

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1 Основные понятия

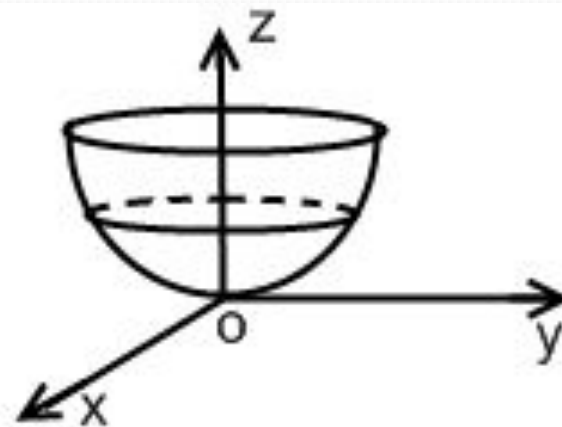
Определение 1. Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений (x_1, x_2, \dots, x_n) некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z . Тогда говорят, что задана **функция нескольких переменных**

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Переменные x_1, x_2, \dots, x_n - **аргументы**,
 X - область определения функции.

Определение 2. Графиком функции нескольких переменных $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется множество точек $n+1$ -мерного пространства $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$, последняя координата которых связана с остальными функциональным соотношением $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



§2 Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение 1. Число A называется **пределом** функции $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $x_1 \rightarrow a_1, x_2 \rightarrow a_2, \dots, x_n \rightarrow a_n$ (или в точке (a_1, a_2, \dots, a_n)), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется положительное число $\delta > 0$, зависящее от ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), такое, что для всех точек (x_1, x_2, \dots, x_n) , отстоящих от точки (a_1, a_2, \dots, a_n) на расстояние ρ меньше, чем δ (т.е. при $0 < \rho < \delta$), выполняется неравенство $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$.

§3 Частные производные

$$z=f(x;y) \quad (x; y) \in D$$

$$y = \text{const} \quad \text{приращение } \Delta x \quad (x+\Delta x; y) \in D$$

$$\Delta_x f(x;y) = f(x+\Delta x;y) - f(x;y) \text{ - частное приращение}$$

функции f по переменной x

$$\Delta_y f(x;y) = f(x;y+\Delta y) - f(x;y) \text{ - частное приращение}$$

функции f по переменной y

$$\Delta f(x;y) = f(x+\Delta x;y+\Delta y) - f(x;y) \text{ - полное приращение}$$

функции $f(x;y)$ в точке $(x;y)$

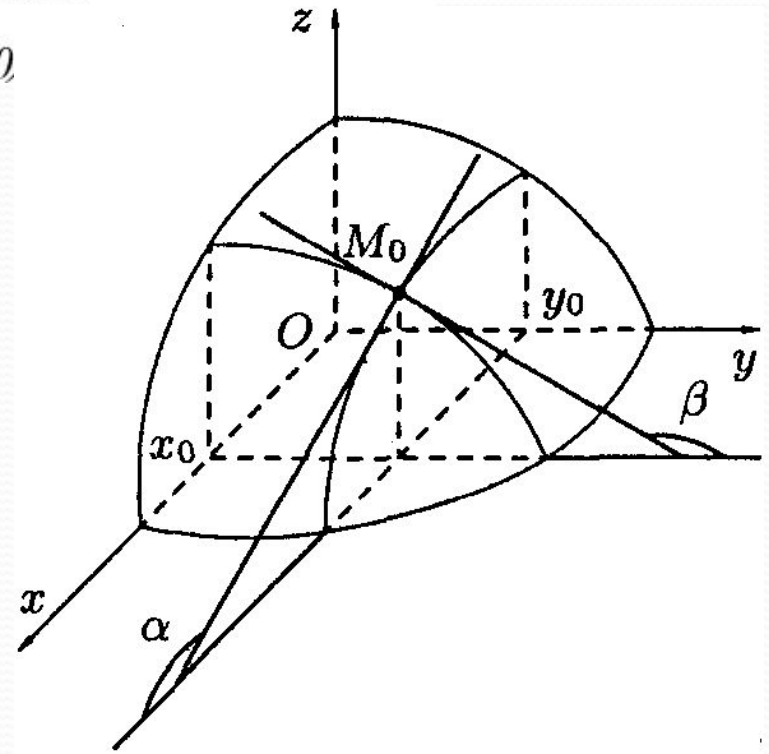
Определение 1. Частной производной функции $f(x;y)$ по переменной x (переменной y) в точке $M(x;y)$ называется предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$ ($\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$) (если он существует и конечен).

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}; \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}; f'_x(x;y); f'_x(M); z'_x; \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial y}; \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}; f'_y(x;y); f'_y(M); z'_y; \frac{\partial z}{\partial y}$$

Геометрический смысл частных производных

Если функция $f(x; y)$ определяет поверхность $z=f(x; y)$, то значение производной $f'_x(x; y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ равно тангенсу угла, образованного осью O_x и касательной к плоской кривой $z=f(x; y_0)$ при $x=x_0$. (Кривая $z=f(x; y_0)$ образуется как сечение поверхности $z=f(x; y)$ плоскостью $y=y_0$



Физический смысл частной производной

$\frac{\partial f(M)}{\partial x}$ ($\frac{\partial f(M)}{\partial y}$) – это скорость изменения

функции в точке M в направлении оси O_x
(в направлении оси O_y).

Частные производные второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

§4 Дифференциал функции

Определение 1. Дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

$$df(x_1; \dots; x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Определение 2. Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y) , если её полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где dz – дифференциал функции,
 $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Если $u(x,y)$, $v(x,y)$ – дифференцируемые функции, то

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

2) $d(uv) = u dv + v du$;

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v(x,y) \neq 0)$.

Теорема 1. Если частные производные функции $z=f(x,y)$ существуют в окрестности точки (x,y) и непрерывны в самой этой точке, то функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в этой точке.

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

§ 5. Производная по направлению. Градиент.

Определение 1. Если существует конечный предел

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M, M_0)}$$

при условии, что точка M стремится к точке M_0 по лучу l , то он называется производной функции f по направлению l

в точке M_0 и обозначается $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ или $f'_l(M_0)$.

Теорема 1. Функция $f(x,y)$, дифференцируемая в точке $M_0(x_0,y_0)$, имеет в этой точке производную по любому направлению l , причем

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta,$$

где α и β – углы, образованные лучом l с осями O_x и O_y .

Определение 2. Градиентом $\nabla_z (M_0)$ функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется вектор с координатами $(z'_x(M_0), z'_y(M_0))$:

$$\nabla_z (M_0) = (z'_x(M_0), z'_y(M_0)).$$

Теорема 2. Градиент функции в данной точке имеет направление быстрого увеличения значений функции в этой точке и по величине равен производной функции в данной точке по этому направлению.

§ 6. Формула Тейлора

Теорема 1.

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, то для любой точки $M(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ из этой окрестности справедливо:

$$\begin{aligned} & f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \\ & = df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(M_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(M_1), \end{aligned}$$

в котором $M_1(x_1^0 + \lambda \Delta x_1, x_2^0 + \lambda \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \lambda \Delta x_m)$ – точка, лежащая на отрезке M_0M , $\lambda \in (0, 1)$.

§ 7. Производные сложных функций

1) Пусть $u = f(x, y)$
 $x = x(t); y = y(t)$.

Если существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}$

и производные $\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}$, то существует производная по t сложной функции

$u = f(x(t), y(t))$ как функции одной переменной t :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

2) Пусть $u = f(x, y)$
 $x = x(s, t); y = y(s, t)$.

Тогда существуют частные производные сложной функции $u = f(x(s, t), y(s, t))$ как функции переменных s, t , которые вычисляются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

3) Пусть $u = f(v)$, $v = v(x, y)$.

Если существуют частные производные $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dv} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dv} \frac{\partial v}{\partial y}$$

§ 8. неявно заданные функции

Определение 1. Пусть функция $F(x, y)$ определена на множестве $D \subset R^2$. Пусть на множестве E значений x , для которых $(x, y) \in D$, существует такая функция $y = y(x)$, что: $\forall x \in E [F(x, y(x)) \equiv 0]$. Тогда говорят, что на данном множестве E функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

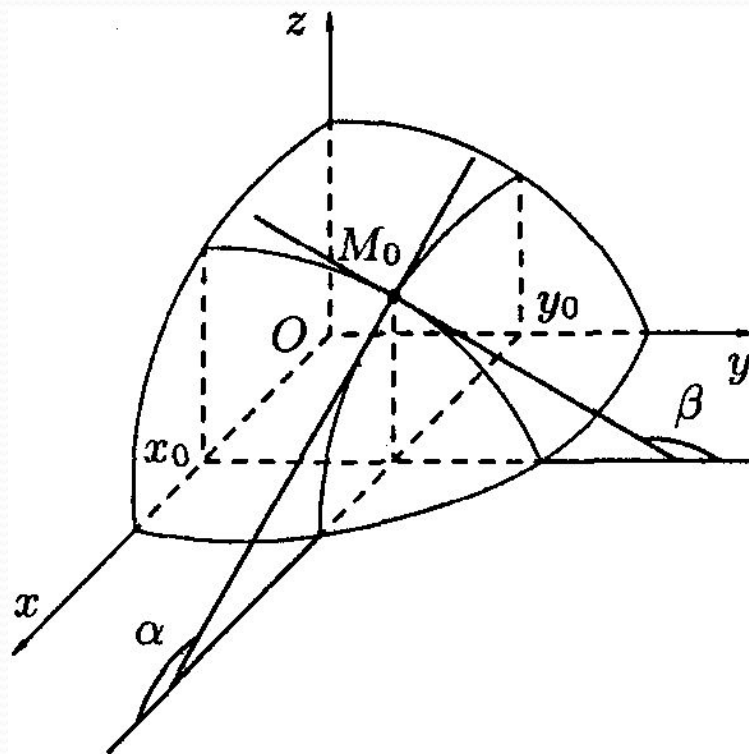
Теорема 1. Пусть функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям:

- 1) определена и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ;
- 2) в точке (x_0, y_0) выполняется равенство $F(x, y)=0$;
- 3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда уравнение $F(x, y)=0$ в некоторой окрестности точки x_0 определяет неявно единственную функцию $y = f(x)$ такую, что $f(x_0) = y_0$, причем в окрестности этой точки существует непрерывная производная

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

§ 9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

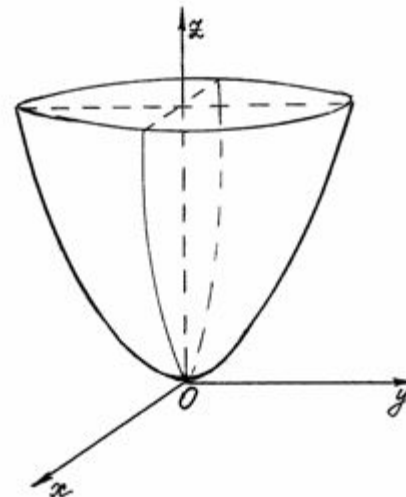


$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} (z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

§ 10. Экстремум функции нескольких переменных

Определение 1. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума (локального минимума) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, в которой для всех точек $M (M \neq M_0)$ выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$).

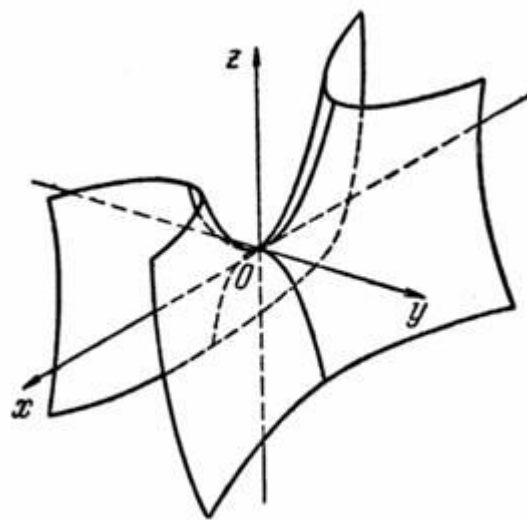


Теорема 1 (необходимое условие экстремума).

Если в точке локального экстремума M_0 функция $z = f(x, y)$

дифференцируема и
$$\begin{cases} z'_x(M_0) = 0 \\ z'_y(M_0) = 0 \end{cases}$$

то M_0 – стационарная точка этой функции.



$$z = x^2 - y^2$$

Теорема 2 (достаточное условие экстремума).

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в окрестности своей стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет непрерывные вторые производные в самой точке M_0 .

Обозначим $f''_{xx}(M_0) = A$, $f''_{xy}(M_0) = B$, $f''_{yy}(M_0) = C$. Тогда

- 1) если $AC - B^2 > 0$, функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум:
 - при $A < 0$ - локальный максимум;
 - при $A > 0$ - локальный минимум;
- 2) если $AC - B^2 < 0$, функция $z = f(x, y)$ в точке M_0 не имеет экстремума.