

# ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## §1 Основные понятия

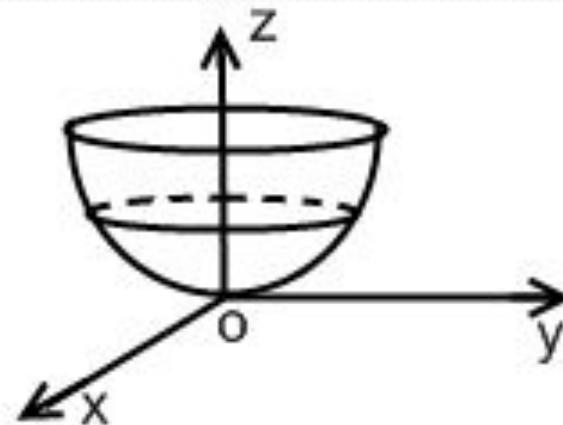
**Определение 1.** Пусть имеется  $n$  переменных величин, и каждому набору их значений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  некоторого множества  $X$  соответствует одно вполне определенное значение переменной величины  $z$ . Тогда говорят, что задана **функция нескольких переменных**

$$z=f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - **аргументы**,  
 $X$  - область определения функции.

**Определение 2.** Графиком функции нескольких переменных  $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется множество точек  $n+1$ -мерного пространства  $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ , последняя координата которых связана с остальными функциональным соотношением  $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



## §2 Предел и непрерывность функции нескольких переменных

**Определение 1.** Число  $A$  называется **пределом** функции  $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при  $x_1 \rightarrow a_1, x_2 \rightarrow a_2, \dots, x_n \rightarrow a_n$  (или в точке  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , найдется положительное число  $\delta > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$  ( $\delta = \delta(\varepsilon)$ ), такое, что для всех точек  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , отстоящих от точки  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  на расстояние  $\rho$  меньшее, чем  $\delta$  (т.е. при  $0 < \rho < \delta$ ), выполняется неравенство  $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$ .

## §3 Частные производные

$$z=f(x; y) \quad (x; y) \in D$$

$y = const$  приращение  $\Delta x$   $(x + \Delta x; y) \in D$

$\Delta_x f(x; y) = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$  - частное приращение  
функции  $f$  по переменной  $x$

$\Delta_y f(x; y) = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$  - частное приращение  
функции  $f$  по переменной  $y$

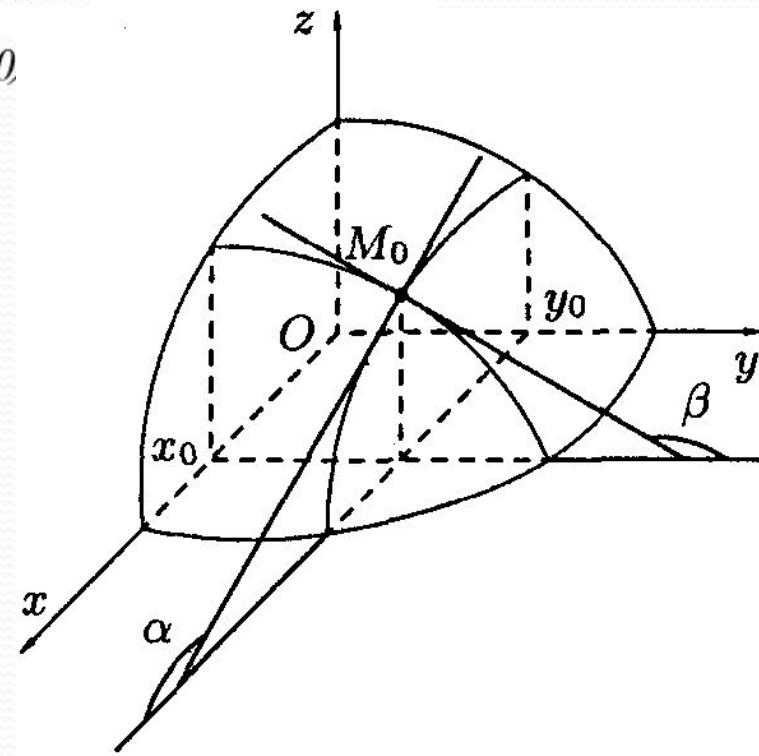
$\Delta f(x; y) = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$  – полное приращение  
функции  $f(x; y)$  в точке  $(x; y)$

**Определение 1.** Частной производной функции  $f(x;y)$  по переменной  $x$  (переменной  $y$ ) в точке  $M(x;y)$  называется предел  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$  ( $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$ ) (если он существует и конечен).

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{\partial f(M)}{\partial x}; \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}; f'_x(x;y); f'_x(M); z'_x; \frac{\partial z}{\partial x} \\ & \frac{\partial f(M)}{\partial y}; \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}; f'_y(x;y); f'_y(M); z'_y; \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}}$$

## Геометрический смысл частных производных

Если функция  $f(x; y)$  определяет поверхность  $z=f(x; y)$ , то значение производной  $f'_x(x; y)$  в точке  $M(x_0; y_0)$  равно тангенсу угла, образованного осью  $O_x$  и касательной к плоской кривой  $z=f(x; y_0)$  при  $x=x_0$ . (Кривая  $z=f(x; y_0)$  образуется как сечение поверхности  $z=f(x; y)$  плоскостью  $y=y_0$ )



**Физический смысл** частной производной  
 $\frac{\partial f(M)}{\partial x}$  ( $\frac{\partial f(M)}{\partial y}$ ) – это скорость изменения  
функции в точке  $M$  в направлении оси  $O_x$   
(в направлении оси  $O_y$ ).

## Частные производные второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

## §4 Дифференциал функции

*Определение 1.* Дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

$$df(x_1; \dots; x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

**Определение 2.** Функция  $z=f(x,y)$  называется дифференцируемой в точке  $(x,y)$ , если её полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где  $dz$  – дифференциал функции,

$\alpha=\alpha(\Delta x, \Delta y)$ ,  $\beta=\beta(\Delta x, \Delta y)$  – бесконечно малые при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Если  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  – дифференцируемые функции, то

$$1) \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$2) \quad d(uv) = u dv + v du;$$

$$3) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v(x,y) \neq 0).$$

*Теорема 1.* Если частные производные функции  $z=f(x,y)$  существуют в окрестности точки  $(x,y)$  и непрерывны в самой этой точке, то функция  $z=f(x,y)$  дифференцируема в этой точке.

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

## § 5. Производная по направлению. Градиент.

*Определение 1.* Если существует конечный предел

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M, M_0)}$$

при условии, что точка  $M$  стремится к точке  $M_0$  по лучу  $l$ ,  
то он называется производной функции  $f$  по направлению  $l$

в точке  $M_0$  и обозначается  $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$  или  $f'_l(M_0)$ .

*Теорема 1.* Функция  $f(x,y)$ , дифференцируемая в точке  $M_0(x_0,y_0)$ , имеет в этой точке производную по любому направлению  $l$ , причем

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – углы, образованные лучом  $l$  с осями  $O_x$  и  $O_y$ .

**Определение 2.** Градиентом  $\nabla z(M_0)$  функции  $z=f(x,y)$  в точке  $M_0(x_0,y_0)$  называется вектор с координатами  $(z_x'(M_0), z_y'(M_0))$ :

$$\nabla z(M_0) = (z_x'(M_0), z_y'(M_0)).$$

**Теорема 2.** Градиент функции в данной точке имеет направление быстрейшего увеличения значений функции в этой точке и по величине равен производной функции в данной точке по этому направлению.

## § 6. Формула Тейлора

*Теорема 1.*

Если функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  дифференцируема  $n+1$  раз в некоторой окрестности точки  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ , то для любой точки  $M(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$  из этой окрестности справедливо:

$$\begin{aligned} & f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \\ & = df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(M_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(M_1), \end{aligned}$$

в котором  $M_1(x_1^0 + \lambda \Delta x_1, x_2^0 + \lambda \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \lambda \Delta x_m)$  – точка, лежащая на отрезке  $M_0M$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ .

## § 7. Производные сложных функций

1) Пусть  $u = f(x, y)$

$x = x(t); y = y(t)$ .

Если существуют непрерывные частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}$

и производные  $\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}$ , то существует производная по  $t$  сложной функции

$u = f(x(t), y(t))$  как функции одной переменной  $t$ :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

2) Пусть  $u = f(x, y)$   
 $x = x(s, t); y = y(s, t)$ .

Тогда существуют частные производные сложной функции  $u = f(x(s, t), y(s, t))$  как функции переменных  $s, t$ , которые вычисляются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

3) Пусть  $u = f(v)$ ,  $v = v(x, y)$ .

Если существуют частные производные  $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dv} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dv} \frac{\partial v}{\partial y}$$

## § 8. Неявно заданные функции

**Определение 1.** Пусть функция  $F(x, y)$  определена на множестве  $D \subset R^2$ . Пусть на множестве  $E$  значений  $x$ , для которых  $(x, y) \in D$ , существует такая функция  $y = y(x)$ , что:  $\forall x \in E [F(x, y(x)) \equiv 0]$ . Тогда говорят, что на данном множестве  $E$  функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $F(x, y) = 0$ .

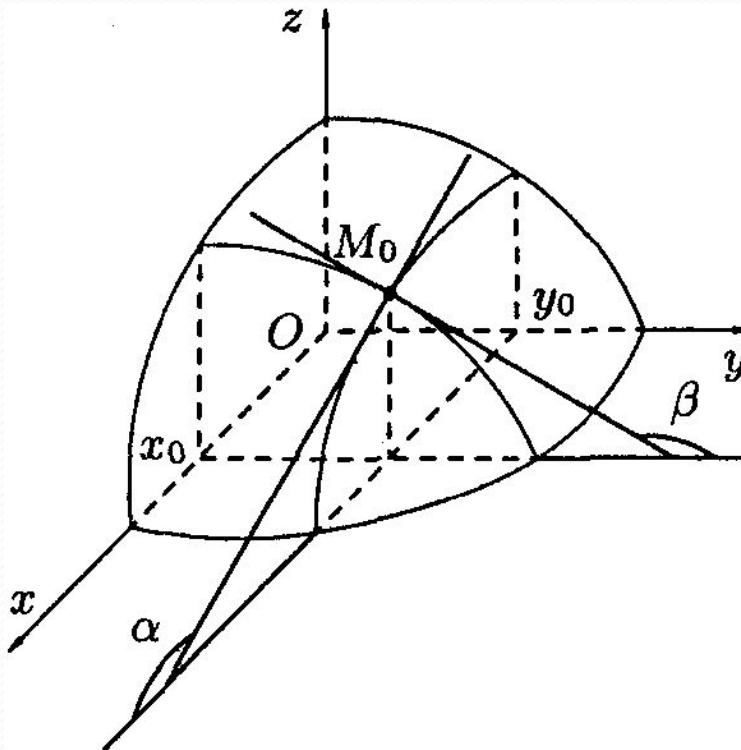
**Теорема 1.** Пусть функция  $F(x, y)$  удовлетворяет условиям:

- 1) определена и имеет непрерывные частные производные  $F'_x, F'_y$  в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ ;
- 2) в точке  $(x_0, y_0)$  выполняется равенство  $F(x, y)=0$ ;
- 3)  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда уравнение  $F(x, y)=0$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  определяет неявно единственную функцию  $y = f(x)$  такую, что  $f(x_0) = y_0$ , причем в окрестности этой точки существует непрерывная производная

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

## § 9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

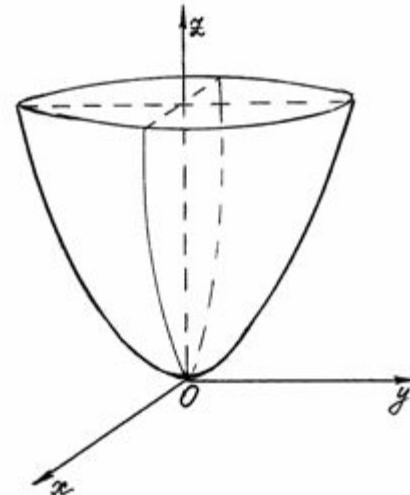


$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

## § 10. Экстремум функции нескольких переменных

**Определение 1.** Точка  $M_0(x_0, y_0)$  называется точкой локального максимума (локального минимума) функции  $z = f(x, y)$ , если существует такая окрестность точки  $M_0(x_0, y_0)$ , в которой для всех точек  $M (M \neq M_0)$  выполняется неравенство  $f(M) < f(M_0)$  ( $f(M) > f(M_0)$ ).

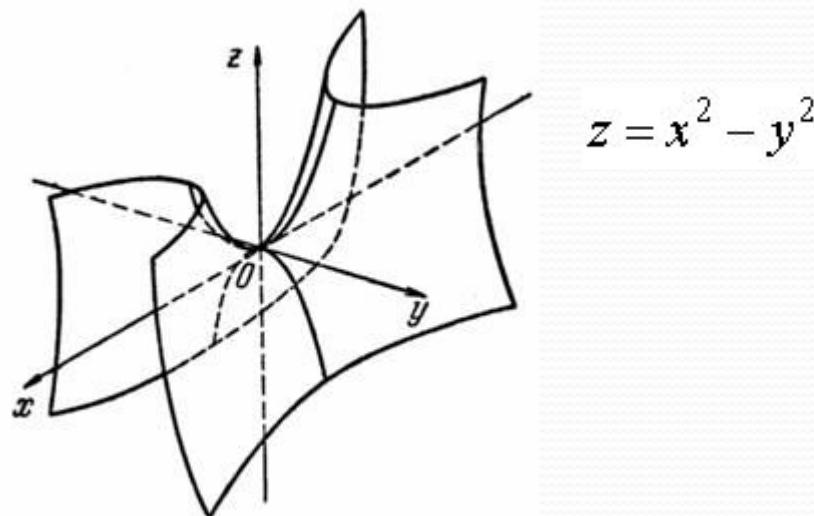


**Теорема 1** (необходимое условие экстремума).

Если в точке локального экстремума  $M_0$  функция  $z = f(x, y)$

дифференцируема и  $\begin{cases} z'_x(M_0) = 0 \\ z'_y(M_0) = 0 \end{cases}$ ,

то  $M_0$  – стационарная точка этой функции.



$$z = x^2 - y^2$$

## **Теорема 2** (достаточное условие экстремума).

Пусть функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в окрестности своей стационарной точки  $M_0(x_0, y_0)$  и имеет непрерывные вторые производные в самой точке  $M_0$ .

Обозначим  $f''_{xx}(M_0) = A, f''_{xy}(M_0) = B, f''_{yy}(M_0) = C$ . Тогда

- 1) если  $AC - B^2 > 0$ , функция  $z = f(x, y)$  имеет в точке  $M_0$  локальный экстремум:
  - при  $A < 0$  - локальный максимум;
  - при  $A > 0$  - локальный минимум;
- 2) если  $AC - B^2 < 0$ , функция  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0$  не имеет экстремума.