемого ребра **НЕ УДАЛЯЮТСЯ**



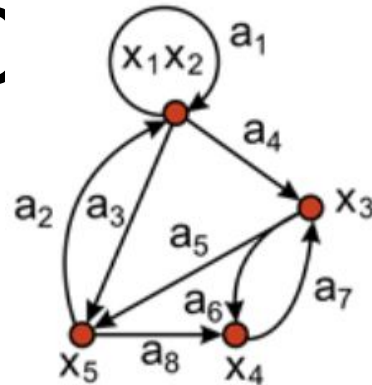
$$\begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & & 1 & & & \\ x_2 & & & & & 1 \\ x_3 & & & & 1 & 1 \\ x_4 & & & & & \\ x_5 & 1 & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Удалены дуги a_4 и a_7 , в матрице смежности элементы A_{23}, A_{43}

ЗАМЫКАНИЕ



\equiv С



ИЕ)

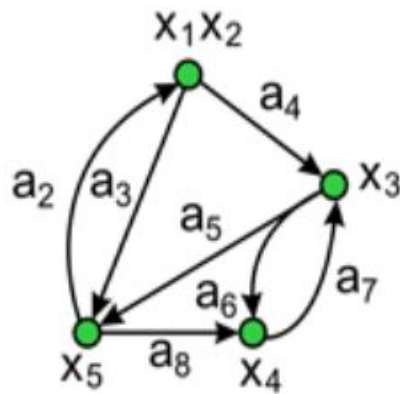
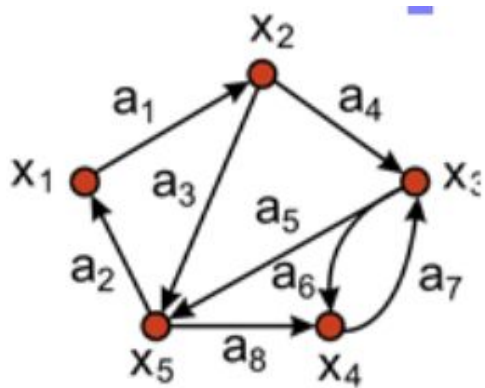
$$\begin{pmatrix} x_{1-2} & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_{1-2} & 1 & 1 & & 1 \\ x_3 & & & 1 & 1 \\ x_4 & & 1 & & \\ x_5 & 1 & & 1 & \end{pmatrix}$$

пара вершин x_i и x_j в графе G замыкается (или отождествляется), если они заменяются такой новой вершиной, что все дуги в графе G , инцидентные x_i и x_j , становятся инцидентными новой вершине

Замкнуты вершины x_1 и x_2 . Матрица смежности графа после выполнения операции замыкания вершин x_i и x_j получается путем поэлементного логического сложения i -го и j -го столбцов и i -ой и j -ой строк в исходной матрице и "сжимания" матрицы по вертикали и горизонтали

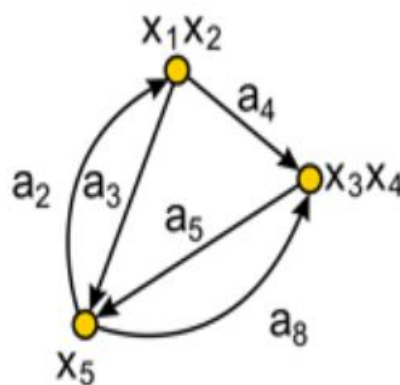
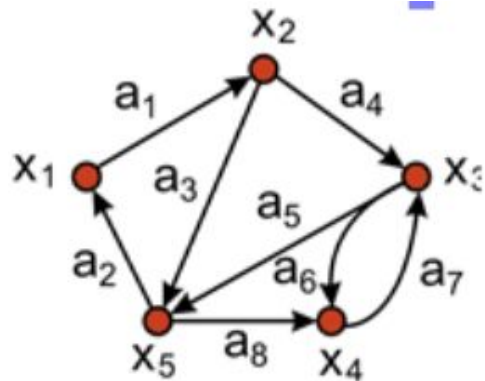
СТЯГИВАНИЕ

Под стягиванием подразумевают операцию удаления дуги или ребра и отождествление его концевых вершин



$$\begin{pmatrix} & x_{1-2} & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_{1-2} & & 1 & & 1 \\ x_3 & & & 1 & 1 \\ x_4 & & 1 & & \\ x_5 & 1 & & 1 & \end{pmatrix}$$

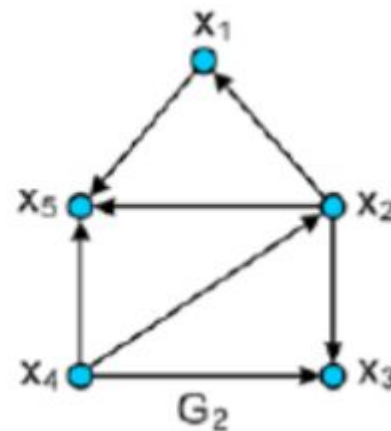
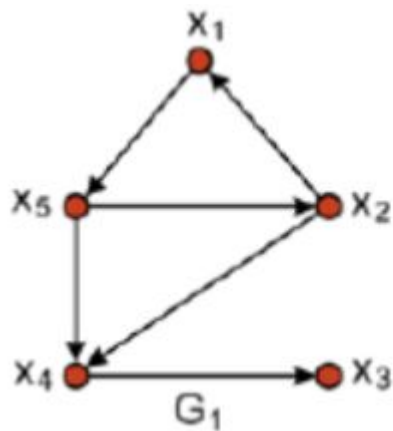
вверху – стягивание дуги a_1 , внизу – дуг a_1, a_6 и a_7



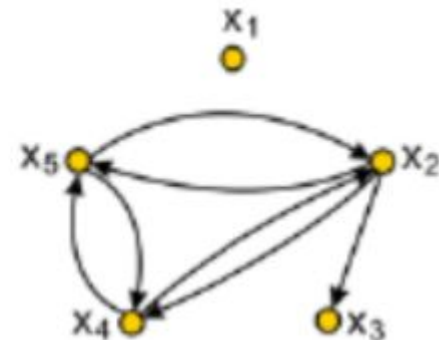
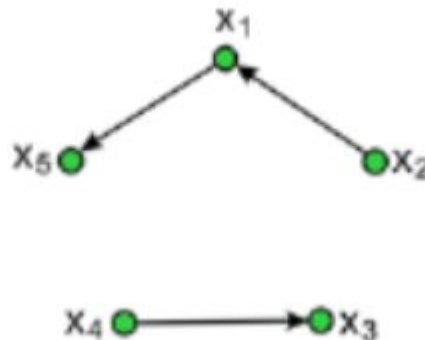
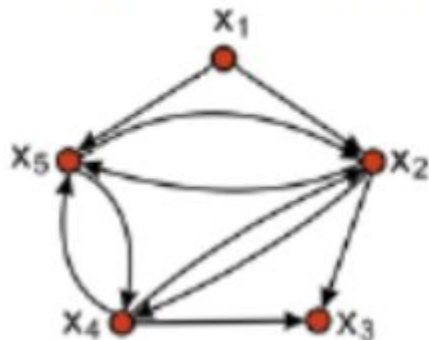
$$\begin{pmatrix} & x_{1-2} & x_{3-4} & x_5 \\ x_{1-2} & & 1 & 1 \\ x_{3-4} & & & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы

Выполнить операцию пересечения для графов, показанных на рисунке.



Варианты ответов:



Контрольные вопросы

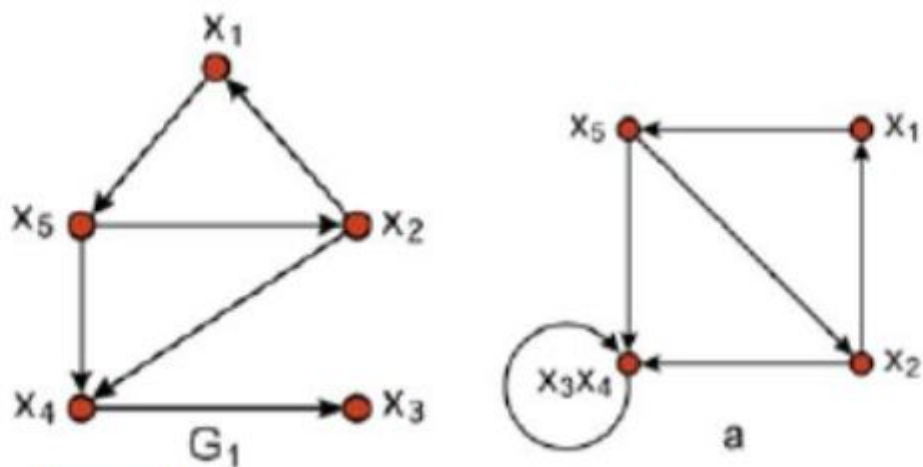
Выполнить операцию пересечения для графов, представленных матрицами смежности смежности.

$$G_1 \cap G_2$$

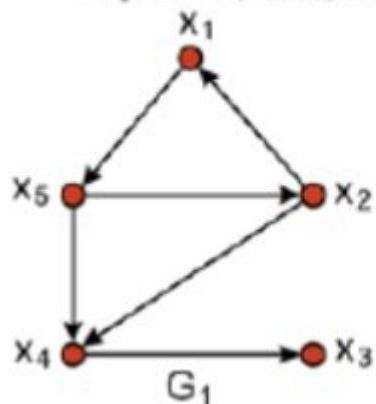
Матрица смежности G1					Матрица смежности G2						
	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
X ₁	0	0	0	0	1	X ₁	0	0	0	0	1
X ₂	1	0	0	1	0	X ₂	1	0	1	0	1
X ₃	0	0	0	0	0	X ₃	0	0	0	0	0
X ₄	0	0	1	0	0	X ₄	0	1	1	0	1
X ₅	0	1	0	1	0	X ₅	0	0	0	0	0

a						б					в					
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_1	0	0	0	0	1	X_1	0	0	0	0	X_1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	0	0	0	X_2	0	0	1	1	X_2	1	0	1	1	1
X_3	0	0	0	0	0	X_3	0	0	0	0	X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	0	1	0	0	X_4	0	1	0	0	X_4	0	1	1	0	1
X_5	0	0	0	0	0	X_5	0	1	0	1	X_5	0	1	0	1	0

3. Для графа G_1 , показанном на рисунке 1, выполнить операцию отождествления двух вершин (x_3, x_4) . Верно ли результат представлен на рис. 2а?

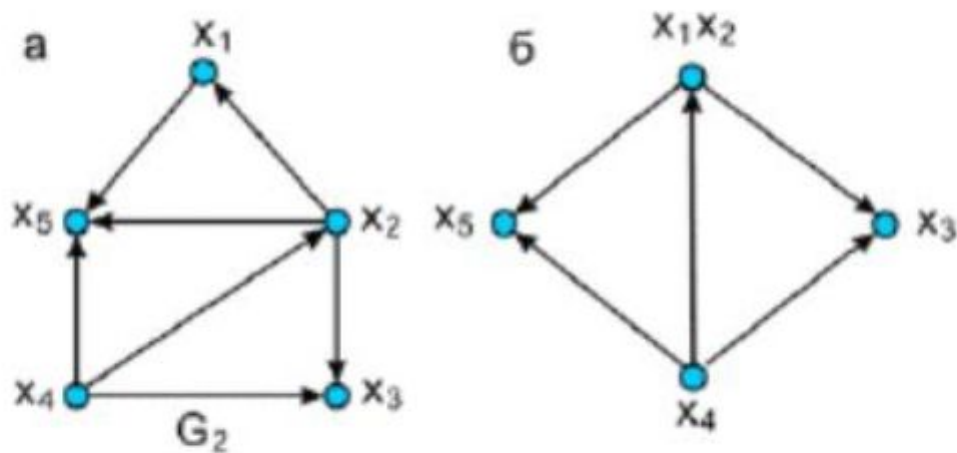


4. Для графа G_1 , показанном на рисунке 1, выполнить операцию отождествления двух вершин (x_1, x_2) . Верно ли результат представлен матрицей смежности ниже?



$$\begin{pmatrix} & x_{1-2} & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_{1-2} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Для графа G_1 , показанном на рисунке а, выполнить операцию стягивания двух вершин (x_1, x_2) . Верно ли результат представлен графом на рисунке б?



6. В графе G_6 , показанном на рис. 1 удалить вершину x_2 . Результат представлен в матричном виде ниже



а	б	в
$x_2 \ x_3$	$x_1 \ x_2$	$x_1 \ x_3$
$x_2 \ 0 \ 1$	$x_1 \ 0 \ 1$	$x_1 \ 0 \ 1$
$x_2 \ 1 \ 0$	$x_2 \ 1 \ 0$	$x_3 \ 1 \ 0$

7. В графе G_6 , показанном на рис. 1 удалить вершину x_3 . Результат представлен в матричном виде ниже



	а		б		в			
	x_2	x_3	x_1	x_2	x_1	x_3		
x_2	0	1	x_1	0	1	0		
x_3	1	0	x_2	1	0	x_3	1	0

8. В графе G_6 , показанном на рис. 1 удалить дугу (x_1, x_3) . Результат представлен ниже в матричном виде



	а			б			в		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
x_1	1	1	1	x_1	1	1	x_1	1	1
x_2	1	1	1	x_2	1	1	x_2	1	1
x_3	1	1	1	x_3	1	1	x_3	1	1

9. В графе G_6 , показанном на рис. 1 удалить дугу (x_1, x_2) . Результат представлен ниже в матричном виде



а			б			в		
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
x_1	1	1	x_1	1		x_1	1	
x_2	1	1	x_2	1	1	x_2	1	1
x_3	1		x_3	1	1	x_3	1	1

Источники информации

- [Программирование, компьютеры и сети](https://progr-system.ru/)
<https://progr-system.ru/>

Благодарю за внимание!