ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1 Основные понятия

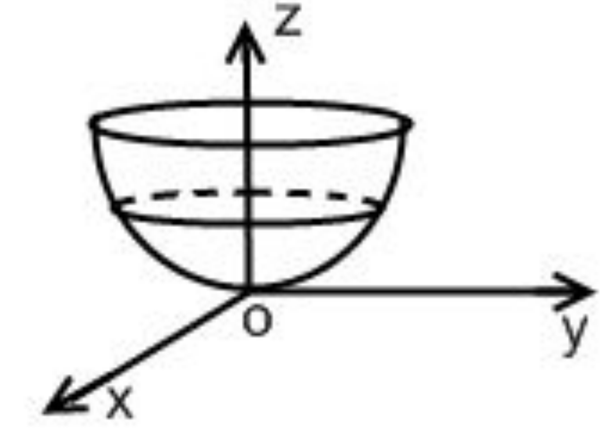
Определение 1. Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана **функция нескольких переменных**

$$z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - **аргументы**,
X - область определения функции.

Определение 2. Графиком функции нескольких переменных $z=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ называется множество точек $n+1$-мерного пространства $(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$, последняя координата которых связана с остальными функциональным соотношением $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

$$f(x,y)=x^2+y^2$$



§2 Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение 1. Число A называется **пределом** функции $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ при $x_1\to a_1$, $x_2\to a_2,\dots$, $x_n\to a_n$ (или в точке $(a_1,a_2,\dots,a_n)$), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$, найдется положительное число $\delta>0$, зависящее от ε $(\delta=\delta(\varepsilon))$, такое, что для всех точек $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, отстоящих от точки $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ на расстояние ρ меньшее, чем δ (т.е. при $0<\rho<\delta$), выполняется неравенство $|f(x_1,x_2,\dots,x_n)-A|<\varepsilon$.

§3 Частные производные

$z=f(x;y)\quad (x;y)\in D$

$y=const$ приращение Δx $(x+\Delta x;y)\in D$

$\Delta_x f(x;y)=f(x+\Delta x;y)-f(x;y)$ - частное приращение функции f по переменной x

$\Delta_y f(x;y)=f(x;y+\Delta y)-f(x;y)$ - частное приращение функции f по переменной y

$\Delta f(x;y)=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y)$ – полное приращение функции $f(x;y)$ в точке $(x;y)$

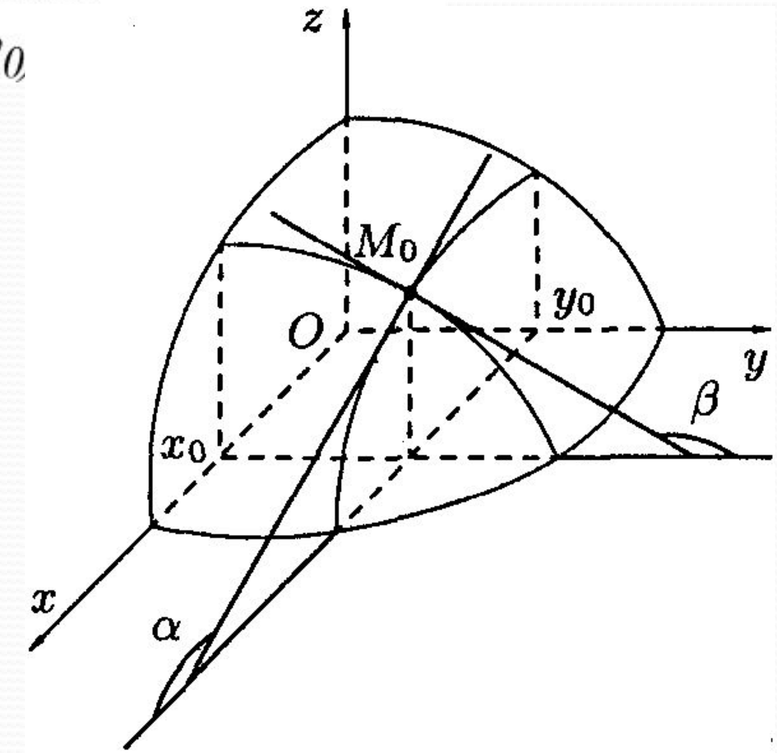
Определение 1. **Частной производной** функции $f(x;y)$ по переменной x (переменной y) в точке $M(x;y)$ называется предел $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$ $\left(lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}\right)$ (если он существует и конечен).

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x};\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial x};\ f'_x(x;y);\ f'_x(M);\ z'_x;\ \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial y};\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial y};\ f'_y(x;y);\ f'_y(M);\ z'_y;\ \frac{\partial z}{\partial y}$$

Геометрический смысл частных производных

Если функция $f(x;y)$ определяет поверхность $z=f(x;y)$, то значение производной $f'_x(x;y)$ в точке $M(x_0;\ y_0)$ равно тангенсу угла, образованного осью O_x и касательной к плоской кривой $z=f(x;y_0)$ при $x=x_0$. (Кривая $z=f(x;y_0)$ образуется как сечение поверхности $z=f(x;y)$ плоскостью $y=y_0$



Физический смысл частной производной $\frac{\partial f(M)}{\partial x}$ ($\frac{\partial f(M)}{\partial y}$) – это скорость изменения функции в точке M в направлении оси O_x (в направлении оси O_y).

Частные производные второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

§4 Дифференциал функции

Определение 1. Дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

$$\boxed{df(x_1; \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}$$

Определение 2. Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y), если её полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где dz – дифференциал функции,

$\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$, $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Если $u(x,y)$, $v(x,y)$ – дифференцируемые функции, то

1) $d(u\pm v)=du\pm dv$;
2) $d(uv)=udv+vdu$;
3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ $(v(x,y)\neq 0)$.

Теорема 1. Если частные производные функции $z=f(x,y)$ существуют в окрестности точки (x,y) и непрерывны в самой этой точке, то функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в этой точке.

$$\boxed{f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)}$$

$$\boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2}$$

§ 5. Производная по направлению. Градиент.

Определение 1. Если существует конечный предел

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M, M_0)}$$

при условии, что точка M стремится к точке M_0 по лучу l,
то он называется производной функции f по направлению l
в точке M_0 и обозначается $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ или $f_l'(M_0)$.

Теорема 1. Функция $f(x,y)$, дифференцируемая в точке $M_0(x_0,y_0)$, имеет в этой точке производную по любому направлению l, причем

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta,$$

где α и β – углы, образованные лучом l с осями O_x и O_y.

Определение 2. Градиентом $\nabla z\ (M_0)$ функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется вектор с координатами $(z_x'(M_0),\ z_y'(M_0))$:

$$\nabla z\ (M_0)=(z_x'(M_0),\ z_y'(M_0)).$$

Теорема 2. Градиент функции в данной точке имеет направление быстрейшего увеличения значений функции в этой точке и по величине равен производной функции в данной точке по этому направлению.

§ 6. Формула Тейлора

Теорема 1.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки $M_0(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$, то для любой точки $M(x^0_1+\Delta x_1, x^0_2+\Delta x_2, \ldots, x^0_m+\Delta x_m)$ из этой окрестности справедливо:

$$f(x^0_1+\Delta x_1, x^0_2+\Delta x_2, \ldots, x^0_m+\Delta x_m) - f(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m) =$$

$$= df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(M_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(M_1),$$

в котором $M_1(x^0_1+\lambda\Delta x_1, x^0_2+\lambda\Delta x_2, \ldots, x^0_m+\lambda\Delta x_m)$ – точка, лежащая на отрезке M_0M, $\lambda \in (0,1)$.

§ 7. Производные сложных функций

1) Пусть $u = f(x, y)$

$x = x(t); y = y(t)$.

Если существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}; \dfrac{\partial u}{\partial y}$

и производные $\dfrac{dx}{dt}; \dfrac{dy}{dt}$, то существует производная по t сложной функции

$u = f(x(t), y(t))$ как функции одной переменной t:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

2) Пусть $u = f(x, y)$

$x = x(s,t); y = y(s,t)$.

Тогда существуют частные производные сложной функции $u = f(x(s,t), y(s,t))$ как функции переменных s,t, которые вычисляются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

3) Пусть $u = f(v)$, $v = v(x, y)$.

Если существуют частные производные $\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}$$

§ 8. Неявно заданные функции

Определение 1. Пусть функция $F(x, y)$ определена на множестве $D \subset R^2$. Пусть на множестве E значений x, для которых $(x, y) \in D$, существует такая функция $y = y(x)$, что: $\forall x \in E\left[F(x, y(x)) \equiv 0\right]$. Тогда говорят, что на данном множестве E функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

Теорема 1. Пусть функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям:

1) определена и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y в некоторой окрестности точки (x_0, y_0);

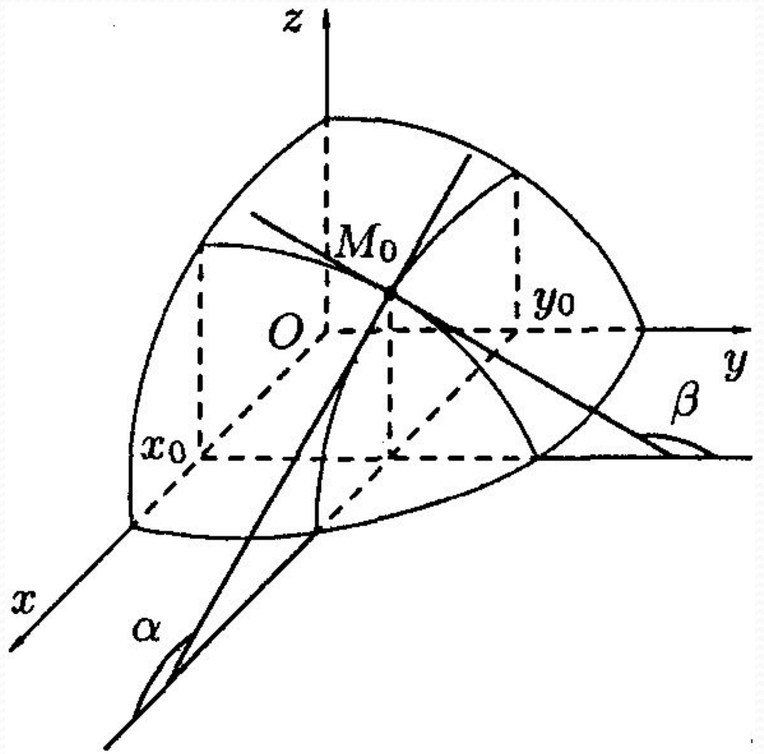
2) в точке (x_0, y_0) выполняется равенство $F(x, y)=0$;

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда уравнение $F(x, y)=0$ в некоторой окрестности точки x_0 определяет неявно единственную функцию $y = f(x)$ такую, что $f(x_0) = y_0$, причем в окрестности этой точки существует непрерывная производная

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

§ 9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности



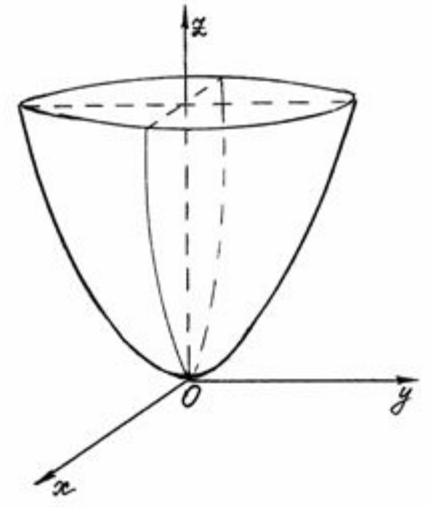
$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

§ 10. Экстремум функции нескольких переменных

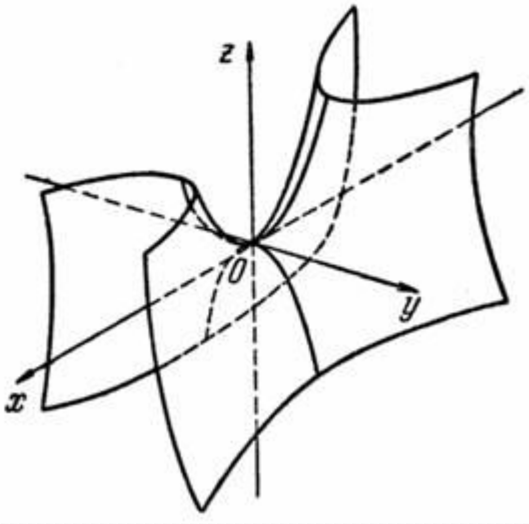
Определение 1. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума (локального минимума) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, в которой для всех точек *M* *(M≠ M₀)* выполняется неравенство

$$f(M) < f(M_0) \; (f(M) > f(M_0)).$$



Теорема 1 (необходимое условие экстремума).

Если в точке локального экстремума M_0 функция $z = f(x, y)$ дифференцируема и $\begin{cases} z'_x(M_0) = 0 \\ z'_y(M_0) = 0 \end{cases}$, то M_0 – стационарная точка этой функции.



$z = x^2 - y^2$

Теорема 2 (достаточное условие экстремума).

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в окрестности своей стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет непрерывные вторые производные в самой точке M_0.

Обозначим $f''_{xx}(M_0) = A, f''_{xy}(M_0) = B, f''_{yy}(M_0) = C$. Тогда

1) если $AC - B^2 > 0$, функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум:
   - при $A < 0$ - локальный максимум;
   - при $A > 0$ - локальный минимум;
2) если $AC - B^2 < 0$, функция $z = f(x, y)$ в точке M_0 не имеет экстремума.