Производные функции нескольких переменных (часть 1)

Введение в математический анализ

План

1. Разберём ДЗ
2. Несколько слов о математическом моделировании.
3. Функции 2-х переменных; функции многих переменных.
4. Частные производные, дифференциалы функций.
5. Экстремум функции 2-х переменных.
6. Аппроксимация. МНК.

Разбор ДЗ по теме «Производные одной переменной»

Задание 1

$$(\sin x \cdot \cos x)' = \sin x' \cos(x) + \cos x' \sin x =$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\left(\ln(2x+1)^3\right)' = (2x+1)^{-3} \cdot 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2 = \frac{6}{2x+1}$$

$$\left(\ln(2x+1)^3\right)' = 3\left(\ln(2x+1)\right)' = \frac{6}{2x+1}$$

$$\left(\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot (\sin^2(\ln(x^3)))' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot 2\sin(\ln(x^3)) \cdot (\sin(\ln(x^3)))' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot 2\sin(\ln(x^3)) \cdot \cos(\ln(x^3)) \cdot (\ln(x^3))' =$$

$$= \frac{\sin(\ln(x^3))}{\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot \cos(\ln(x^3)) \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{\sin(\ln(x^3))}{\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot \cos(\ln(x^3)) \cdot \frac{3x^2}{x^3}$$

$$\left(\frac{x^4}{\ln(x)}\right)' = \frac{4x^3\ln(x) - x^3}{\ln^2(x)}$$

Задание 2

$$f(x) = \cos(x^2 + 3x),\ x_0 = \sqrt{\pi}$$

$$f'(x) = -\sin(x^2 + 3x) \cdot (2x + 3)$$

$$f'(\sqrt{\pi}) = -\sin((\sqrt{\pi})^2 + 3\sqrt{\pi}) \cdot (2\sqrt{\pi} + 3)$$

$$\boxed{\sin(\pi + a) = -\sin a}$$

= - sin(pi + 3*sqrt(pi))(2*sqrt(pi)+3) =
= sin(3*sqrt(pi))(2*sqrt(pi)+3) =
= -5,38 (с округлением)

Задание 3

$$\left(\frac{x^3 - x^2 - x - 1}{1 + 2x + 3x^2 - 4x^3}\right)\Bigg|'_{x=0} =$$

$$= \left(\frac{(3x^2 - 2x - 1)\cdot(1 + 2x + 3x^2 - 4x^3) - (x^3 - x^2 - x - 1)\cdot(2 + 6x - 12x^2)}{(1 + 2x + 3x^2 - 4x^3)^2}\right)\Bigg|_{x=0}$$

$$= 1$$

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{1 + 2x + 3x^2 - 4x^3},\ x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \qquad a(0) = -1,\ b(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{a'(0)b(0) - a(0)b'(0)}{b^2(0)} \qquad a'(0) = -1,\ b(0) = 2$$

Задание 4

$$f'(x) = (\sqrt{3x} \cdot \ln x)' = (\sqrt{3x})' \cdot \ln x + \sqrt{3x} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{(3x)}} \cdot \ln x + \sqrt{3x} \cdot \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = \frac{3}{2\sqrt{(3x)}} \cdot \ln 1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{1} = \sqrt{3}$$

$$tg(\alpha) = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = arctg(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

Функции многих переменных. Где применяется математическое моделирование?

Модели потребительского выбора, фирмы (производственные функции); экономического роста; равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и т. д.

Механика жидкости - нефтедобывающая промышленность.

Математическое моделирование – зачем?

- Упрощенно описать реальность.
- Учесть ключевые факторы.
- Принять решение.

- Математическая модель – основа для принятия решения.

Задачи математического программирования

Решают: проблему выбора, оптимизации.

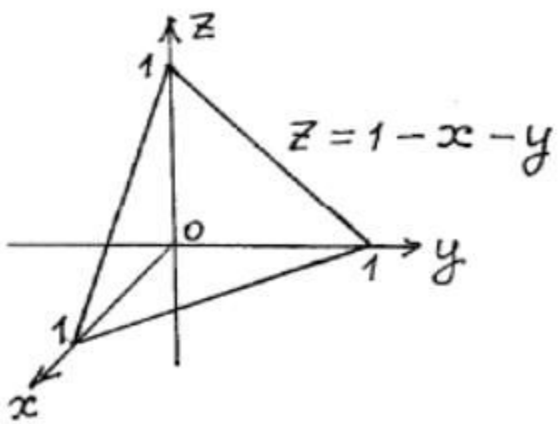
У истоков: Канторович, Кун, Таккер.

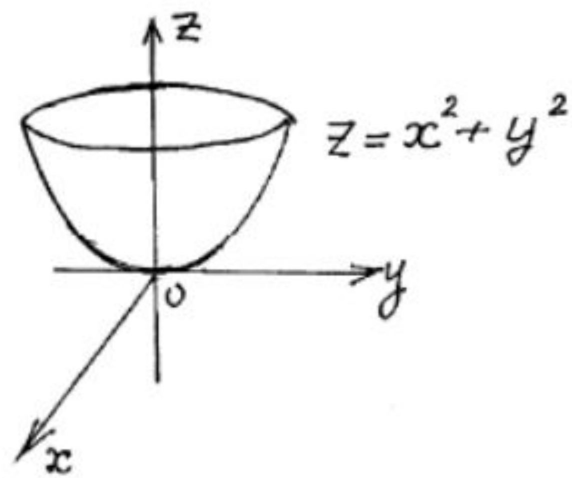
Функция 2-х переменных: **определение**.

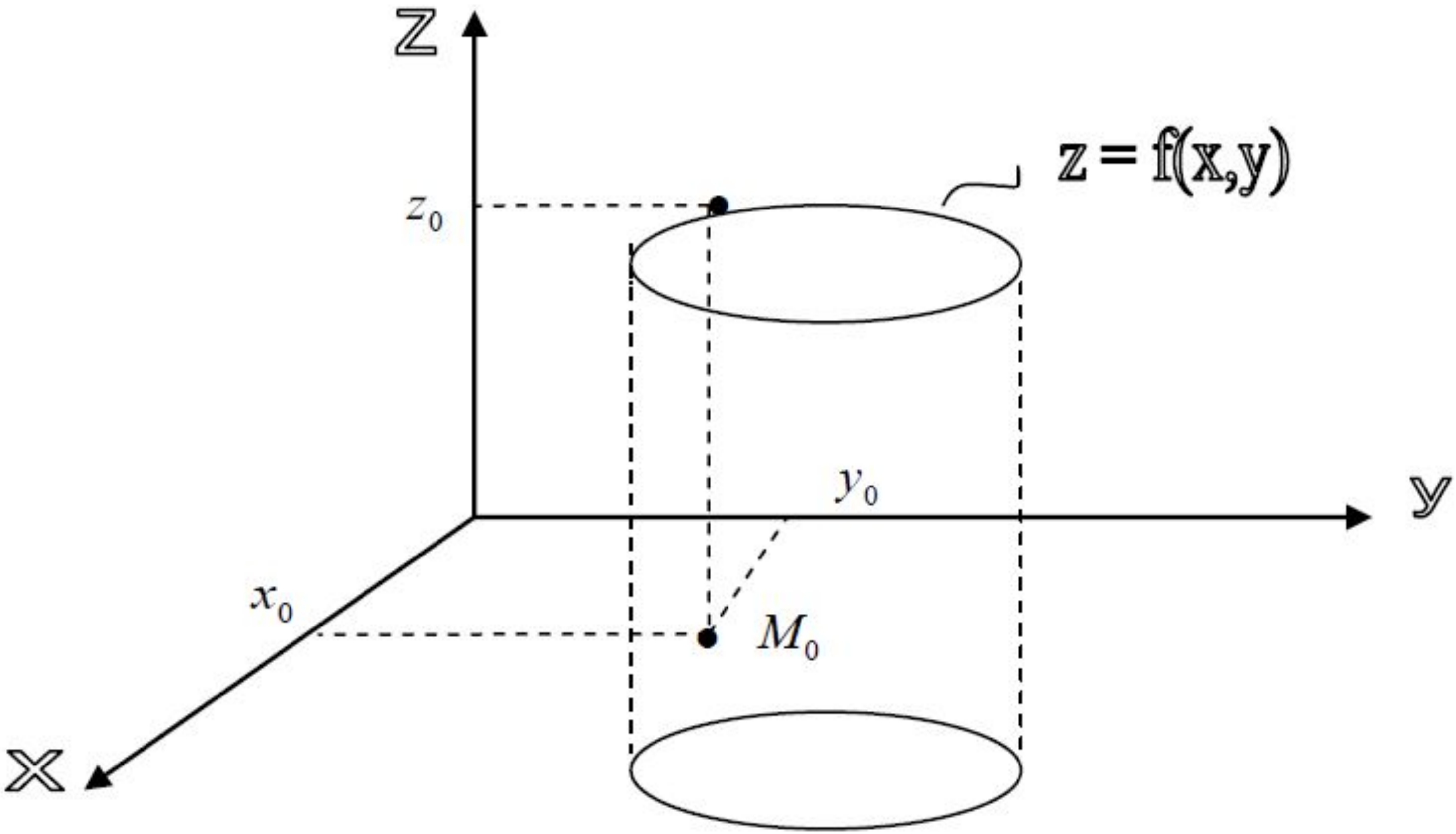
Если каждой паре независимых друг от друга переменных **x, y** из некоторого множества **D** ставится в соответствие переменная величина **z**, то **z** называется **функцией двух переменных**.

$$\mathbf{z = f\,(x,y)} \text{ или } \mathbf{z = z(x,y)}$$

График функции - поверхность

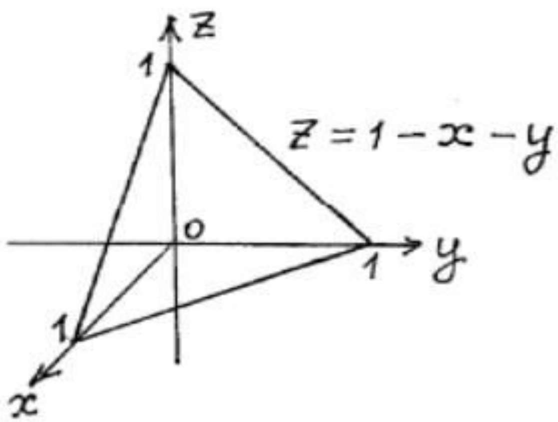


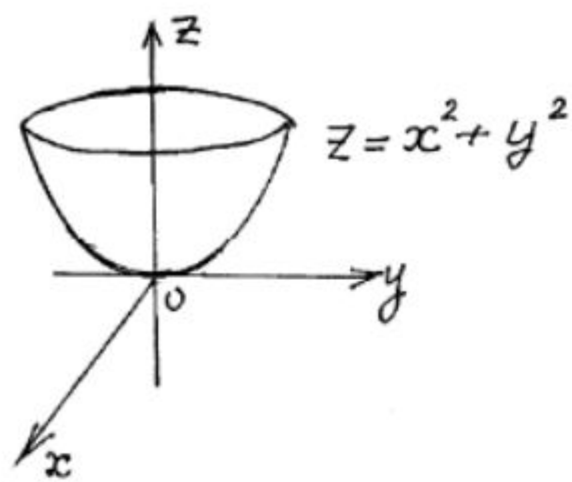



Z
z = f(x,y)
z_0
y_0
y
x_0
M_0
X

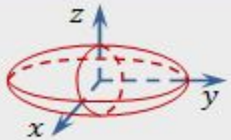
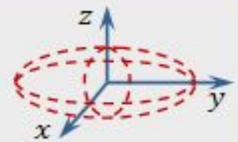
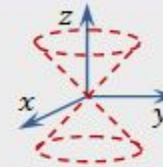
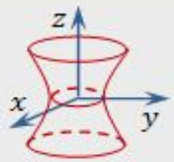
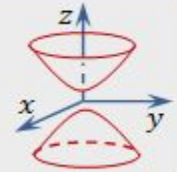
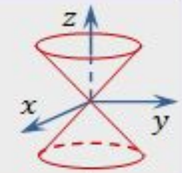
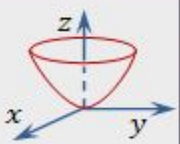
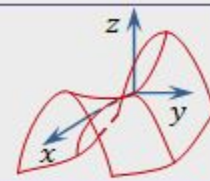
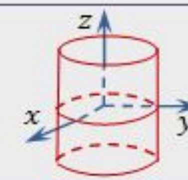
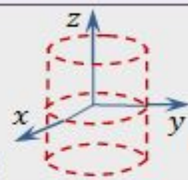
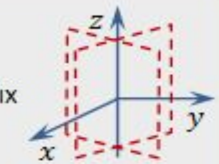
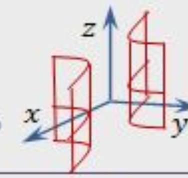
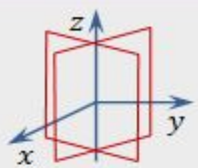
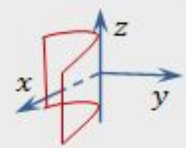
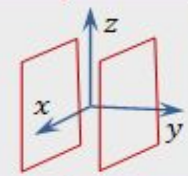
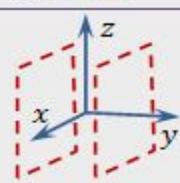
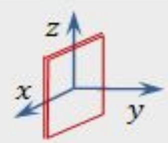
Область определения функции 2-х переменных D(x;y)

Для функции двух переменных множество **D** представляет собой множество точек координатной плоскости **xOy**. В частном случае, это будет часть плоскости **xOy**.





Примеры поверхностей 2-го порядка

1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение эллипсоида 	2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение мнимого эллипсоида 	3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение мнимого конуса 
4.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение однополостного гиперболоида 	5.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение двуполостного гиперболоида 	6.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение конуса 
7.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение эллиптического параболоида 	8.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение гиперболического параболоида 	9.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение эллиптического цилиндра 
10.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ Уравнение мнимого эллиптического цилиндра 	11.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей 	12.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение гиперболического цилиндра 
13.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары пересекающихся плоскостей 	14.	$y^2=2px$ Уравнение параболического цилиндра 	15.	$y^2-b^2=0$ Уравнение пары параллельных плоскостей 
16.	$y^2+b^2=0$ Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей 	17.	$y^2=0$ Уравнение пары совпадающих плоскостей 		Для всех уравнений $a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0$ Для уравнений 1 и 2 $a \ge b \ge c$ Для уравнений 3,4,5,6,7,9,10 $a \ge b$

Пример

Найти область определения функции

$$z = \arccos\left(x^2 + y^2\right).$$

Пример

Найти область определения функции

$$z = \arccos\left(x^2 + y^2\right).$$

Арккосинус ($y = \arccos x$) – это функция, обратная к косинусу ($x = \cos y$). Он имеет область определения $-1 \le x \le 1$ и множество значений $0 \le y \le \pi$.

$\cos(\arccos x) = x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$

$\arccos(\cos x) = x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$

Пример

Найти область определения функции

$$z = \arccos\left(x^2 + y^2\right).$$

Арккосинус ($y = \mathbf{arccos}\, x$ **)** – это функция, обратная к косинусу ($x = \cos y$). Он имеет область определения $-1 \le x \le 1$ и множество значений $0 \le y \le \pi$.

$\cos(\arccos x) = x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$

$\arccos(\cos x) = x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$

D(x;y)

$$x^2 + y^2 \le 1$$

Круг радиуса 1 в центре с началом координат

Функция многих переменных: **определение**.

Если каждой совокупности независимых друг от друга переменных **x,y,z,…,t** из некоторого множества **D** ставится в соответствие определенное значение переменной величины **W**, то **W** называется **функцией n переменных.**

W = W(x, y, z, … t)

Частные производные 1-го порядка

$$z = f(x, y)$$

Δx - «дельта икс», приращение переменной x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Δy - «дельта игрек», приращение переменной y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется *частной производной* (первого порядка) данной функции по переменной x в точке (x, y) и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $f_x^{/}(x, y)$. Точно так же определяется частная производная этой функции по переменной y и обозначается $\frac{\partial z}{\partial y}$ или $f_y^{/}(x, y)$.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Определение
производной функции
одной переменной
(для сравнения)

Вычисление частных производных

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме одной, рассматриваются как постоянные («замораживаются»).

Физический смысл

Частные производные показывают скорость изменения функции по направлению роста оси. U'_x - по оси X, U'_y - по оси Y и т.д..

Сравнение с неявными функциями

$$F(x, y(x)) = 0$$

$$x^3 + y^3 + \cos y \cdot \sin^4 x = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - \sin y \cdot y' \cdot \sin^4 x + \cos y \cdot 4\sin^3 x \cdot \cos x = 0$$

$$(3y^2 - \sin y \cdot \sin^4 x) \cdot y' = -\cos y \cdot 4\sin^3 x \cdot \cos x - 3x^2$$

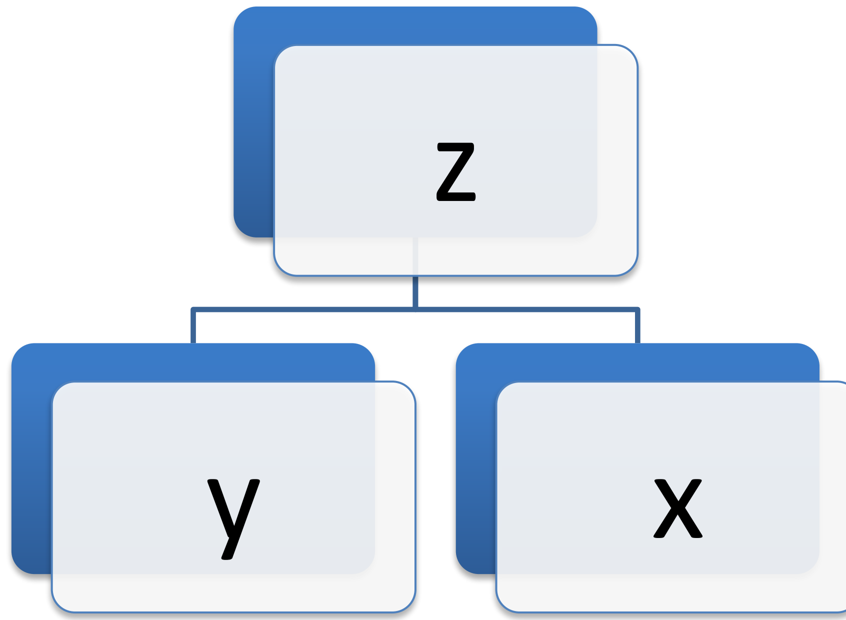
$$y' = -\frac{\cos y \cdot 4\sin^3 x \cdot \cos x + 3x^2}{3y^2 - \sin y \cdot \sin^4 x}$$

В случае неявной функции y зависит от x: y(x)
В случае функции нескольких переменных – нет: z(x,y)

Разница между неявными функциями и функциями нескольких переменных

Неявная функция

Функция двух переменных



Вычислить:

$$z = x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1.$$

Вычисление частных производных

$$z = x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1.$$

$$z = x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 \cdot 2x + 4y^2 \cdot 3x^2 + 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 2xy^3 + 12x^2y^2 + 5$$

$$z = x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$z'_y = 3x^2y^2 + 8x^3y - 4$$

Частный дифференциал функции многих переменных W(x,y,z)

Частным дифференциалом функции многих переменных называется величина, обозначаемая $\mathbf{d_x W}$ и равная произведению соответствующей частной производной на приращение соответствующей независимой переменной, то есть

$$d_x W = W'_x \Delta x \qquad d_x W = W'_x\, dx$$
$$d_y W = W'_y\, \Delta y \qquad d_y W = W'_y\, dy$$
$$d_z W = W'_z\, \Delta z \qquad d_z W = W'_z\, dz$$

dx – «дифференциал икс» - произвольное бесконечно малое приращение переменной величины

Частный дифференциал не путаем с частной производной функции многих переменных

Частный дифференциал равен **частной производной** умноженной на приращение

Полный дифференциал функции многих переменных W(x,y,z)

Полным дифференциалом функции многих переменных называется величина, равная сумме всех ее частных дифференциалов, то есть
$dW = d_x W + d_y W + d_z W$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

Полный дифференциал функции многих переменных W(x,y,z)

Полным дифференциалом функции многих переменных называется величина, равная сумме всех ее частных дифференциалов, то есть

$dW = d_xW + d_yW + d_zW$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

$$W = \sin(2x) + \mathrm{x} \cdot \cos(5y) - tg(7z)$$

dW =

dW (0;0;0) =

$$W = \sin(2x) + \mathrm{x} \cdot \cos(5y) - tg(7z)$$

dW =

dW (0;0;0) =

$$W = \sin(2x) + \mathrm{x} \cdot \cos(5y) - tg(7z)$$

dW =

dW (0;0;0) =

dW = W’(x)dx+W’(y)dy+W’(z)dz

dW=(2cos(2x)+cos(5y))dx-5xsin(5y)dy-(7/(cos(7z)^2)dz

dW(0;0;0)=3dx-7dz

$dW(0;0;0) = 3dx - 7dz$

Интерпретация

В точке (0;0;0) при бесконечно малых приращениях x, y и z главную линейную часть приращения функции W можно вычислить по формуле.

Частные производные 2-го порядка

$$\boldsymbol{z = \ln(xy) + xy^2}$$

1-е производные: $z'_x = \frac{1}{xy} \cdot y + y^2 = \frac{1}{x} + y^2$

$$z'_y = \frac{1}{xy} \cdot x + 2xy = \frac{1}{y} + 2xy$$

Частные производные 2-го порядка

$$\boldsymbol{z = \ln(xy) + xy^2}$$

1-е производные: $z'_x = \frac{1}{xy} \cdot y + y^2 = \frac{1}{x} + y^2$

$$z'_y = \frac{1}{xy} \cdot x + 2xy = \frac{1}{y} + 2xy$$

2-е производные: $z''_{xx} = -\frac{1}{x^2}$

$z''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + 2x$

Смешанные производные: $z''_{xy} = z''_{yx} = 2y$

$$U(x, y) = 5x^2 + 7y^3 \sin x - \ln x \cdot \operatorname{tg} y + 10y - 13$$

$$U(x, y) = 5x^2 + 7y^3 \sin x - \ln x \cdot \operatorname{tg} y + 10y - 13$$

$$U'_x = 10x + 7y^3 \cos x - \frac{\operatorname{tg} y}{x}$$

$$U'_y = 21y^2 \sin x - \frac{\ln x}{\cos^2 y} + 10$$

$$U''_{xx} = 10 - 7y^3 \sin x + \frac{\operatorname{tg} y}{x^2}$$

$$U''_{yy} = 42y \sin x - \frac{2 \ln x \cdot \sin y}{\cos^3 y}$$

$$U(x,y) = 5x^2 + 7y^3 \sin x - \ln x \cdot \operatorname{tg} y + 10y - 13$$

$$U'_x = 10x + 7y^3 \cos x - \frac{\operatorname{tg} y}{x}$$

$$U'_y = 21y^2 \sin x - \frac{\ln x}{\cos^2 y} + 10$$

$$U''_{xy} = 21y^2 \cos x - \frac{1}{x \cos^2 y}$$

$$U''_{yx} = 21y^2 \cos x - \frac{1}{x \cos^2 y}$$

$$U(x, y, z) = 3y^3z^2 + 5x^5 \ln z - \sin x \cdot \cos y + 11y - 9x + 3z - 20$$

$$U'_x = 25x^4 \ln z - \cos x \cdot \cos y - 9$$

$$U'_y = 9y^2z^2 + \sin x \cdot \sin y + 11$$

$$U'_z = 6y^3z + \frac{5x^5}{z} + 3$$

$$U(x,y,z) = 3y^3z^2 + 5x^5 \ln z - \sin x \cdot \cos y + 11y - 9x + 3z - 20$$

$$U'_x = 25x^4 \ln z - \cos x \cdot \cos y - 9$$

$$U''_{xx} = 100x^3 \ln z + \sin x \cdot \cos y$$

$$U''_{xy} = \cos x \cdot \sin y$$

$$U''_{xz} = \frac{25x^4}{z}$$

$$U(x, y, z) = 3y^3z^2 + 5x^5 \ln z - \sin x \cdot \cos y + 11y - 9x + 3z - 20$$

$$U'_y = 9y^2z^2 + \sin x \cdot \sin y + 11$$

$$U''_{yx} = \cos x \cdot \sin y$$

$$U''_{yy} = 18yz^2 + \sin x \cdot \cos y$$

$$U''_{yz} = 18y^2z$$

$$U(x,y,z) = 3y^3z^2 + 5x^5 \ln z - \sin x \cdot \cos y + 11y - 9x + 3z - 20$$

$$U'_z = 6y^3z + \frac{5x^5}{z} + 3$$

$$U''_{zx} = \frac{25x^4}{z}$$

$$U''_{zy} = 18y^2z$$

$$U''_{zz} = 6y^3 - \frac{5x^5}{z^2}$$

Экстремум функции 2-х переменных

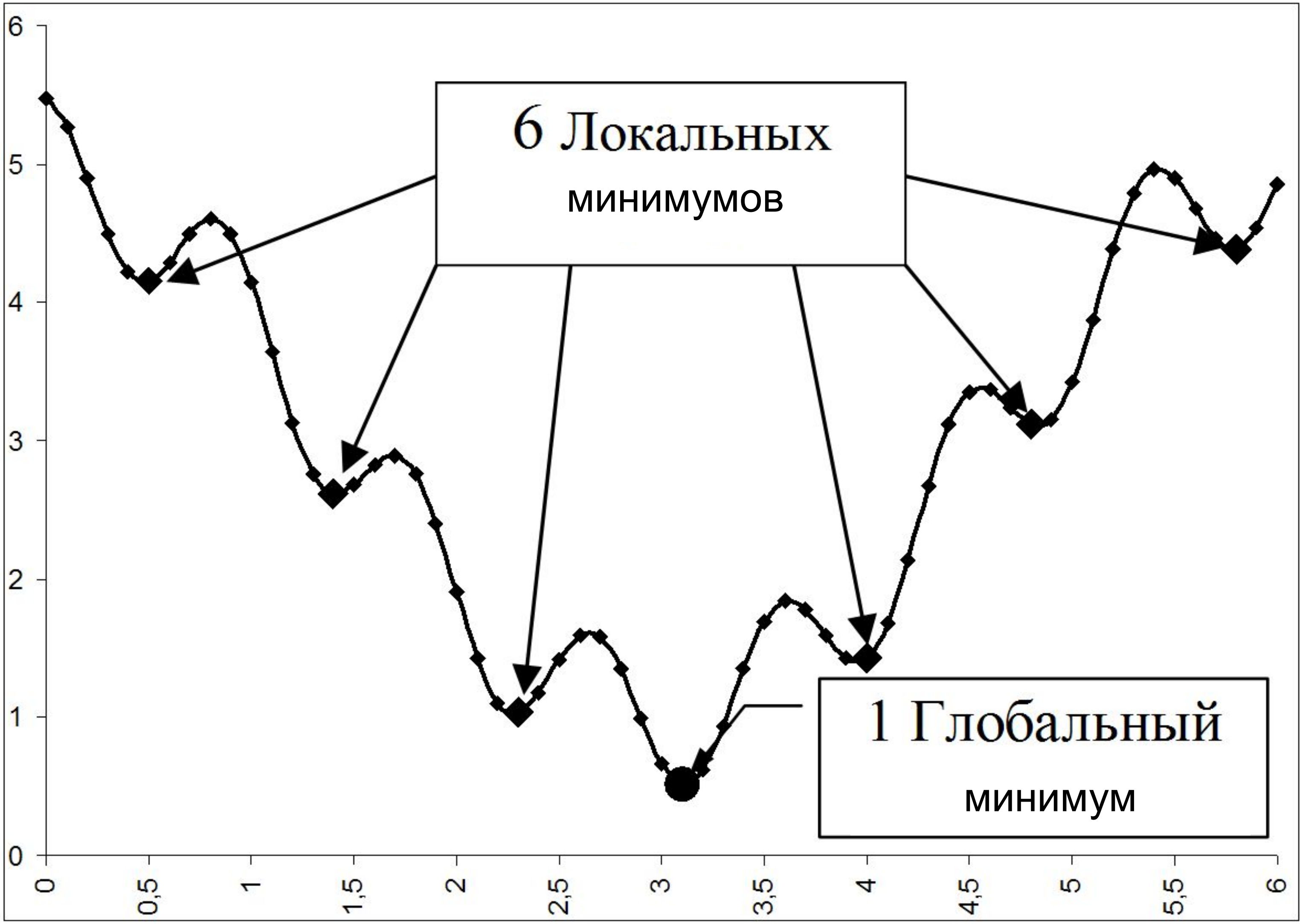
Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой максимума** для функции **z = f (x,y)**, если для всех точек **M (x,y)** из некоторой окрестности этой точки, достаточно близких к $M_0(x_0, y_0)$, но отличных от нее, выполняется условие:

$f(x_0, y_0) > f(x, y)$.

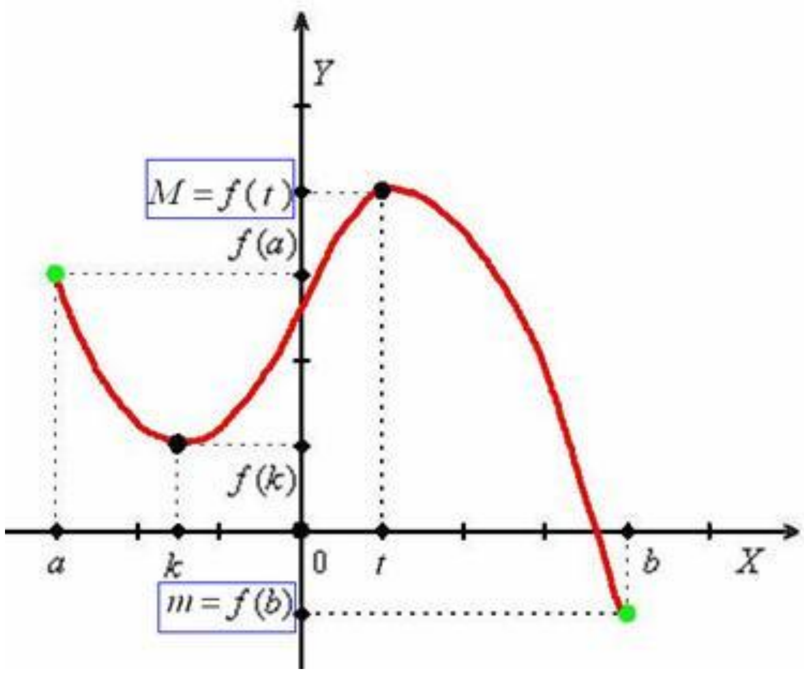
Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой минимума** для функции **z = f (x,y)**, если для всех точек **M (x,y)** из некоторой окрестности этой точки, достаточно близких к $M_0(x_0, y_0)$, но отличных от нее, выполняется условие:

$f(x_0, y_0) < f(x, y)$.

Локальный и глобальный экстремумы: разница



Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке



http://mathprofi.ru/naibolshee_i_naimenshee_znacheniya_funkcii_na_otrezke.html
(пример 3)

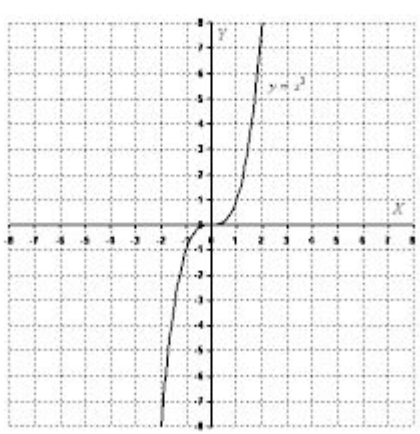
Экстремум функции 2-х переменных

Необходимые условия экстремума.
Частные производные равны нулю или не существуют.
Точки, для которых это выполняется, называются **критическими.**
Точки, в которых производная равна 0, называются **стационарными**.

Технически – решаем систему уравнений

Важно!
Не каждая критическая точка является точкой экстремума.

Аналог для функций одной переменой: точки перегиба ($y = x^3$)



Необходимые условия экстремума функции нескольких переменных

$z'_x = 0$

$z'_y = 0$

(для стационарных точек)

Достаточное условие экстремума (для стационарных точек)

1

Функция **z = f (x,y)** имеет в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, если в этой точке выполняется условие:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

2

$z''_{xx} > 0$ — Минимум

$z''_{xx} < 0$ — Максимум

Если $\Delta < 0$ **- экстремума нет**

Если $\Delta = 0$ - ? нужны дальнейшие исследования

Определитель матрицы 2x2

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

К достаточному условию есть несколько подходов

Два математических:

- через полный дифференциал второго порядка (требует большого навыка работы с числами);
- через уравнения касательной плоскости (является самым сложным способом, но при этом самым надежным).

Два алгебраических:

- через критерий Сильвестра (с помощью матрицы Гёссе. Является самым простым способом, но требует начального уровня знания в линейной алгебре);
- через собственные значение матрицы Гёссе (является самым быстрым, но требует более глубокого уровня знания в линейной алгебре).

Пример: исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$$

Необходимые условия

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

из (2): $x = 4y^2$

(1): $x^2 - 2y = 0$

в (1): $(4y^2)^2 - 2y = 0$

$$16y^4 - 2y = 0$$

$$2y(8y^3 - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Найдём $x = 4y^2$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Достаточные условия (частный случай критерия Сильвестра)

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y.$$

$$\begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{vmatrix}$$

M1 (0;0)

$$\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 36 = -36 < 0 \Rightarrow \text{нет экстремума}$$

M2 (1;0.5)

$$\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 6 \cdot 24 - 36 = 144 - 36 = 108 > 0$$

6>0 => M2 (1;0.5) – точка минимума.

Экстремум функции двух переменных

Пример. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

Проведем исследование на экстремум данную функцию. Прежде всего найдем критические точки. То есть приравняем нулю первые производные.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad M_1(0,0) \quad M_2(1, \tfrac{1}{2})$$

Теперь определим максимум или минимум функции в найденных точках. Для этого найдем частные вторые производные и посчитаем детерминант.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y.$$

Детерминант в точке M_1 $\Delta(M_1) = A \cdot C - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0.$

Детерминант в точке M_2

$$\Delta(M_2) = 108 > 0, \ A > 0, \text{ значит, в точке } M_2 \text{ — минимум.}$$

Источник: www.linis.ru

Комментарий к записи

$$U = U(x, y) \quad => \quad dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = U_x{}' dx + U_y{}' dy$$

Аппроксимация

Определение:

Метод состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми.

Например: нелинейные функции линейными, дискретные данные функциями.

Требования:

- Конкретных вид функции.
- Минимальное отклонение от заданной функции.

- **Интерполяция** — способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.
- **Экстраполяция** — способ построения функции <u>вне интервала известных значений</u>.

Интерполяция

Определение:

Метод нахождения промежуточных значений функции по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Требования:

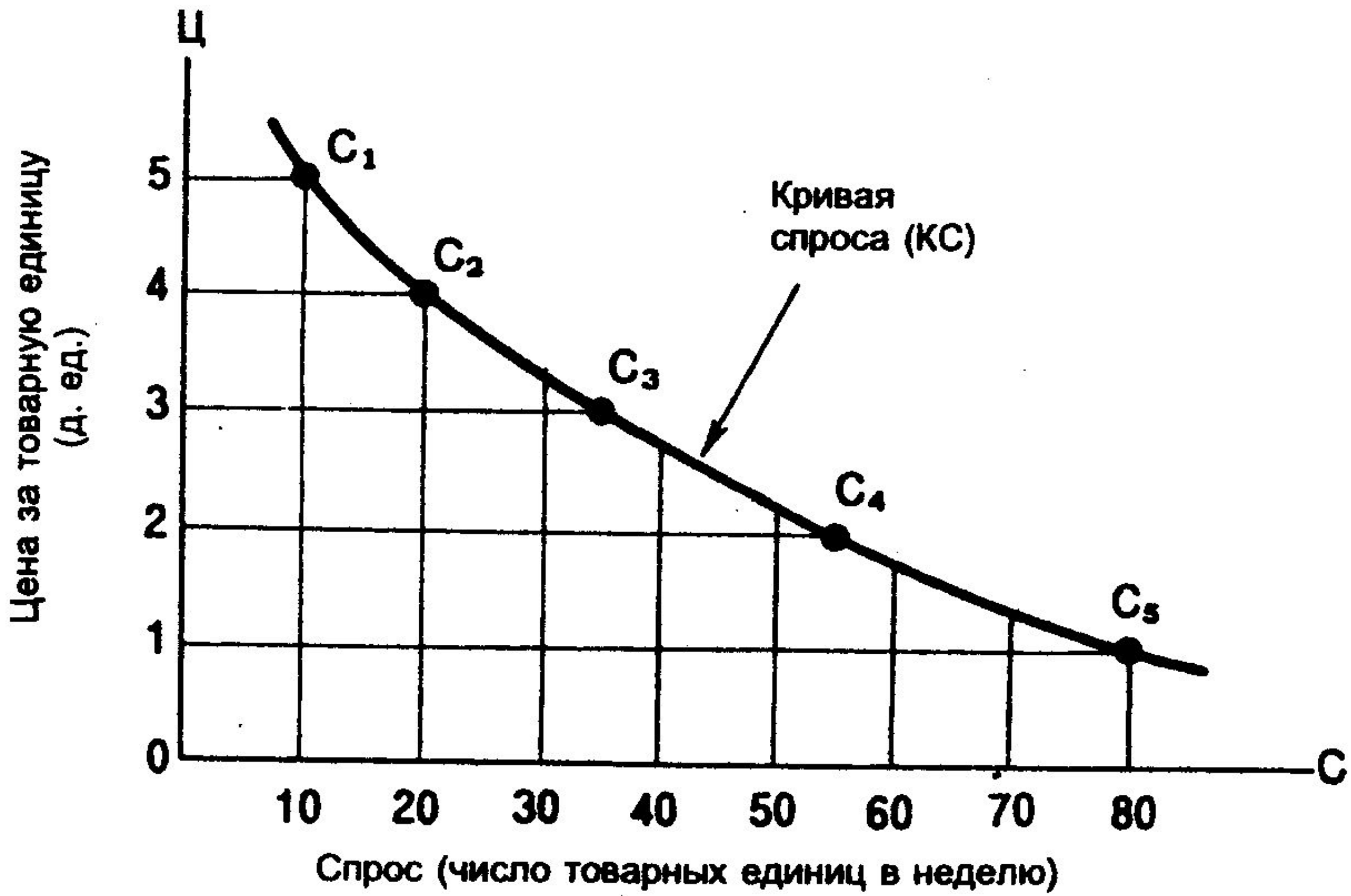
- Прохождение функции через данные точки.
- Монотонность функции в данных точках.

Функция одной переменной: практический пример интерполяции

Шкала спроса на условный товар

Цена за товарную единицу (д. ед.)	Величина спроса в неделю (т. е.)	Точка на графике
5	10	C_1
4	20	C_2
3	35	C_3
2	55	C_4
1	80	C_5

Функция одной переменной: практический пример интерполяции



Аппроксимация. Метод наименьших квадратов

X:	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Y:	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Аппроксимация. Метод наименьших квадратов

X:	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Y:	y_1	y_2	y_3	…	y_n

$$y = ax + b$$

$$y - ax - b = 0$$
$$y_i - ax_i - b = \varepsilon_i$$

$$U(a,b) = {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_i}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2$$

$$\begin{cases} {U_a}' = 0 \\ {U_b}' = 0 \end{cases}$$

Аппроксимация. Метод наименьших квадратов

X:	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Y:	y_1	y_2	y_3	…	y_n

$$y = ax + b$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{y}_i &= ax_i + b \\ \varepsilon_i &= \hat{y}_i - y_i \end{aligned}}$$

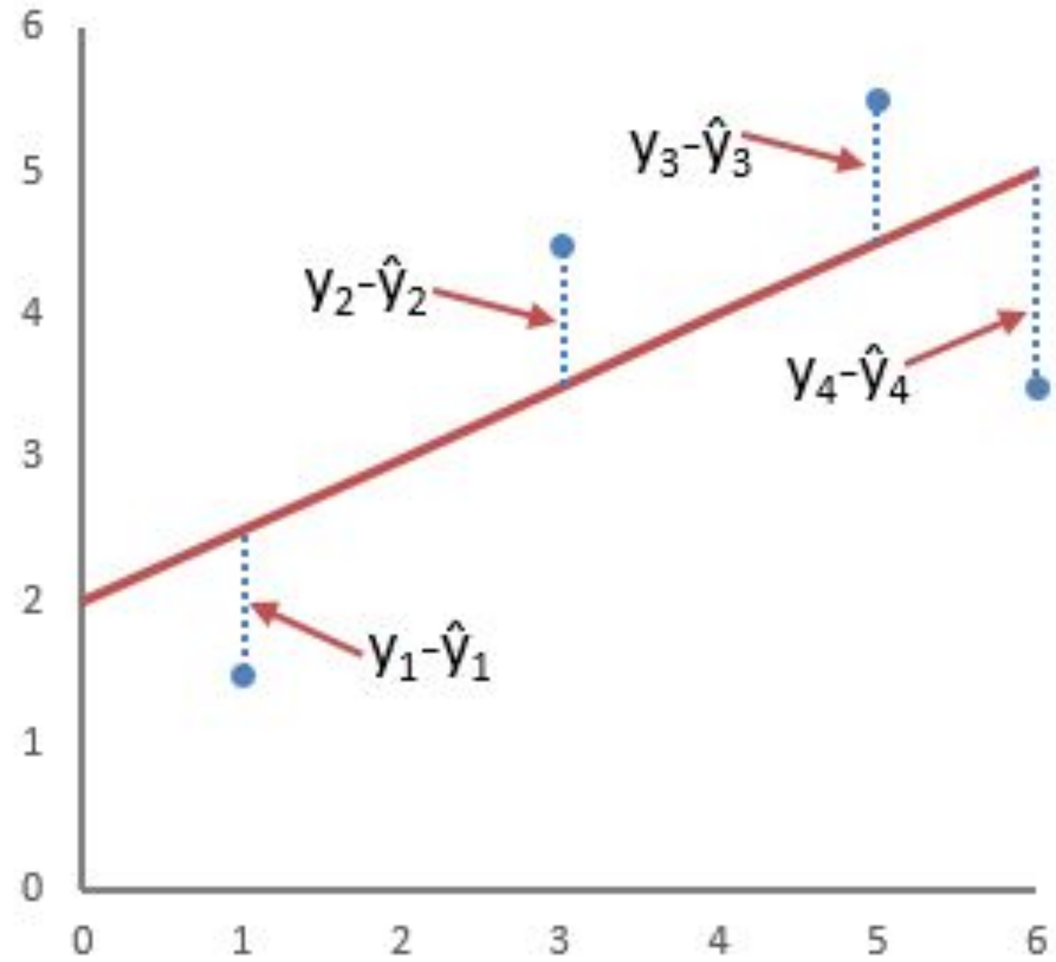
$$y - ax - b = 0$$

$$y_i - ax_i - b = \varepsilon_i$$

$$U(a,b) = {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_i}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2$$

$$\begin{cases} {U_a}' = 0 \\ {U_b}' = 0 \end{cases}$$

МНК



$$y_i - ax_i - b = \varepsilon_i$$

$$U(a,b) = {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_i}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2$$

$$U(a,b) = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2$$

$$\begin{cases} {U_a}' = 0 \\ {U_b}' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \big(-2x_i \cdot (y_i - ax_i - b)\big) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \big(-2 \cdot (y_i - ax_i - b)\big) = 0 \end{cases}$$

Аппроксимация. Метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(-2x_i \cdot (y_i - ax_i - b)\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(-2 \cdot (y_i - ax_i - b)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{cases}$$

Оценка качества модели: коэффициент детерминации

Коэффициент детерминации R^2

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = \frac{ESS}{TSS}$$

$$RSS + ESS = TSS$$

Находится в диапазоне от 0 до 1;
Чем ближе к 1, тем лучше модель.

$RSS = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$ residual sum of squares (сумма квадратов отклонений)
$TSS = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$ total sum of squares (общая сумма квадратов)
$ESS = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ explained sum of squares (объяснённая сумма квадратов)

МНК для нелинейных функций

Взвешенный МНК
Обобщённый МНК
И т. д.

МНК для нелинейных функций

$$y = e^{ax+b}$$

МНК для нелинейных функций

$$y = e^{ax+b}$$

$$lny = ax + b$$

Спасибо!