Операции над графами

Преподаватель: Солодухин Андрей Геннадьевич

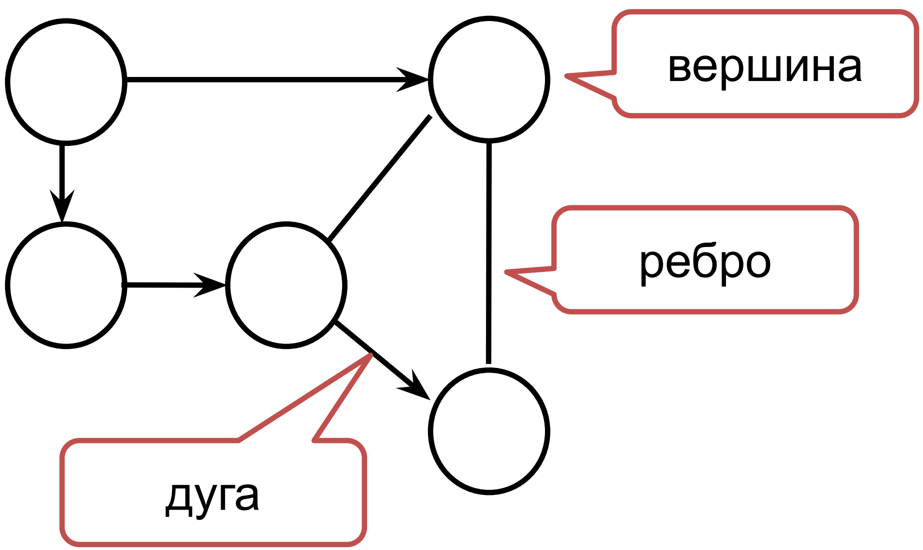
План

1. Бинарные операции.
2. Унарные операции.

ПОВТОРЕНИЕ

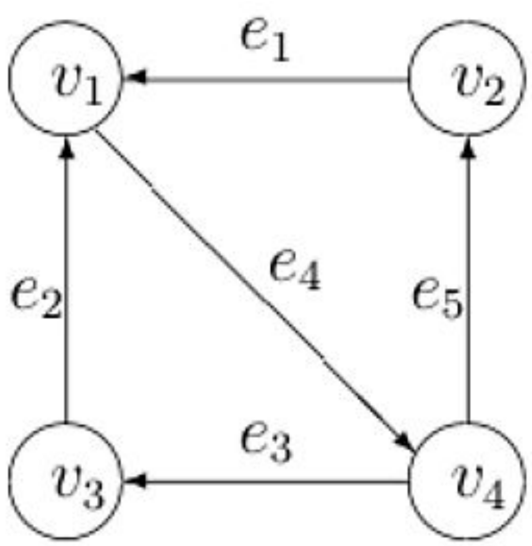
Геометрическое представление графа — это схемы, состоящие из точек и соединяющих эти точки отрезков прямых или кривых

Графом **G(V, E)** называется **совокупность** двух множеств — непустого множества **V (множества вершин)** и множества **E (множество рѐбер)**



СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ГРАФОВ

Способы описания графов
Перечисление элементов
Изображение
Матрица смежности
Матрица инциденций
Списки смежности

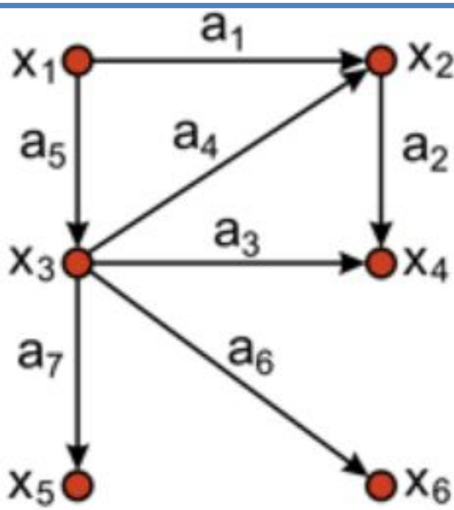


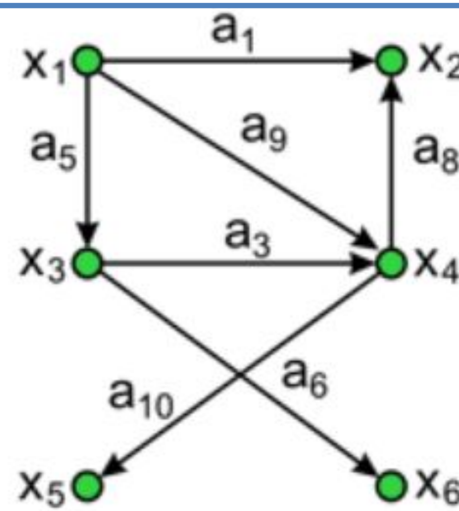
$$G = (V, E)$$
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$e_1 = (v_2, v_1);\ e_2 = (v_3, v_1);$$
$$e_3 = (v_4, v_3);\ e_4 = (v_1, v_4);$$
$$e_5 = (v_4, v_2);$$

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

Исходные графы





$A_1 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4						
x_5						
x_6						

$A_2 =$

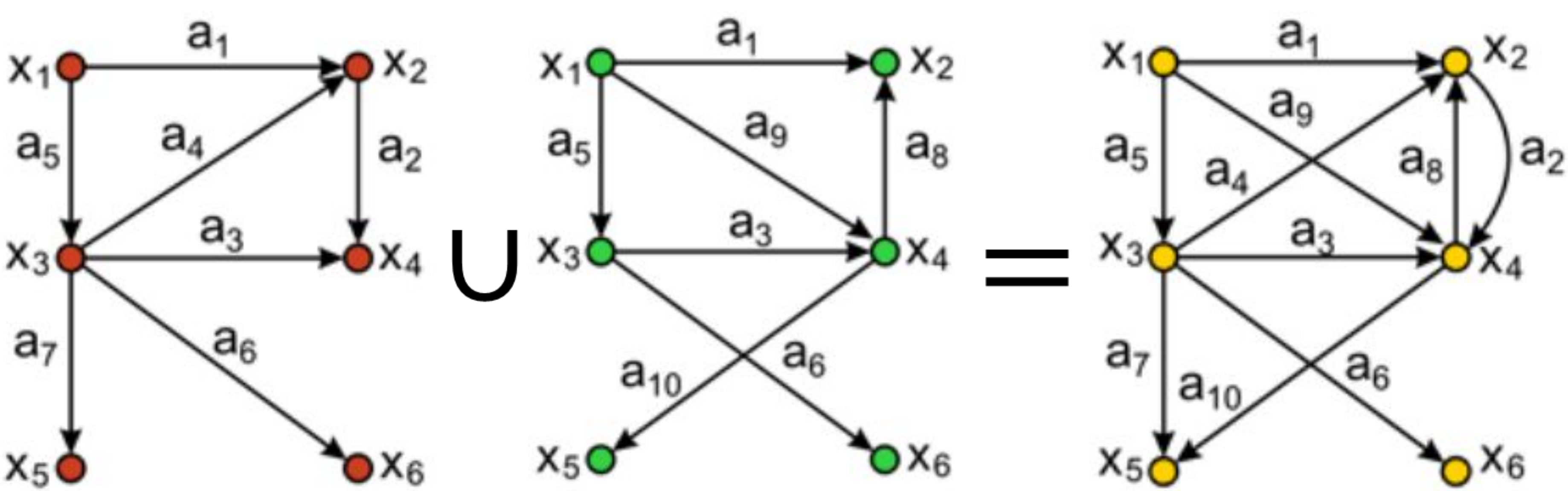
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2						
x_3				1		1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

Различают **бинарные** и **унарные** операции

ОБЪЕДИНЕНИЕ ГРАФОВ

$$G_3 = (X_1 \cup X_2; A_1 \cup A_2)$$

Множество вершин результата – объединение множеств вершин исходных графов, множество ребер – объединение множеств ребер исходных графов



Объединением (суммой) множеств A и B называется множество A ∪ B, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то A ∪ B = {1,2,3,4,5,6}

ОБЪЕДИНЕНИЕ ГРАФОВ

При объединении графов матрица смежности результата получается операцией поэлементного логического сложения матриц смежности исходных графов G_1 и G_2 .

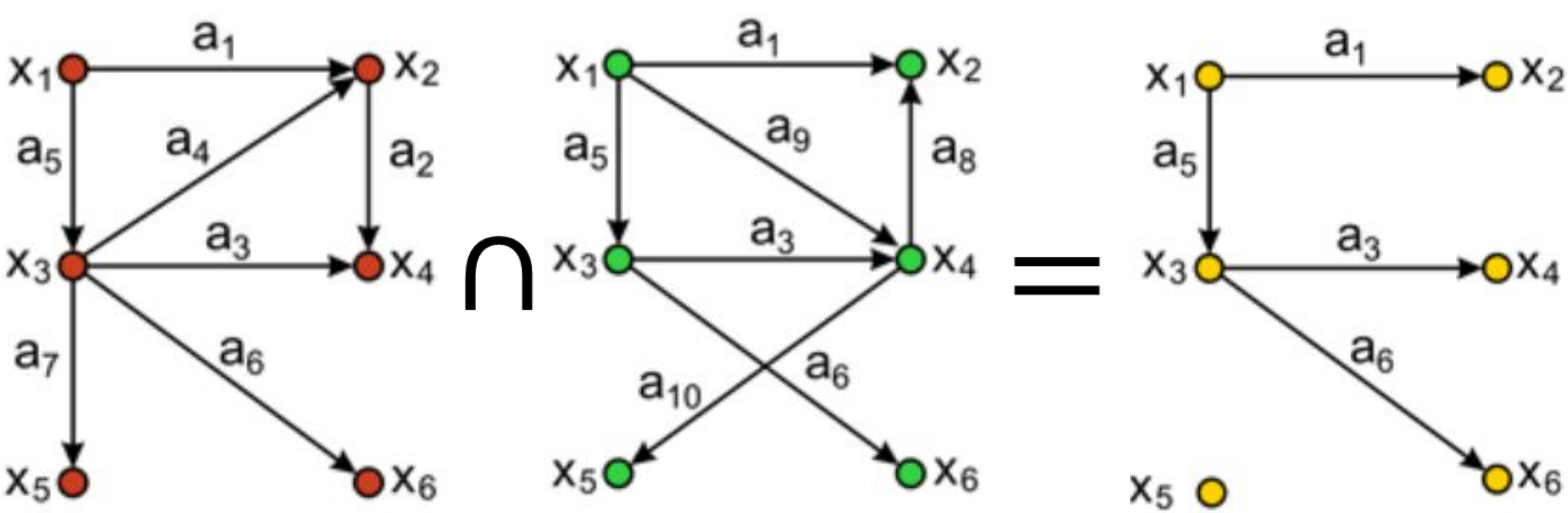
$$A_1 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array} ; A_2 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}$$

$$A_3 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}$$

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАФОВ

$$G_4 = (X_1 \cap X_2; A_1 \cap A_2)$$

множество вершин графа G_4 состоит из вершин, присутствующих одновременно в G_1 и G_2



Пересечением (произведением) множеств А и В называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В. Например, если $A=\{1,2,4\}$, $B=\{3,4,5,2\}$, то $A \cap B = \{2,4\}$

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАФОВ

результирующая матрица смежности получается операцией поэлементного логического умножения матриц смежности исходных графов G_1 и G_2

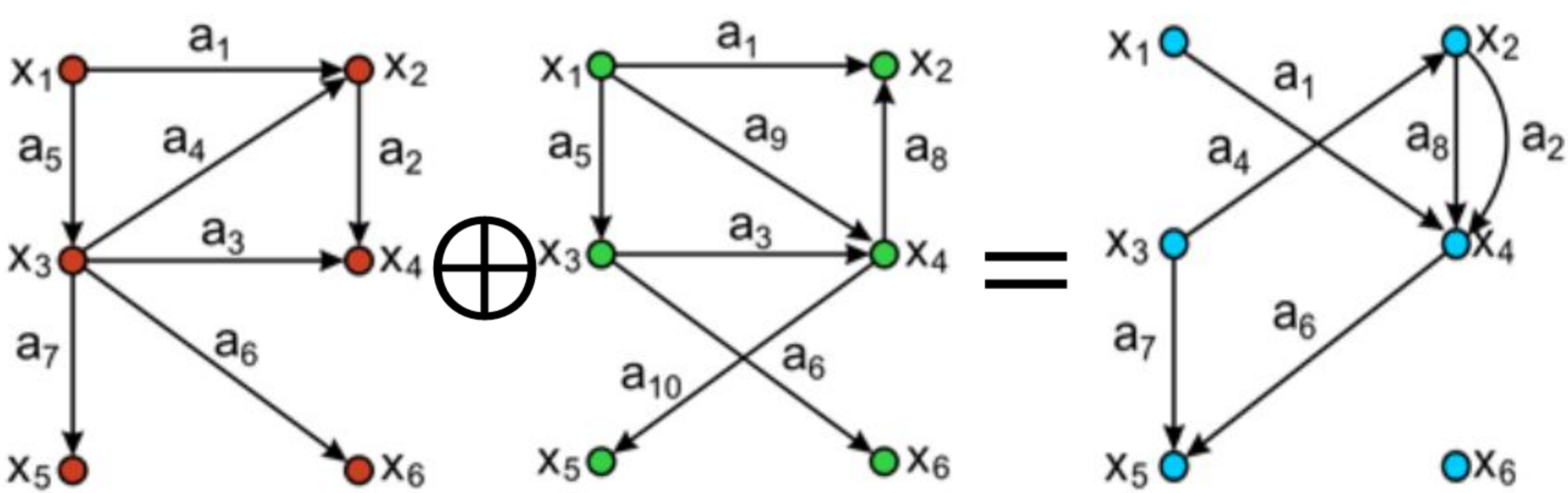
$$A_1 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}; A_2 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}$$

$$A_3 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}$$

КОЛЬЦЕВАЯ СУММА ГРАФОВ

$$G_5 = (X_1 \cup X_2; A_1 \oplus A_2)$$

граф G_5 состоит только из ребер, присутствующих либо в G_1 , либо в G_2 , но не в обоих одновременно



Кольцевой суммой множеств А и В называют множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству **А**, но не принадлежат множеству **В** или принадлежат множеству **В**, но не принадлежат множеству **А**.

КОЛЬЦЕВАЯ СУММА ГРАФОВ

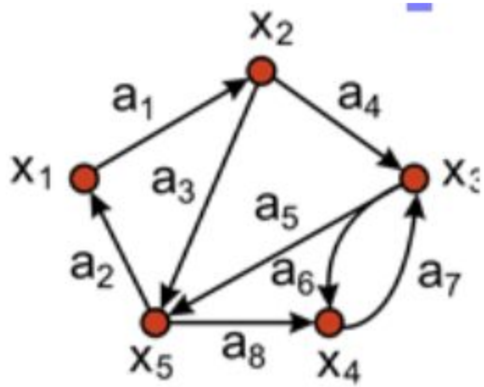
результирующая матрица смежности получается операцией поэлементного логического сложения матриц смежности исходных графов

$$A_1 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} ; A_2 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_3 = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

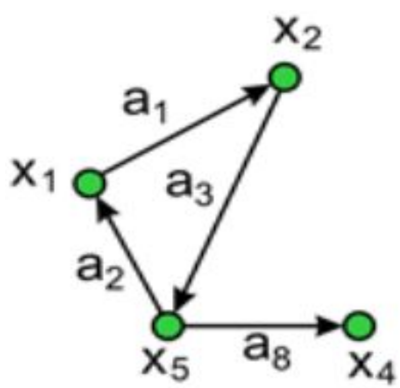
x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

УДАЛЕНИЕ ВЕРШИНЫ



$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & 1 & & \\ 1 & & & 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

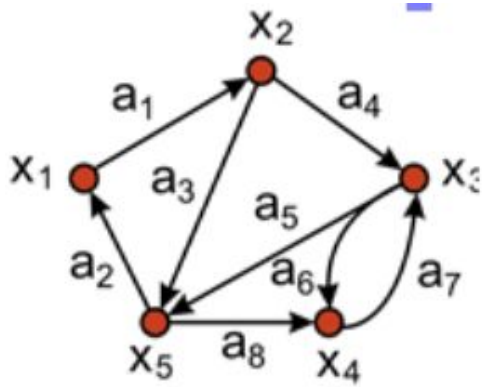
Результат - граф, получившимся после удаления из графа G вершины x_i **и всех ребер, инцидентных этой вершине**



$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & & \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

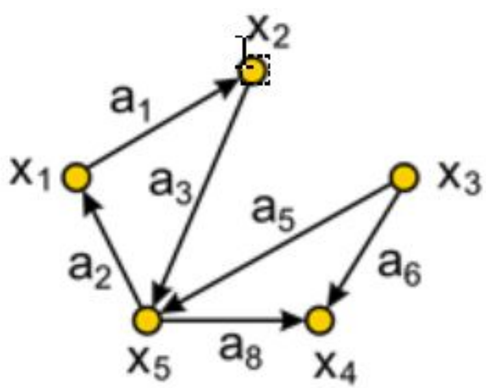
Удалена вершина x_3, в матрице смежности удалены строка 3 и столбец 3

УДАЛЕНИЕ РЕБРА ИЛИ ДУГИ



$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
\hline
x_1 & & 1 & & & \\
x_2 & & & 1 & & 1 \\
x_3 & & & & 1 & 1 \\
x_4 & & & 1 & & \\
x_5 & 1 & & & 1 &
\end{array}
$$

Концевые вершины удаляемого ребра **НЕ УДАЛЯЮТСЯ**

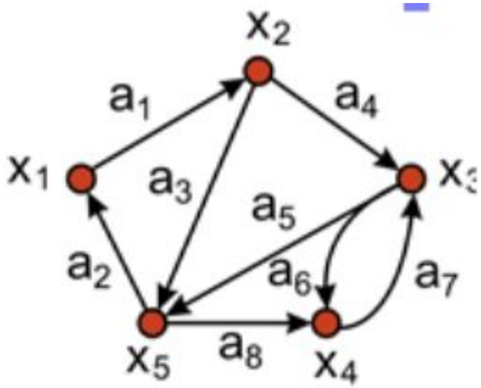


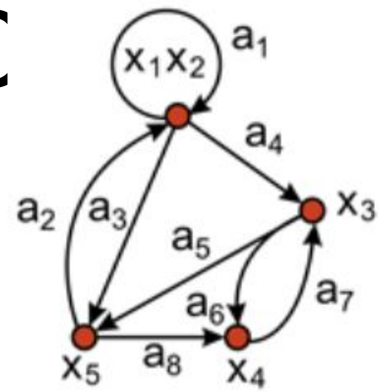
$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
\hline
x_1 & & 1 & & & \\
x_2 & & & & & 1 \\
x_3 & & & & 1 & 1 \\
x_4 & & & & & \\
x_5 & 1 & & & 1 &
\end{array}
$$

Удалены дуги a_4 и a_7, в матрице смежности элементы A_{23}, A_{43}

ЗАМЫКАНИЕ

ЕС ИЕ)





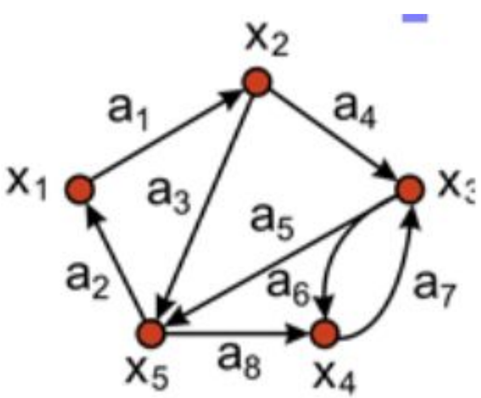
$$\begin{array}{c} \\ x_{1-2} \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_{1-2} & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

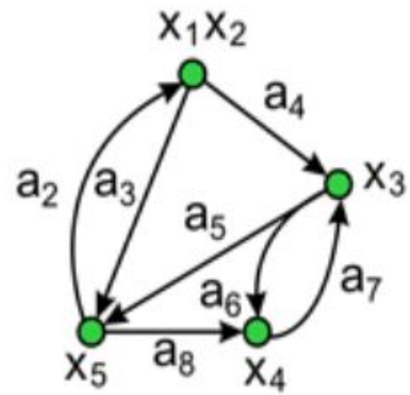
пара вершин x_i и x_j в графе G замыкается (или отождествляется), если они заменяются такой новой вершиной, что все дуги в графе G, инцидентные x_i и x_j , становятся инцидентными новой вершине

Замкнуты вершины x_1 и x_2. Матрица смежности графа после выполнения операции замыкания вершин x_i и x_j получается путем поэлементного логического сложения i-го и j-го столбцов и i-ой и j-ой строк в исходной матрице и "сжимания" матрицы по вертикали и горизонтали

СТЯГИВАНИЕ

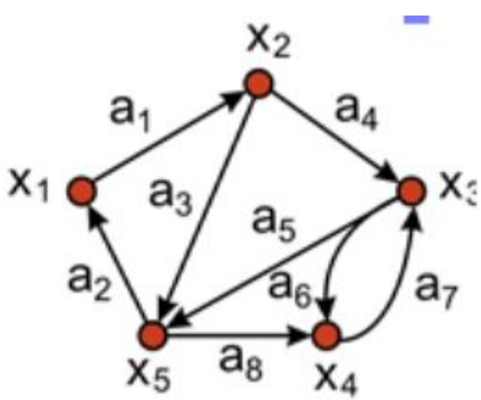
Под стягиванием подразумевают операцию удаления дуги или ребра и отождествление его концевых вершин

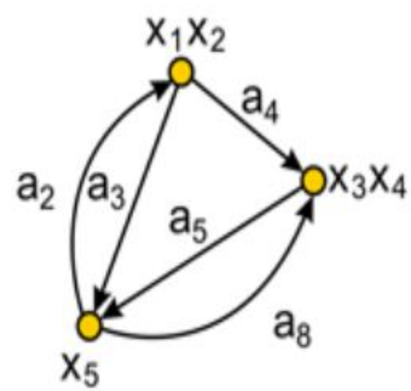




$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_{1-2} & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_{1-2} \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

вверху – стягивание дуги a_1, внизу – дуг a_1 , a_6 и a_7

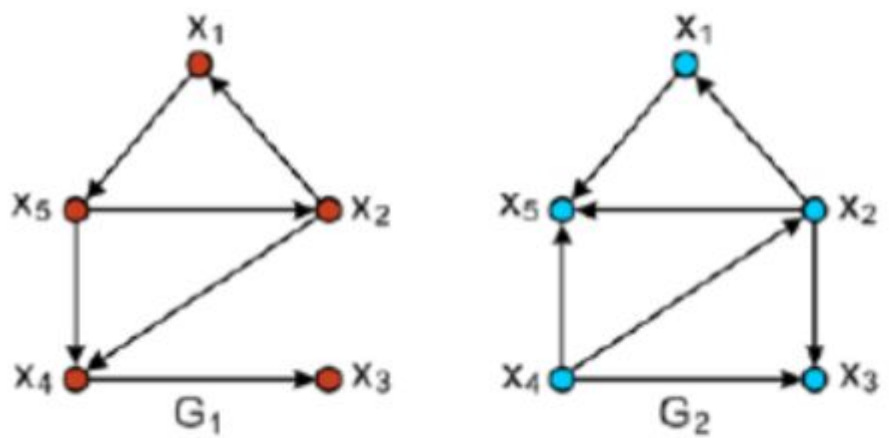




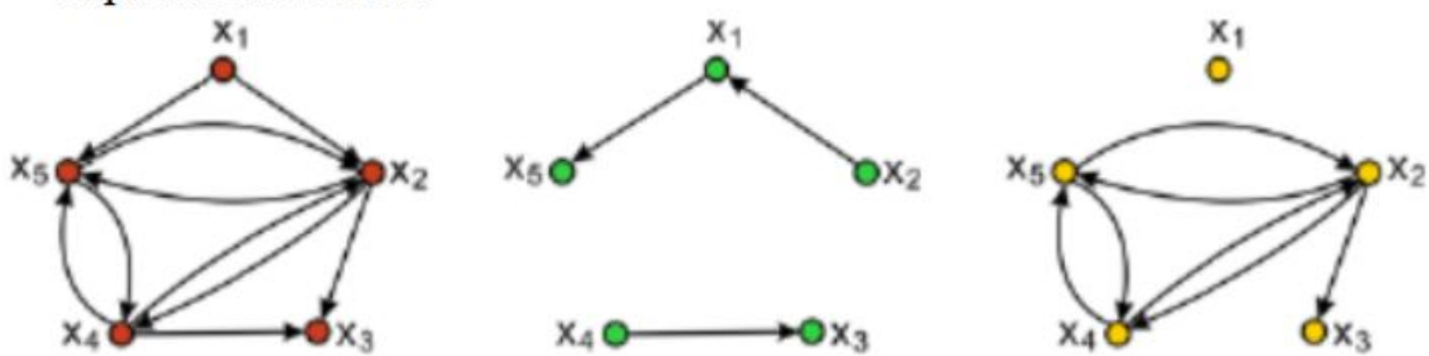
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_{1-2} & x_{3-4} & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_{1-2} \\ x_{3-4} \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & 1 & 1 \\ & & 1 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

Контрольные вопросы

Выполнить операцию пересечения для графов, показанных на рисунке.



Варианты ответов:



Контрольные вопросы

Выполнить операцию пересечения для графов, представленных матрицами смежности смежности. $G_1 \cap G_2$

Матрица смежности G1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	0	1	0
X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	0	1	0	0
X_5	0	1	0	1	0

Матрица смежности G2

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	1
X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	1	1	0	1
X_5	0	0	0	0	0

а

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	0	0	0
X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	0	1	0	0
X_5	0	0	0	0	0

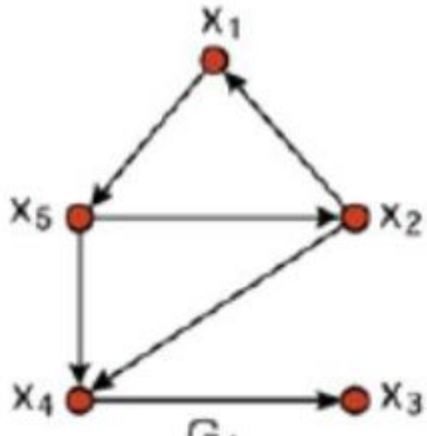
б

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	0
X_2	0	0	1	1	1
X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	1	0	0	1
X_5	0	1	0	1	0

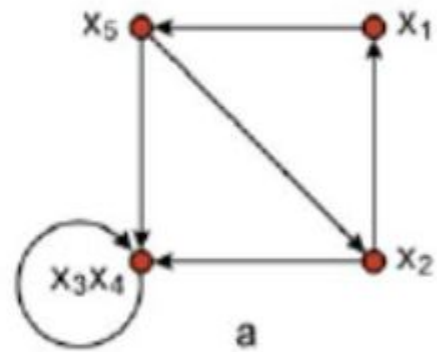
в

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	1	1
X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	1	1	0	1
X_5	0	1	0	1	0

3. Для графа G_1, показанном на рисунке 1, выполнить операцию отождествления двух вершин (x_3,x_4). Верно ли результат представлен на рис. 2а?

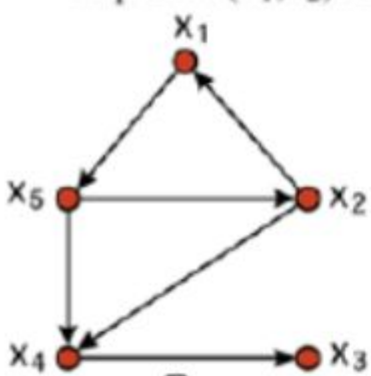


G_1



а

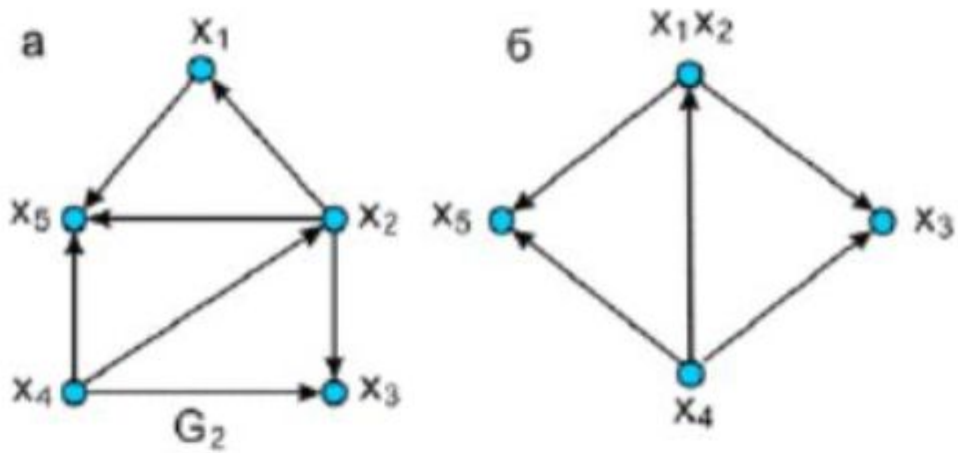
4. Для графа G_1, показанном на рисунке 1, выполнить операцию отождествления двух вершин (x_1,x_2). Верно ли результат представлен матрицей смежности ниже?



G_1

$$\begin{pmatrix} & x_{1-2} & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_{1-2} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Для графа G_1, показанном на рисунке а, выполнить операцию стягивания двух вершин (x_1,x_2). Верно ли результат представлен графом на рисунке б?



6. В графе G_6 , показанном на рис. 1 удалить вершину x_2. Результат представлен в матричном виде ниже

а

	X_2	X_3
X_2	0	1
X_2	1	0

б

	X_1	X_2
X_1	0	1
X_2	1	0

в

	X_1	X_3
X_1	0	1
X_3	1	0

7. В графе G_6 , показанном на рис. 1 удалить вершину x_3. Результат представлен в матричном виде ниже

а

	X_2	X_3
X_2	0	1
X_2	1	0

б

	X_1	X_2
X_1	0	1
X_2	1	0

в

	X_1	X_3
X_1	0	1
X_3	1	0

8. В графе G_6 , показанном на рис. 1 удалить дугу (x_1,x_3). Результат представлен ниже в матричном виде

а

	X_1	X_2	X_3
X_1		1	1
X_2	1		1
X_3	1		

б

	X_1	X_2	X_3
X_1			1
X_2	1		1
X_3	1	1	

в

	X_1	X_2	X_3
X_1		1	
X_2	1		1
X_3	1	1	

9. В графе G_6 , показанном на рис. 1 удалить дугу (x_1,x_2). Результат представлен ниже в матричном виде

а

	X_1	X_2	X_3
X_1		1	1
X_2	1		1
X_3	1		

б

	X_1	X_2	X_3
X_1			1
X_2	1		1
X_3	1	1	

в

	X_1	X_2	X_3
X_1		1	
X_2	1		1
X_3	1	1	

Источники информации

- [Программирование, компьютеры и сети](https://progr-system.ru/) https://progr-system.ru/

Благодарю за внимание!