

# ԴԻՍԿՐԵՏ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

## Հաստատումն պարամետրերով դիսկրետ համակարգեր

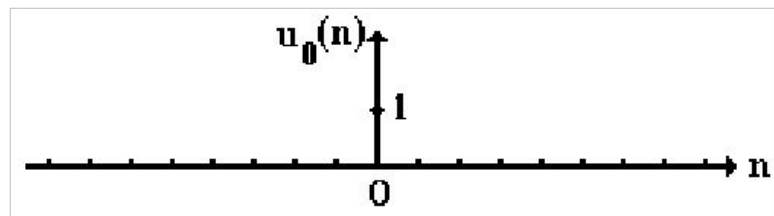
Դիսկրետ ազդանշանները սահմանվում են ժամանակի (անկախ փոփոխականի) միայն դիսկրետ արժեքների համար: Սովորաբար դիտարկվող ժամանակը տրոհում են հավասարաչափ, այսինքն  $\Delta t = \Delta t_0$  որտեղ  $\Delta t_0$ - ն դիսկրետ ազդանշանի երկու իրար հաջորդող պահերի միջև եղած ժամանակահատվածն է: Մաթեմատիկորեն դիսկրետ ազդանշանը ներկայացվում է թվային հաջորդականության տեսքով: Հետագայում կօգտագործենք հետևյալ նշանակումներից որևէ մեկը.

$$h[n], h[k], h[n], h[k], n < k < n:$$

Առաջին և երրորդ նշանակումներն օգտագործվում են, երբ հաջորդականության տարրերը ժամանակի մեջ բաշխված են կամայականորեն, իսկ երկրորդը և չորրորդը երբ տարրերը ժամանակի մեջ բաշխված են հավասարաչափ:

Դիսարկերնք որոշ օրինակներ:

$$1. \delta[n] \otimes \delta[n] = \delta[n], \delta[n] = 0, \delta[n] \neq 0:$$

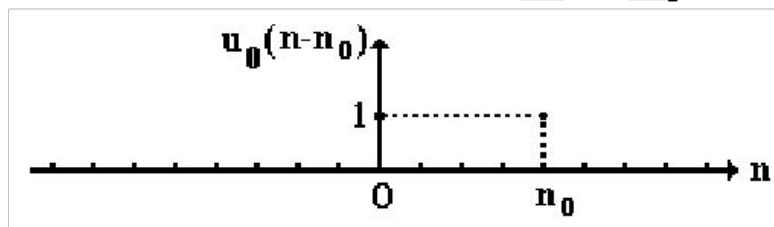


$\delta[n] \otimes \delta[n]$  - ը կանվանենք միավոր թվային իմպուլս: Դիսկրետ համակարգերում այն Դիրակի  $\delta[n]$  ֆունկցիայի անալոգն է, որտեղ

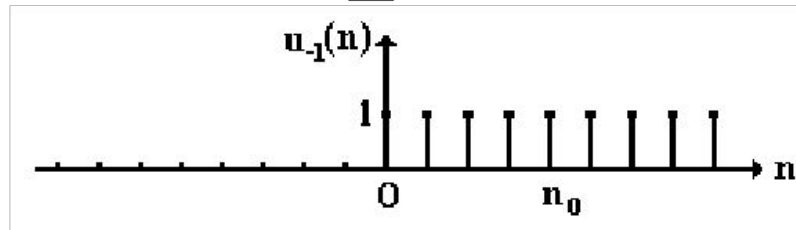
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}, \delta[n] \otimes \delta[n] = \delta[n]$$

2.  $\delta[n - n_0]$  պահ ուշացած միավոր թվային իմպուլսը`

$$\delta[n - n_0] \otimes \delta[n] = \delta[n - n_0], \delta[n - n_0] = 0, \delta[n - n_0] \neq 0:$$



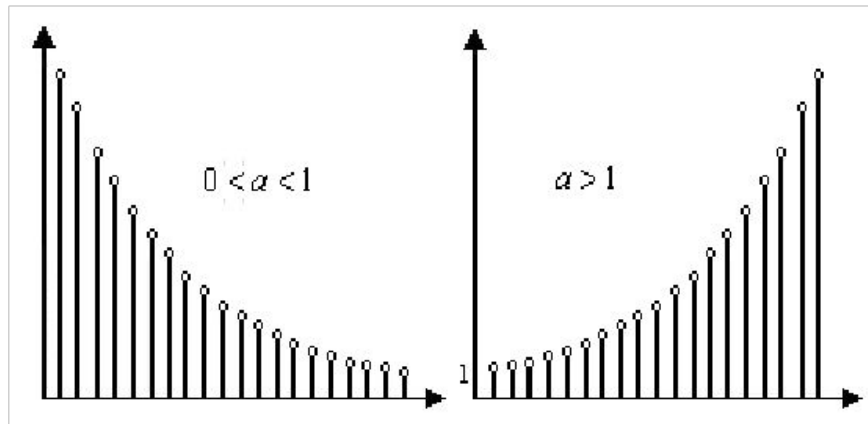
3. Միապար թռիչքը՝  $u_{-1}(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0: \end{cases}$



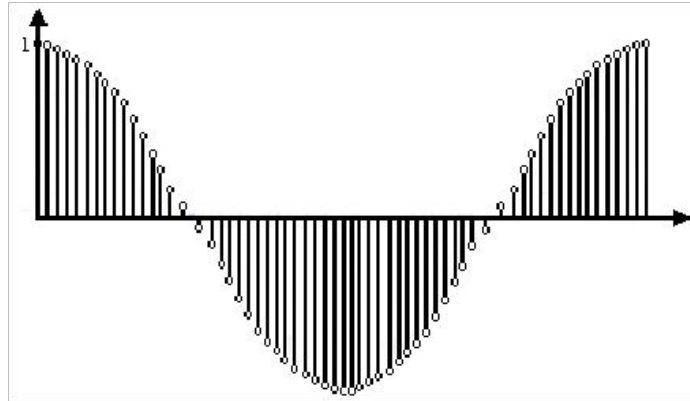
Դժվար չէ նկատել, որ

$$u_{-1}(n) = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \\ -\infty & \end{cases}$$

4.  $u(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0: \end{cases}$



$$5. \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$



Յուրահատուկ կարևորություն ունի կոմպլեքս էքսպոնենտը

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

**Սահմանում.** Երկու  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} dx$  և  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} dx$  ազդանշանների փաթեթը կոչվում է հետևյալ (ձևական) գումարը

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos x + i \sin x) dx$$

Նկատենք, որ կամայական  $\dots, \int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx, \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx, \dots$  թվային հաջորդականություններ կայացվում է հետևյալ տեսքով

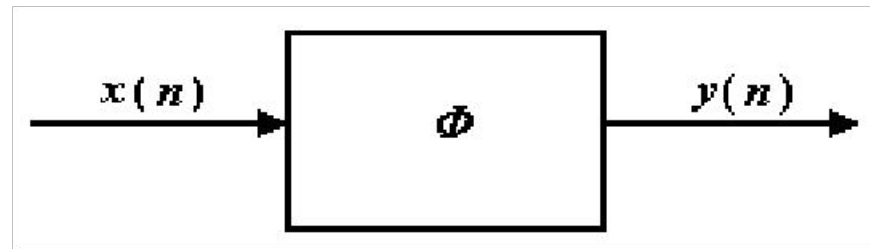
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} dx$$

## Հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգեր

Ըստ էության, դիսկրետ համակարգը մուտքային  $x(n)$  ազդանշանը մեկ այլ (ելքային) ազդանշանի փոխակերպման պարբերական է:

Դիսկրետ համակարգի պարզագույն մոդելը բերված է գծագրում:



Դիսկրետ համակարգի պարզագույն մոդելը

$x(n)$  - ը և  $y(n)$  - ը կապված են  $y(n) = \Phi[x(n)]$  անջուրյամբ, որտեղ  $\Phi$  օպերատորի տեսքը կախված է կոնկրետ համակարգից: Նշենք, որ գործնականում հանդիպող դեպքերում  $\Phi$  - ն հանդիսանում է անընդհատ օպերատոր:

Ենթադրենք  $\Phi$  համակարգի մուտքին տալով  $x_1(n)$  և  $x_2(n)$  դիսկրետ ազդանշանները, ելքում ստանում ենք  $y_1(n)$  և  $y_2(n)$  ազդանշանները:

**Սահմանում.**  $\Phi$  համակարգը կոչվում է գծային, եթե ցանկացած  $\alpha$  և  $\beta$  հաստատունների համար համակարգի մուտքին տալով

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}$$

ազդանշանը, ելքում կստանանք  $\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}$  ազդանշանը:

**Սահմանում.**  $\Phi$  համակարգը կոչվում է հաստատուն պարամետրերով համակարգ, եթե

$$\Phi(\vec{x}) = \vec{y}$$

հավասարությունից բխում է

$$\Phi(\vec{x}) - \vec{y} = \vec{0}$$

հավասարությունը:

**Սահմանում.**  $\vec{h} = \Phi(\vec{0})$  հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգի իմպուլսային բնութագիրը կոչվում է

$$h = \Phi(\vec{0})$$

ազդանշանը:

Ցույց տանք, որ հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգում մուտքային և ելքային հաջորդականությունները կապված են փաթեթա պարունակող արևելքամբ:

Նշանակենք՝  $h[n] = \Phi[n]$  բանի որ

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi[k] \delta[n-k] - \Phi[n]$$

իսկ  $\Phi$  - ն հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգ է, ապա

$$\Phi \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] \right] - \Phi[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi[k] \delta[n-k] - \Phi[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \delta[n-k] - \Phi[n]$$

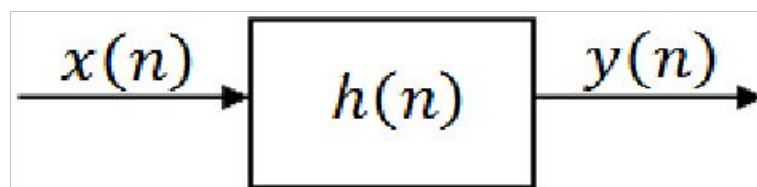
$$h[n] = \Phi \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] \right] - \Phi[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi[k] \delta[n-k] - \Phi[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \delta[n-k] - \Phi[n]$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \delta[n-k] - \Phi[n]$$

Պարզազույն ձևափոխությունից հետո կստանանք՝

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \delta[n-k] - \Phi[n]$$

Այսպիսով, հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգը լիովին որոշվում է իր իմպուլսային բնութագրով՝



Դիսկրետ հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգի մոդելը

Տույց տանք, որ հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգում մուտքային և ելքային հաջորդականությունները կապված են փաթեթ պարունակող առնչությամբ:

Նշանակենք՝  $h[n] = \Phi[n] \circledast \rho[n]$  թանկ որ

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi[n-k] \rho[k]$$

իսկ  $\Phi$  - ն հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգ է, ապա

$$\Phi \circledast \rho[n] - \rho[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi[n-k] \rho[k] - \rho[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] \rho[k] - \rho[n]$$

$$h[n] = \Phi \circledast \rho[n] = \Phi \circledast \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho[k] \delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi \circledast \rho[k] \delta[n-k] - \rho[n]$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] \rho[k]$$

Պարզագույն ձևափոխությունից հետո կստանանք՝

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] \rho[k]$$



## Ֆիզիկապես իրագործելի համակարգեր: Կայունություն

**Սահմանում.** Հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգը կոչվում է ֆիզիկապես իրագործելի, եթե ելքային ազդանշանի մեծությունը  $\|y\| = \|z\|$  պահին կախված է մուտքային հաջորդականության միայն  $\|x\| \leq \|z\|$  համարներով անդամներից: Դա նշանակում է, որ համակարգի  $h(\omega)$  իմպուլսային բնութագիրը հավասար է զրոյի, երբ  $\omega < 0$   $\square h(\omega) = 0, \omega < 0$ :

Դիտարկվում են նաև ֆիզիկապես անիրագործելի համակարգեր: Այդպիսիք են, օրինակ, ցածր հաճախականության իդեալական ֆիլտրը, ինչպես նաև իդեալական դիֆերենցատորը: Դրանք ունեն տեսական մեծ նշանակություն, սակայն շատ հաճախ կիրառվում են ֆիզիկապես իրագործելի համակարգերի մոտարկումների համար:

**Սահմանում.** Հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգը կոչվում է կայուն, եթե կամայական սահմանափակ մուտքային հաջորդականության համար ելքային հաջորդականությունը ևս սահմանափակ է:

Թեորեմ. Որպեսզի հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգը լինի կայուն անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա  $h$  իմպուլսային բնութագիրը բավարարի հետևյալ անհավասարությանը՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Անհրաժեշտությունը. Ենթադրենք հակառակը

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \infty$$

Դիտարկենք՝  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^{+1} d\tau \geq 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^{-1} d\tau < \infty$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^p d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^p |h(\tau)|^{-p} |h(\tau)|^p d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^{-p} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^p d\tau = \infty,$$

որը հակասում է պայմանին:

Բավարարությունը. Ենթադրենք  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$  և  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$  – մոնոտոնային հաջորդականությունը սահմանափակ է՝  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \leq M$ ,  $M = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^p d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^p |h(\tau)|^{-p} |h(\tau)|^p d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^p |h(\tau)|^{-p} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^p d\tau < \infty$$

## **Հաստատուն գործակիցներով գծային տարբերություններով հավասարումներ**

Համակարգերը, որոնցում մուտքային և ելքային ազդանշանները կապված են հաստատուն գործակիցներով տարբերություններով գծային հավասարումներով, առանձնակի դաս են կազմում: Հաստատուն պարամետրերով համակարգի նկարագրությունը տարբերություններով հավասարումներով հաճախ հնարավորություն է տալիս գտնել համակարգի կառուցման արդյունավետ եղանակներ: Տարբերություններով հավասարումներով կարելի է որոշել դիտարկվող համակարգի բազմաթիվ բնութագրեր, այդ թվում համակարգի կարգը, սեփական հաճախականությունը և նրա բազմապատիկները, փոխանցման գրոյական գործակցին համապատասխան հաճախականությունները և այլն:

Ընդհարուրդ դեպքում  $\mathbb{Z}$  - թիվ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային, տարբերություններով հավասարումը ֆիզիկապես իրագործելի համակարգի համար ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{i=0}^n a_i x_i = b, \quad \sum_{i=0}^n a_i x_i - b = 0, \quad \sum_{i=0}^n a_i x_i - b \geq 0, \quad (1)$$

որտեղ  $a_i$  և  $b$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  գործակիցներով որոշվում է համակարգը: Հավասարումը գրված է ուղղակի տեղադրման եղանակով լուծման համար հարմար տեսքով: Ունենալով  $a_i, b, i = -1, -2, \dots, -n$  սկզբնական արժեքները և մուտքային  $a_i, b$  հաջորդականությունը, ուղղակի տեղադրման միջոցով կգտնենք ելքային  $a_i, b \geq 0$ : հաջորդականությունը:

Որպես օրինակ դիտարկենք համակարգ, որը բնութագրվում է

$$x_{k+1} = -2x_k - 4x_{k-1} - 1, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1 = 0$$

հավասարումով:

Համակարգի մուտքին տալով

$$x_k = k^2 - k,$$

ելքում կստանանք՝

$$x_{k+1} = -2x_k - 4x_{k-1} - 1 = 0,$$

$$x_{k+1} = -2x_k - 4x_{k-1} = 0,$$

$$x_{k+1} = -2x_k - 4x_{k-1} = -4,$$

$$x_{k+1} = -2x_k - 4x_{k-1} = 4,$$

$$x_{k+1} = -2x_k - 4x_{k-1} = -40,$$

$$x_{k+1} = -2x_k - 4x_{k-1} = 110,$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Տարբերություններով հավասարումների լուծումը ուղղակի տեղադրումով տալիս է որոշակի արդյունք, սակայն նպատակահարմար է գտնել հավասարման լուծումը բացահայտ տեսքով: Համառոտ նկարագրենք (1) հավասարման ընդհանուր լուծման կառուցվածքը և կանգ առնենք որոշ հարցերի վրա:

□□

$$\square\square\square\square = -\square \square\square\square\square - \square\square\square\square \geq 0, \quad \square 2 \square$$

□≠1

հավասարումը կանվանենք (1) հավասարմանը համապատասխան համասեր հավասարում: Համասեր հավասարումով և նրա լուծումներով էլ բնութագրվում է համակարգը:

(1) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$\square\square\square\square = \square_0\square\square\square + \square^*\square\square\square \quad \square 3 \square$$

որտեղ  $\square_0\square\square\square$  - ը (2) համասեր հավասարման ընդհանուր լուծումն է,  $\square^*\square\square\square$  - ը (1) հավասարման որևէ մասնավոր լուծում է:

Փնտրենք (2) համասեռ հավասարման լուծումը

$$\square\square\square\square = \square\square$$

տեսքով: Տեղադրելով (3) - ը (2) հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\square\square + \square\square\square^{-1} + \square_2\square\square^{-2} + \dots + \square_{\square}\square\square^{-\square} = 0,$$

կամ՝

$$\square\square^{-\square}\square\square\square + \square\square\square^{-1} + \square_2\square\square^{-2} + \dots + \square_{\square}\square = 0:$$

Քանի որ  $\square\square^{-\square} \neq 0$ , կստանանք՝

$$\square\square + \square\square\square^{-1} + \square_2\square\square^{-2} + \dots + \square_{\square} = 0 \tag{4}$$

(4) հավասարումը կոչվում է (2) հավասարման բնութագրիչ հավասարում, իսկ

$$\square_{\square}\square\square\square = \square\square + \square\square\square^{-1} + \square_2\square\square^{-2} + \dots + \square_{\square} \tag{5}$$

բազմանդամը կոչվում է (1.7) հավասարման բնութագրիչ բազմանդամ:

Ենթադրենք  $\square_1, \square_2, \dots, \square_n$  բազմանդամն ունի  $\square$  հատ իրարից տարբեր իրական արմատներ՝  $\square_1, \square_2, \dots, \square_n$ : Դժվար չէ նկատել, որ այդ դեպքում

$$\square_1 \square_2 \dots \square_n = \square_1^2, \square_2 \square_3 \dots \square_n = \square_2^2, \dots, \square_{n-1} \square_n = \square_{n-1}^2$$

Ֆունկցիաները կլինեն (2) համասեր հավասարման գծորեն անկախ լուծումներ: Հետևաբար, (2) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$\square_1 \square_2 \dots \square_n = \square_1 \square_2 \square_3 \dots \square_n + \square_2 \square_3 \dots \square_n + \dots + \square_{n-1} \square_n \dots \square_n \quad (6)$$

կամ՝

$$\square_1 \square_2 \dots \square_n = \square_1 \square_1^2 + \square_2 \square_2^2 + \dots + \square_{n-1} \square_{n-1}^2$$

որտեղ  $\square_1, \square_2, \dots, \square_{n-1}$  - ը կամայական հաստատուններ են:

Ենթադրենք՝  $\square_1, \square_2, \dots, \square_n$  բազմանդամի գործակիցներն իրական են, նրա արմատներն իրարից տարբեր են, սակայն նրանց մեջ կան կոմպլեքս արմատներ: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր  $\square_1, \square_2, \dots, \square_n$  կոմպլեքս արմատի հերմիտյան կոնյուգատը կամայապես համալուծ  $\square_1, \square_2, \dots, \square_n$  թիվը կա  $\square_1, \square_2, \dots, \square_n$  - ի արմատ է՝  $\square_1, \square_2, \dots, \square_n = 0$ :

Վերցնելով (6) բանաձևում իրար կոմպլեքս համալուծ լուծումների գործակիցները իրար կոմպլեքս համալուծ, կստանանք (2) համասեր հավասարման ընդհանուր (իրական) լուծումը:



ենթադրենք  $\mathbb{Z}_m$  բազմանդամի արմատների մեջ կան բազմապատիկ արմատներ: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ  $\mathbb{Z}_m$  - ն  $\mathbb{Z}$  պատիկ արմատ է: Այդ դեպքում  $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_k$  տեսքի լուծումների մեջ չկան  $\mathbb{Z}$  հատ գծորեն կախված լուծումներ: Հետևաբար, ընդհանուր լուծումը չի կարող ներկայացվել (6) տեսքով: Ուղղակի տեղադրումով կարելի է համոզվել, որ  $\mathbb{Z}_m + \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}$ ,  $m = 0, 1, \dots, m-1$  ֆունկցիաները կլինեն (2) հավասարման լուծումներ: Դժվար չէ համոզվել, որ  $\mathbb{Z}_m + \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}$  ֆունկցիաները գծորեն անկախ են: Հետևաբար, այս դեպքում ևս (2) հավասարման ընդհանուր լուծումը կներկայացվի (6) տեսքով՝

$$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m$$

տեսքով, որտեղ  $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z} \dots, \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m$  - ը (2) հավասարման գծորեն անկախ լուծումներն են,  $\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z}_k$  - ը ցանկացած հաստատուններ են:  $\mathbb{Z}_k$  - ը կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային, տարբերություններով հավասարման ընդհանուր լուծումը պարունակում է  $\mathbb{Z}_k$  հատ կամայական հաստատուններ, որոնք զրոնվում են սկզբնական պայմաններից:

ենթադրենք  $\mathbb{Z}_m$  բազմանդամի արմատների մեջ կան բազմապատիկ արմատներ: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ  $\mathbb{Z}_m$  - ն  $\mathbb{Z}$  պատիկ արմատ է: Այդ դեպքում  $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_k$  տեսքի լուծումների մեջ չկան  $\mathbb{Z}$  հատ գծորեն կախված լուծումներ: Հետևաբար, ընդհանուր լուծումը չի կարող ներկայացվել (6) տեսքով: Ուղղակի տեղադրումով կարելի է համոզվել, որ  $\mathbb{Z}_m + \mathbb{Z}_k \cong \mathbb{Z}_k$ ,  $m = 0, 1, \dots, k-1$  ֆունկցիաները կլինեն (2) հավասարման լուծումներ: Դժվար չէ համոզվել, որ  $\mathbb{Z}_m + \mathbb{Z}_k \cong \mathbb{Z}_k$  ֆունկցիաները գծորեն անկախ են: Հետևաբար, այս դեպքում ևս (2) հավասարման ընդհանուր լուծումը կներկայացվի (6) տեսքով՝

$$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_m + \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_m + \dots + \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_m$$

տեսքով, որտեղ  $\mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_m \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_m \dots, \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_m$  - ը (2) հավասարման գծորեն անկախ լուծումներն են,  $\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_k, \dots, \mathbb{Z}_k$  - ը ցանկացած հաստատուններ են:  $\mathbb{Z}_k$  - ը կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային, տարբերություններով հավասարման ընդհանուր լուծումը պարունակում է  $\mathbb{Z}_k$  հատ կամայական հաստատուններ, որոնք զրոնվում են սկզբնական պայմաններից:

Օրինակ. Անդրադարձանք մեր կողմից արդեն դիտարկված

$$\square\square\square\square = -2\square\square\square\square - 4\square\square\square\square - 1\square\square\square - 1\square = 0, \square\square\square\square = \square^2 - \square$$

հավասարմանը: Համապատասխան համասեր հավասարումը կլինի՝

$$\square\square\square\square + 4\square\square\square\square - 1\square = 0:$$

Փնտրենք համասեր հավասարման լուծումը  $\square\square\square\square = \square^2$  տեսքով:

Տեղադրելով  $\square\square\square\square = \square^2$  համասեր հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\square^2 + 4\square^{\square-1} = 0 \Rightarrow \square^{\square-1}\square + 4 = 0,$$

$$\square^{\square-1} \neq 0 \Rightarrow \square + 4 = 0 \Rightarrow \square = -4:$$

Համասեր հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝  $\square\square\square\square = \square - 4\square^2$ :

Մոտոքային  $\square\square\square\square = \square^2 - \square$  ազդանշանին համապատասխան  $\square^*\square\square\square$

մասնակի լուծումը փնտրենք  $\square^*\square\square\square = \square\square\square^2 + \square\square\square + \square\square$  տեսքով: Տեղադրելով

$\square^*\square\square\square$ -ը անհամասեր հավասարման մեջ կստանանք՝

$$\square\square\square^2 + \square\square\square + \square\square = -2\square\square^2 - \square - 4\square\square\square\square - 1\square^2 + \square\square\square - 1\square + \square\square$$

Վերջին հավասարումից կստանանք՝  $\square\square = -0.4, \square\square = -0.24, \square\square = 0.128$ :

Հետևաբար՝  $\square^*\square\square\square = -0.4\square^2 - 0.24\square + 0.128$ :

$$\square\square\square\square = \square\square\square\square + \square^*\square\square\square = \square - 4\square^2 - 0.4\square^2 - 0.24\square + 0.128:$$

$\square\square - 1\square = 0$  սկզբնական պայմանից կստանանք  $\square = 0.128$ : Ուստի՝

$$\square\square\square\square = \square\square\square\square + \square^*\square\square\square = \square - 1\square^2 \cdot 0.128 \cdot 4^{\square} - 0.4 \cdot \square^2 - 0.24 \cdot \square + 0.128:$$

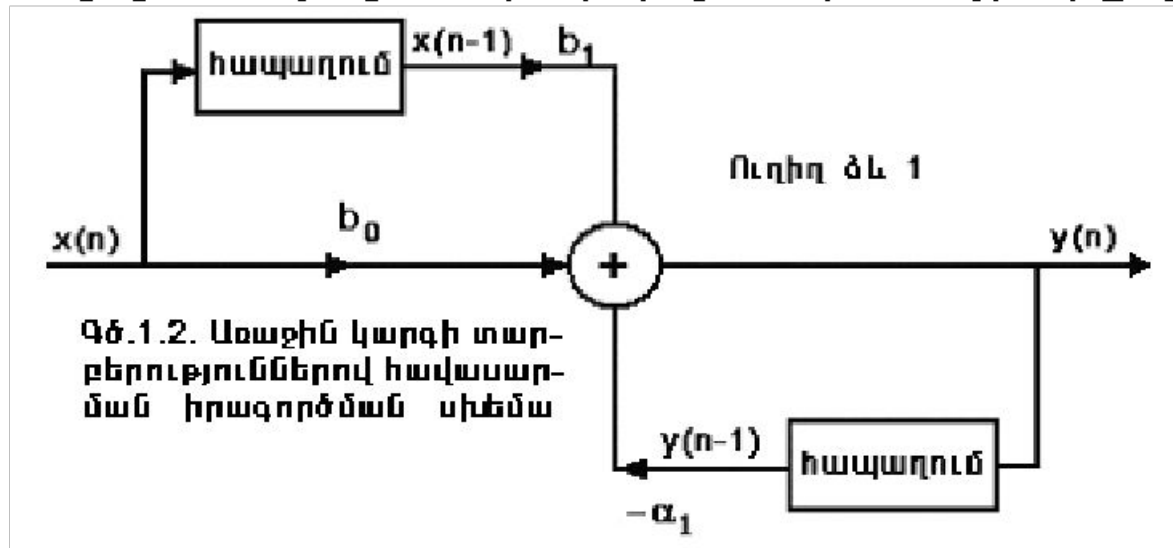
Լուծման ստացված տեսքը հնարավորություն է տալիս ժամանակի կամայական պահին գտնել ելքային ազդանշանի մեծությունը:

Տարբերություններով հավասարումները կարևոր են այնքանով, որ հնարավորություն են տալիս անմիջականորեն կառուցել համակարգը:

Առաջին կարգի

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1]$$

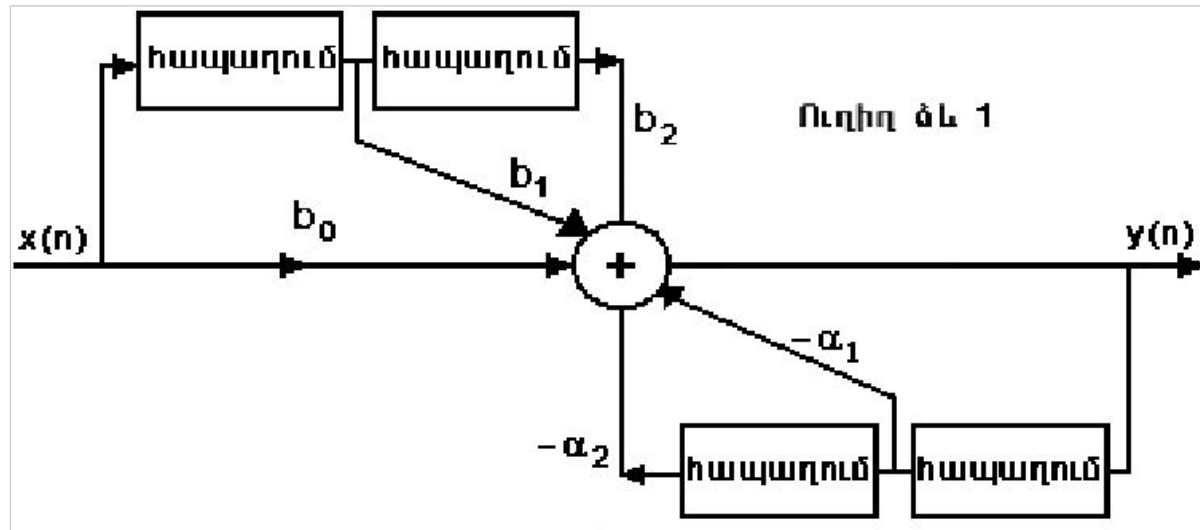
տարբերություններով հավասարումով նկարագրվող համակարգը կարելի է կառուցել հետևյալ ստորև բերված սխեմայի միջոցով:



Սխեմայի կառուցման դիտարկված ձևը, որում մուտքային և ելքային հաջորդականությունների համար օգտագործվում են հապաղման տարբեր տարրեր կոչվում է առաջին ուղիղ ձև:

Երկրորդ կարգի տարբերություններով հավասարման ընդհանուր տեսքն է՝

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) - \alpha_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$



Երկրորդ կարգի տարբերություններով հավասարման իրագործման սխեմա

Հետագայում պարզ կդառնա, որ երկրորդից բարձր կարգի համակարգերը կարող են ներկայացվել առաջին և երկրորդ կարգի համակարգերի հաջորդաբար կամ զուգահեռ միացումների միջոցով:

Մինչև այժմ դիտակում էինք համակարգերի ելքային ազդանշանները կամայական մուտքային ազդանշանների համար: Այժմ գտնենք  $h$  իմպուլսային բնութագրով հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգի ելքային ազդանշանը, երբ նրա մուտքին տրված է

$$x[n] = \delta[n - k], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ազդանշանը: Ելքում կստանանք

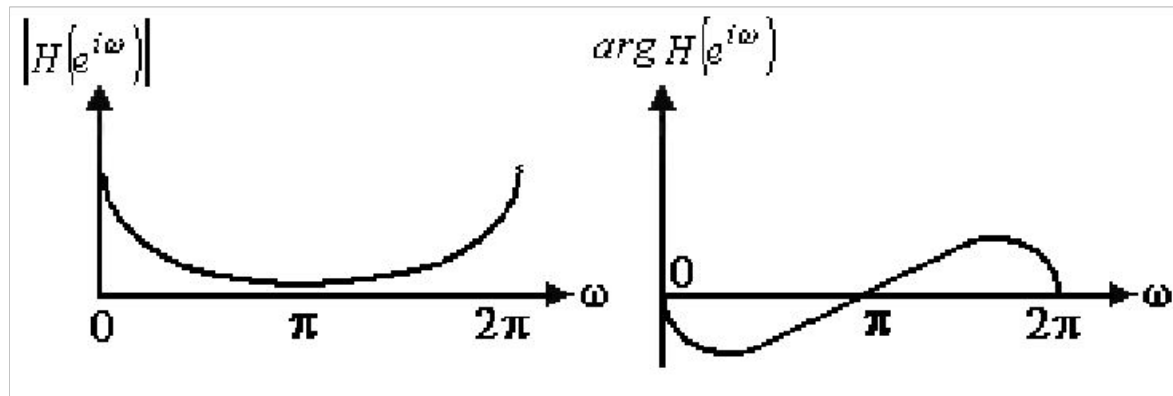
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n - k] x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n - k] \delta[k - k_0] = h[n - k_0]:$$

Ստացանք, որ համակարգի մուտքին տալով  $x[n] = \delta[n - k_0]$ , ելքում ստանում ենք մուտքային ազդանշանը  $\delta[n - k_0]$  արտադրիչի ճշտությամբ:  $\delta[n - k_0]$ -ն կանվանենք համակարգի հաճախականային բնութագիր:

Գտնենք  $h[n] = a^n u[n-1]$   $|a| < 1$  իմպուլսային բնութագրով համակարգի հաճախականային բնութագիրը:

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i\omega(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i\omega n} e^{i\omega} = \frac{1}{1 - a e^{-i\omega}} :$$

Ստորև պատկերված է  $|H(e^{i\omega})|$  - ի մոդուլը և արգումենտը, երբ  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ :



Առաջին կարգի համակարգի իմպուլսային և հաճախականային բնութագրերը

Գտնենք  $h_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k a^k$  իմպուլսային բնութագրով համակարգի հաճախականային բնութագիրը:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{k+1} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h_l a^l a^k = \sum_{l=0}^{\infty} h_l \sum_{k=0}^{\infty} a^{l+k} = \frac{1}{1-a} \sum_{l=0}^{\infty} h_l a^l :$$

Թվարկենք  $\sum_{k=0}^{\infty} h_{k+1} a^k$  հաճախականային բնութագրի որոշ հատկություններ:

1.  $\sum_{k=0}^{\infty} h_{k+1} a^k$  - ն պարբերական ֆունկցիա է  $2\pi$  պարբերությամբ: Դա պայմանավորված նրանով, որ այդպիսին է նրան համապատասխան մուտքային ազդանշանը՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{k+1} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k a^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} h_k a^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} h_k a^{k+1}, \quad a = \pm 1, \pm 2, \dots :$$

2. Եթե  $h_{n+1}$  իմպուլսային բնութագիրն իրական է, ապա

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{k+1} a^k - \sum_{k=0}^{\infty} h_k a^k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k a^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} h_k a^k, \quad 0 \leq k \leq \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{k+1} a^k - \sum_{k=0}^{\infty} h_k a^k = -\sum_{k=0}^{\infty} h_k a^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} h_k a^k, \quad 0 \leq k \leq \infty$$



# ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Դիտարկենք առաջին կարգի տարբերություններով

$$x_{n+1} - x_n = x_n + a \cdot x_{n-1} - 1$$

հավասարումը

$$x - 1 = 0$$

սկզբնական պայմանով:

Համակարգի իմպուլսային և հաճախականային բնութագրերը կլինեն

$$h(\omega) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}, \quad |a| < 1:$$

Հետևաբար՝

$$|h(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}},$$

որտեղ

$$|h(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}},$$

$$|h(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}}:$$

# ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Դիտարկենք երկրորդ կարգի տարբերություններով

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = -1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1) = -1 \cdot (x+1) - 2 \cdot (x-1) + 1$$

հավասարումը

$$(x-1) - 1 = 0, (x+1) - 2 = 0$$

սկզբնական պայմաններով:

Համապատասխան համասեռ հավասարումը կլինի

$$x^2 + 1 \cdot (x+1) - 1 + 1 \cdot (x-1) - 2 = 0:$$

Համապատասխան բնութագրիչ հավասարումը կլինի`

$$\lambda^2 + 1 \cdot \lambda + 1 = 0$$

Այն դեպքում, երբ բնութագրիչ հավասարման  $\lambda_1$  և  $\lambda_2$  արմատներն իրական են և իրարից տարբեր, համասեռ հավասարումով նկարագրվող համակարգի իմպուլսային բնութագիրը կլինի`

$$h(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 x$$

$h(x)$  - ը այս դեպքում նկարագրում է երկու առաջին կարգի համակարգեր:

Եթե  $a^2 + ab + b^2 = 0$  բնութագրիչ հավասարման արմատները կոմպլեքս են  $a^2 - 4b < 0$ , ապա համակարգի իմպուլսային բնութագիրը կլինի

$$h_{\text{ուղի}} = \frac{1}{2\xi} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \cos \omega t, \text{ որտեղ } \omega = \sqrt{a^2 - 4b}, \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 4b}}, \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}}$$

Այս դեպքում  $h_{\text{ուղի}}$  - ով նկարագրվում է երկրորդ կարգի համակարգ, որի հաճախականային բնութագիրը կլինի

$$|G(\omega)| = \frac{1}{1 - 2\xi\omega + \omega^2}$$

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\omega} h_{\text{ուղի}}(\omega)$$

համակարգի հաճախականային բնութագիրը փոփոխականի պարբերական ֆունկցիա է  $2\pi$  պարբերությամբ: Ընդ որում՝

$$h_{\text{ուղի}} = \frac{1}{2\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\omega t) = 0, \pm 1, \dots$$

Վերջին երկու ձևափոխությունների զույգը տեղի ունի ցանկացած  $h_{\text{ուղի}}$  բացարձակ զուգամետ հաջորդականության համար:



## ԹՎԱՅԻՆ ՖԻԼՏՐԵՐ, Z - ձևափոխություն

Հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգերը նպատակահարմար է ուսումնասիրել և նկարագրել նաև Z- ձևափոխության միջոցով:

**Սահմանում.**  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$  հաջորդականության Z ձևափոխությունն կոչվում է հետևյալ ձևական գումարը`

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = \sigma_{|z|=1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}, \quad (2.1)$$

որտեղ z- ը կոմպլեքս փոփոխական է:

Նշանակենք  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = \frac{1}{z}$ ,  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = \frac{1}{z}$

Հայտնի է, որ  $|z| < 1$  դեպքում (2.1) շարքը զուգամետ է  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|z^{-k} < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|$  օղակում, և նրա գումարը`  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$  - ը, այդ օղակում անալիտիկ ֆունկցիա է: Ընդ որում (2.1) - ը  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$  - ֆունկցիայի Լորանի շարքն է: Մյուս կողմից`  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|z^{-k} < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|$  օղակում անալիտիկ կամայական  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|z^{-k}$  ֆունկցիա այդ օղակում վերածվում է (2.1) Լորանի շարքի  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$ ի աստիճաններով, որտեղ

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|z^{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|e^{-jk} e^{j\omega k} d\omega, \quad |z| = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, |z| < 1 < 1 < 1 \quad (2.2)$$

Եթե  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|z^{-k} = 0$ , երբ  $|z| < 1$  և  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|z^{-k} = 0$ , երբ  $|z| > 1$   $-\infty < \omega \leq \omega \leq \omega < \infty$  ապա (2.1) շարքը զուգամետ է կոմպլեքս հարթության վրա ամենուրեք, բացի գուցե  $|z| = 0$  և  $|z| = \infty$  կետերից: Նկատենք, որ (2.2) բանաձևը կարելի է մեկնաբանել նաև որպես հակադարձ Z - ձևափոխություն:

**Սահմանում.** Հաստատուն պարամետրերով թվային գծային համակարգը կանվանենք վերջավոր իմպուլսային բնութագրով (ՎԻԲ) համակարգ, եթե նրա իմպուլսային բնութագիրը վերջավոր երկարությամբ հաջորդականություն է:

Համակարգը կանվանենք անվերջ իմպուլսային բնութագրով (իրագործելի ԱԻՀ) համակարգ, եթե նրա իմպուլսային բնութագիրը պարունակում է անվերջ բազմությամբ բացասական համարներով ոչ զրոյական անդամներ:

Գործնականում ԱԻՀ համակարգեր չեն հանդիպում, սակայն նրանք ներկայացնում են տեսական հետաքրքրություն:

(2.1) ձևափոխությունը կանվանենք նաև երկկողմանի Z - ձևափոխություն, Բազմաթիվ կիրառություններում օգտագործվում է նաև միակողմանի Z - ձևափոխությունը: Այն սահմանվում է հետևյալ ձևով՝

$$X(Z) = \sigma \sum_{n=0}^{\infty} x(n) Z^{-n}. \quad (2.3)$$

Ֆիզիկապես իրագործելի համակարգերի համար ( $h(n) = 0, n < 0$ ) երկկողմանի և միակողմանի Z - ձևափոխությունները համընկնում են:

Դիտարկենք օրինակներ.

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  - ուղ կնշանակենք հաջորդականությունը,  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  - ուղ նրա Z ձևափոխությունը:

$$1. \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1:$$

$$2. \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{-1} x^{k+1} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sigma_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \text{ երբ } |x| > 1:$$

$$3. \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{1-x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sigma_{k=0}^{\infty} x^k = \sigma_{k=0}^{\infty} x^k x^{-1} x^1 = \frac{1}{1-x-x^{-1}}, \text{ երբ } |x| > 1:$$

$$4. \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{1-x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sigma_{k=0}^{\infty} x^k = \sigma_{k=0}^{\infty} x^k \cdot x^{-1} x^1 = \frac{1}{1-x-x^{-1}}, \text{ երբ } |x| > |x|^{-1}$$

## Z - ձևափոխության հասկոյությունները

Դիտարկենք Z - ձևափոխության որոշ հասկոյություններ, որոնք կարևոր են կիրառոյությունների համար:

Ենթադրենք  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ֆունկցիաները  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  - հաջորդականոյությունների Z - ձևափոխոյություններն են:

**1. Թեորեմ.** Z - ձևափոխոյունը գծային է՝ եթէ  $X_1, X_2$  ֆունկցիաները  $x_1, x_2$  հաջորդականոյությունների Z - ձևափոխոյուններն են, ապա  $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1$  - ի Z - ձևափոխոյունը կլինի՝  $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1$ :

**2. Հապաղման թեորեմը.** Եթէ  $\alpha_1$  - ի Z - ձևափոխոյունը  $\alpha_2$  - ն է, ապա  $\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1$  - ի Z - ձևափոխոյունը կլինի  $\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1$ :

Առաջին երկու թեորեմների ապացոյցներն ակնհայտ են:

Քանիոր  $\alpha_1 - 1$  - ի Z - ձևափոխոյունը հավասար է  $\alpha_1^{-1}$ , որոշ դեպքերում որպէս հապաղման տարր սիմվոլիկ կերպով կօգտագործենք  $\alpha_1^{-1}$  - ը:



Դիտարկենք հապաղման թեորեմը միակողմանի  $Z$ -ձևափոխության համար: Ենթադրենք՝  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  և  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sigma_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n-k}$ :

Գտնենք  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ -ի միակողմանի  $Z$ -ձևափոխությունը:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n-k} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n-k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n-k} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n-k} z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n-k} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} c_k z^{n-k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n-k} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} c_k z^{n-k} z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n-k} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} c_k z^{n-k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n-k} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} c_k z^{n-k} z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n-k} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} c_k z^{n-k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n-k} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} c_k z^{n-k} z^n = \end{aligned}$$

Եթե  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$ , երբ  $z < 0$ , ապա  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ , այսինքն հապաղման թեորեմը կընդունի նույն տեսքը, ինչ որ երկկողմանի հաջորդականությունների համար:

Մյուս կողմից, եթե  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  որտեղ  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ -ն բնական թիվ է, կստանանք՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n - \sigma_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n-k} z^n:$$

Վերջին բանաձևերը կիրառվում են նաև տարբերություններով հավասարումների լուծման ժամանակ:

3. **Փաթեթի թեորեմը.** Եթե  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  - ը  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$   $h$ -ազդանշանների  $Z$ -  
 - ձևափոխություններն են, ապա  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \sigma_{n=-\infty}^{\infty} \{a_n\} h(n)$   
 ազդանշանի  $Z$ - ձևափոխությունը կլինի  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ : Իրոք.

$$\begin{aligned} \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} &= \sigma_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_{m=-\infty}^{\infty} \{a_m\} h(m) \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} = \sigma_{m=-\infty}^{\infty} \{a_m\} \sigma_{n=-\infty}^{\infty} h(m) \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} = \\ &= \sigma_{m=-\infty}^{\infty} \{a_m\} \sigma_{n=-\infty}^{\infty} h(m) \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \sigma_{m=-\infty}^{\infty} \{a_m\} \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} \sigma_{n=-\infty}^{\infty} h(m) \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \end{aligned}$$

4. **Թեորեմ.** Եթե  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{a_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \cdot \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ապա

$$\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \{a_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (2.4)$$

Որտեղ  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  - ը ողորկ փակ կոր է, որով սահմանափակված ներքին  
 տիրույթը պարունակում է  $n=0$  կետը,  $\{a_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  - ը  $\{a_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$   
 $\{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$   $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  - ի  $Z$ -ձևափոխություններն են:

### Ապացույց

$$\begin{aligned} \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} &= \sigma_{n=-\infty}^{\infty} \{a_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} = \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \sigma_{n=-\infty}^{\infty} \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{a_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \\ &= \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \{a_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_{n=-\infty}^{\infty} \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \{a_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Վերջին բանաձևից բխում է նաև Պարսևալի հավասարությունը`

$$\sigma_{n=-\infty}^{\infty} \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \{a_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{-1} \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^2$$

# ՏԱՐԲԵՐՈՒ ԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ Z ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ

Նախ դիտարկենք առաջին կարգի

$$f(x) = a f(x-1) + f(x) \tag{2.5}$$

տարբերություններով հավասարումը,  $f(-1) = \lambda$  սկզբնական պայմանով: Ենթադրենք՝  $f(x) = a^x f_{-1}(x)$ : (2.5) հավասարման երկու կողմեր նկատմամբ կիրառենք միակողմանի Z - ձևափոխություն, կստանանք՝

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) z^x = a \sum_{x=0}^{\infty} f(x-1) z^x + \sum_{x=0}^{\infty} f(x) z^x:$$

Հապաղման թեորեմից կբխի

$$f(x) = a z^{-1} f(x) + f(x-1) + f(x):$$

Հետևաբար՝

$$f(x) = \frac{f(x) + f(x-1)}{1 - a z^{-1}}:$$

Հաշվի առնելով, որ  $f(x) = a^x f_{-1}(x)$ ,  $f(x) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$ , կստանանք

$$f(x) = \frac{a^x}{1 - a z^{-1}} + \frac{1}{(1 - a z^{-1})(1 - a z^{-1})},$$

կամ

$$f(x) = \frac{a^x}{1 - a z^{-1}} - \frac{f(x-1)}{(1 - a z^{-1})} + \frac{f(x-1)}{(1 - a z^{-1})}:$$

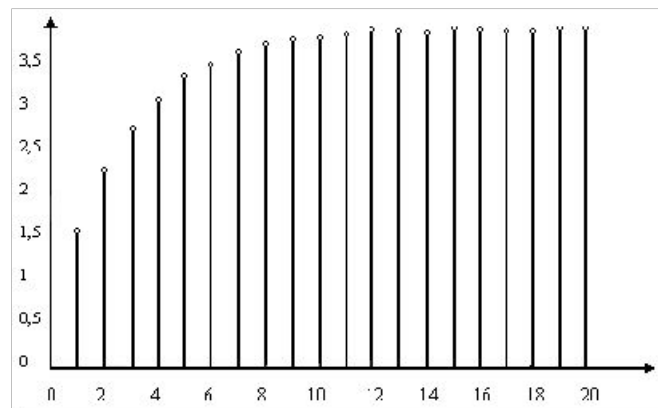
Կատարելով հակադարձ Z - ձևափոխություն, կստանանք՝

$$Z(z) = \lambda z^{n+1} - \frac{z^{n+1}}{z-1} + \frac{z^{n+1}}{z-1} z^{-1}(z):$$

Փակագծերում գտնվող արտահայտության առաջին գումարելին սկզբնական պայմաններից կախված էլքային ազդանշանն է: Երկրորդ գումարելին համակարգի փոխանցման բնութագիրն է՝ համակարգի մուտքային ազդեցությամբ առաջացած սեփական տատանումներն են: Երրորդ գումարելին համակարգի ստիպողական տատանումներն են: Երբ  $\lambda = 0$ ,  $z = 1$ , այսինքն  $Z(z) = z^{-1}Z(z)$ , համակարգի անցումային բնութագիրը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$Z(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} z^{-1}(z):$$

Ստորև բերված գծագրում պատկերված է համակարգի փոխանցման բնութագիրը, երբ  $\lambda = 0.7$ :



## ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ (ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ) ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Առաջին գլխում հաստատուն պարամետրերով գծային համակարգերը նկարագրված են իրենց իմպուլսային և հաճախականային բնութագրերի միջոցով: Այժմ նկարագրենք համակարգը  $Z$  - ձևափոխության միջոցով:

Այսուհետև  $\square\square\square\square$ ,  $\square\square\square\square$   $h\square\square\square$  - ով կնշանակենք համակարգի մուտքային, ելքային ազդանշանները և համակարգի իմպուլսային նբնութագիրը,  $\square\square\square\square$ ,  $\square\square\square\square$   $\square\square\square\square$  - ով՝ նրանց  $Z$  - ձևափոխությունները:

Քանի որ  $\square\square\square\square = \square\square\square * h\square\square\square$  ապա  $\square\square\square\square = \square\square\square\square\square\square\square\square$ :

$\square\square\square\square$  - ը անվանում են նաև համակարգի փոխանցման ֆունկցիա, կամ համակարգի ֆունկցիա: Միավոր շրջանագծի վրա ( $\omega = 1$ ) այն համընկնում է համակարգի հաճախականային բնութագրի հետ:

Երկրորդ գլխում ապացուցել ենք, որ համակարգի կայունության համարանիշաձեռն է և բավարար, որպեսզի  $\sigma_{\text{min}}^{\infty} \ll \sigma_{\text{max}}^{\infty} < \infty$ : Հետևաբար, համակարգի կայունության համարանիշաձեռն է և բավարար, որպեսզի միավոր շրջանագիծն ընկած լինի  $h_{\text{min}}$  - ի  $Z$  - ձևափոխության զուգամիտության տիրույթի մեջ: Ավելին՝ կայուն և ֆիզիկապես իրագործելի համակարգի համար  $h_{\text{min}}$  - ի  $Z$  - ձևափոխության զուգամիտության տիրույթը պարունակում է և՛ միավոր շրջանագիծը, և՛ կոմպլեքս հարթության նրանից դուրս գտնվող մասը, ներառյալ անվերջ հեռու կետը:

Ենթադրենք՝ համակարգը նկարագրվում է  $\text{SS}$  - ռդ կարգի հաստատուն գործակիցներով, գծային տարբերություններով հավասարումով՝

$$\sigma_{\text{min}}^{\text{SS}}(\text{SS}(s)) = \sigma_{\text{min}}^{\text{SS}}(\text{SS}(s) - \text{SS}(s)) \quad (2.6)$$

Գտնենք համակարգի (փոխանցման) ֆունկցիան: Կիրառենք  $Z$  - ձևափոխություն հավասարման երկու մասերին կատմամբ, կստանանք՝

$$\sigma_{\text{min}}^{\text{SS}}(\text{SS}(z)) = \sigma_{\text{min}}^{\text{SS}}(\text{SS}(z) - \text{SS}(z)) \quad (2.7)$$

## Հետևաբար՝

$$\mathbb{K}(n) = \frac{\mathbb{K}(n)}{\mathbb{K}(n)} = \frac{\sigma_{\mathbb{K}(n)=0}(\mathbb{K}(n)) \mathbb{K}^{-n}}{\sigma_{\mathbb{K}(n)=0}(\mathbb{K}(n)) \mathbb{K}^{-n}}, \quad (2.8)$$

## կամ՝

$$\mathbb{K}(n) = \mathbb{K} \frac{\zeta_{\mathbb{K}(n)=1}(1 - \mathbb{K} \mathbb{K}^{-1})}{\zeta_{\mathbb{K}(n)=1}(1 - \xi_{\mathbb{K}(n)} \mathbb{K}^{-1})}. \quad (2.9)$$

Նկատենք, որ  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\mathbb{K}(n)}$ ,  $\mathbb{K} = 1, 2, \dots, \mathbb{K}$  կետերը  $\mathbb{K} \mathbb{K} \mathbb{K}$  - ի համար կլինեն զրոներ,  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\mathbb{K}(n)}$ ,  $\mathbb{K} = 1, 2, \dots, \mathbb{K}$  կետերը՝ բևեռներ, իսկ  $\mathbb{K} = 0$  կետը կլինի  $\mathbb{K} - \mathbb{K}$  կարգի բևեռ, երբ  $\mathbb{K} > \mathbb{K}$   $\mathbb{K} - \mathbb{K}$  կարգի զրո, երբ  $\mathbb{K} < \mathbb{K}$  և վերացնելի եզակի կետ, երբ  $\mathbb{K} = \mathbb{K}$ :

Այսպիսով, եթե հայտնի են  $\mathbb{K} \mathbb{K} \mathbb{K}$  - ի զրոները և բևեռները, ապա  $\mathbb{K} \mathbb{K} \mathbb{K}$  - ը կարող է վերականգնվել  $\mathbb{K}$  հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ:

Եթե համակարգը կայուն է, ապա  $\mathbb{K} \mathbb{K} \mathbb{K}$  - ի բևեռներն ընկած են միավոր շրջանի ներսում, իսկ միավոր շրջանագիծն ընկած է  $\mathbb{K} \mathbb{K} \mathbb{K}$  - ի շարքի գուլգամիտության տիրույթի մեջ:

Դիտարկենք օրինակ. Ենթադրենք ֆիզիկապես իրագործելի համակարգը տրված է

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos(\omega t)$$

հավասարումով: Նրա փոխանցման ֆունկցիան կլինի՝

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

Քանի որ համակարգը ֆիզիկապես իրագործելի է

$$\frac{1}{1 - \omega^2 + i\gamma\omega} = \sigma_{\omega=0}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega,$$

շարքը զուգամետ է  $\omega > \omega_0$  հետևաբար  $H(\omega) = H(\omega_0 - \omega)$ :

Մասնավորապես, եթե (2.8) - ում  $\gamma = 0$ , համակարգը չունի այլ բևեռներ, բացի  $\omega = 0$  կետից, և նրա իմպուլսային բնութագիրը վերջավոր երկարության հաջորդականություն է: Երբ  $\gamma > 0$ , համակարգն ունի այլ բևեռներ բացի  $\omega = 0$  կետից, և նրա իմպուլսային բնութագիրը պարունակում է անվերջ բազմությամբ ոչ զրոյական անդամներ:



Համակարգի փոխանցման ֆունկցիան միավոր շրջանագծի վրա գտնելու համար տեղադրենք (2.9) բանաձևի մեջ  $\sigma = \sigma_{\text{տ}}$ , կստանանք՝

$$|G(\sigma_{\text{տ}})| = \frac{\prod_{k=1}^n |1 - \sigma_{\text{տ}} p_k|}{\prod_{k=1}^n |1 - \sigma_{\text{տ}}^{-1} p_k|} \quad (2.10)$$

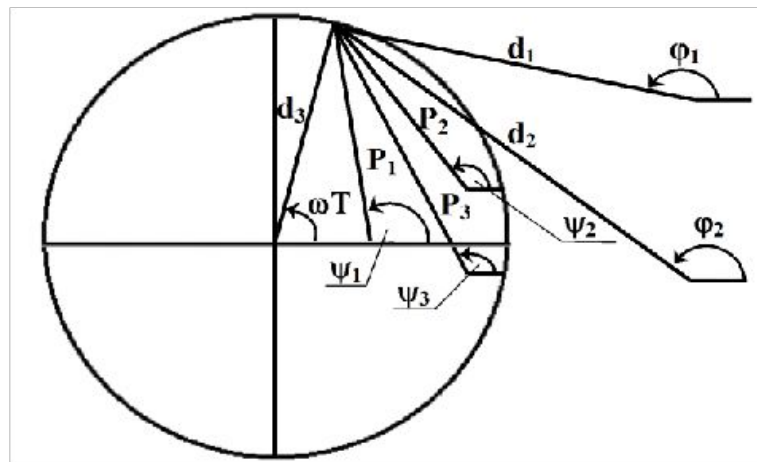
Ներկայացնենք  $\sigma_{\text{տ}} = \sigma_{\text{տ}} e^{j\varphi_{\text{տ}}}$  և

$$\sigma_{\text{տ}}^{-1} = \sigma_{\text{տ}}^{-1} e^{-j\varphi_{\text{տ}}}$$

տեսքով, որտեղ

$$|G(\sigma_{\text{տ}})| = \frac{\prod_{k=1}^n |1 - \sigma_{\text{տ}} p_k|}{\prod_{k=1}^n |1 - \sigma_{\text{տ}}^{-1} p_k|} = \frac{\prod_{k=1}^n |1 - \sigma_{\text{տ}} p_k|}{\prod_{k=1}^n |1 - \sigma_{\text{տ}}^{-1} p_k|} \quad (2.11)$$

$$\arg G(\sigma_{\text{տ}}) = \arg \sigma_{\text{տ}} + \sum_{k=1}^n \arg(1 - \sigma_{\text{տ}} p_k) - \sum_{k=1}^n \arg(1 - \sigma_{\text{տ}}^{-1} p_k). \quad (2.12)$$



Հանդիսականային բևեռագրի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Գծագրում բերված է (2.11) և (2.12) առնչությունների երկրաչափական մեկնաբանությունը: Շրջանագծի  $\omega = \omega^{\text{II}}$  կետից տարված են վեկտորներ դեպի  $\omega(\omega^{\text{II}})$  - ի բոլոր գրոները և բևեռները: Այդ վեկտորների երկարություններով որոշվում է փոխանցման ֆունկցիայի  $\omega(\omega^{\text{II}})$  մոդուլը  $\omega$  հաճախականության համար, իսկ նշված անկյուններով որոշվում է փուլը: Գծագրում դիտարկված օրինակում առկա են երեք բևեռներ ներկու գրոներ, իսկ  $\omega = 1$ : Հետևաբար՝

$$\omega(\omega^{\text{II}}) = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3},$$

$$\omega(\omega^{\text{II}}) = \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1:$$

Փոխանցման ֆունկցիան բոլոր  $0 \leq \omega \leq 1$  հաճախակա նությունների համար կարող ենք գտնել՝ տեղաշարժելով  $\omega$  կետը միավոր շրջանագծի վրայով, ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ  $\omega = 1$  կետից մինչև  $\omega = -1$  կետը:

# ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԻՄՊՈՒԼՍԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐՈՎ (ՎԻԲ) ԹՎԱՅԻՆ ՖԻԼՏՐԵՐ

1.Գծայն փուլային բնութագրով (ՎԻԲ) ֆիլտրերի բնութագիրը: Ենթադրենք՝  $h_{\alpha}(\omega)$  -  $\alpha$ ,  $\omega$  - երկարության ( $0 \leq \omega \leq \alpha - 1$ ) ֆիզիկապես իրագործելի հաջորդականություն է: Նրա  $\alpha$ - ձևափոխությունը կլինի  $H_{\alpha}(\omega) = \sigma_{\alpha}^{-1} h_{\alpha}(\omega)$ : Տեղադրելով  $\omega = \alpha \theta$ , կստանանք՝

$$H_{\alpha}(\omega) = \sigma_{\alpha}^{-1} h_{\alpha}(\omega):$$

$H_{\alpha}(\omega)$  - ն կլինի  $\omega$  - ի  $2\alpha$ պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա՝

$$H_{\alpha}(\omega) = H_{\alpha}(\omega + 2\alpha), \alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots:$$

$H_{\alpha}(\omega)$  - նկարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$H_{\alpha}(\omega) = \pm H_{\alpha}(\omega) H_{\alpha}(\theta), \quad (2.13)$$

երբ  $h_{\alpha}(\omega)$  - ը իրական հաջորդականություն է, կստանանք՝

$$H_{\alpha}(\omega) = H_{\alpha}(\omega), 0 \leq \omega \leq \pi, \theta(\omega) = -\theta(\omega):$$

Նկատենք, որ համակարգը կունենա խիստ գծային փուլային բնութագիր, երբ

$$\alpha = -\alpha, -\alpha \leq \alpha < \alpha \quad (2.14)$$

որտեղ  $\alpha$  -ն փուլային հապաղումն է:

Հաշվի առնելով (2.13) և (2.14) հավասարությունները, կարող ենք գրել

$$\sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} = \sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \cos \alpha \omega = \pm \sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \cos \alpha \omega: \quad (2.15)$$

Վերադառնալով`

$$\pm \sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \cos \alpha \omega = \sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \cos \alpha \omega$$

$$\pm \sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \sin \alpha \omega = \sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \sin \alpha \omega:$$

Բաժանելով վերջին հավասարությունը իր նախորդի վրա, կստանանք`

$$\frac{\sin \alpha \omega}{\cos \alpha \omega} = \frac{\sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \sin \alpha \omega}{\sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \cos \alpha \omega}.$$

$\alpha = 0$  դեպքում կստանանք  $h_{\alpha} = 0$ , երբ  $\alpha \neq 0$ : Այս դեպքը հետաքրքրություն չի ներկայացնում, քանի որ իմպուլսային բնութագիրը բաղկացած է մեկ միայնակ իմպուլսից:  $\alpha \neq 0$  դեպքում կստանանք`

$$\sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \cos \alpha \omega \sin \alpha \omega - \sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \sin \alpha \omega \cos \alpha \omega = 0, \text{ կամ}$$

$$\sigma_{\alpha=0}^{-1} h_{\alpha} \sin \alpha \omega - \alpha \omega = 0:$$

Նկատենք, որ ստացված հավասարման լուծումը պետք է բավարարի

$$h_{\alpha} = h_{\alpha} - 1 - \alpha \omega, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha - 1, \quad (2.16)$$

$$\alpha = \frac{\alpha - 1}{2}: \quad (2.17)$$

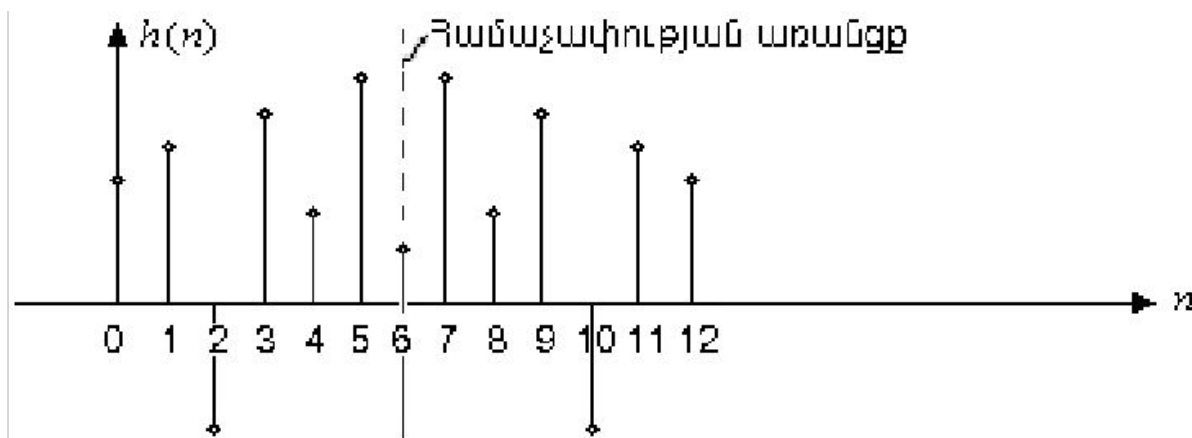
պայմաններին:

(2.16) ապայմանից բխում է, որ յուրաքանչյուր  $\alpha$ -ի համար գոյություն ունի միակ փոփոխյին հապաղում, որի դեպքում  $\Phi$ -ի կոմենսա գծային փոփոխյին բնութագիր:

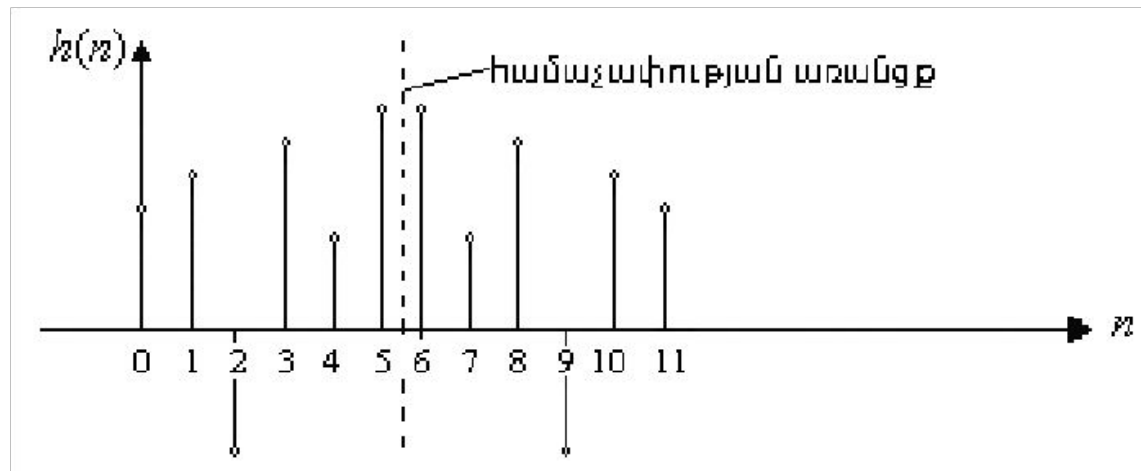
(2.16) ապայմանից բխում է, որ (2.17) ապայմանին բավարարող  $\alpha$ -ի համար  $\Phi$ -ի իմպուլսային բնութագիրը պետք է համաչափ լինի որոշակի կետի նկատմամբ:

Երբ  $\alpha$ -ը կենտ է,  $\alpha$ -ն ամբողջ թիվ է,  $\Phi$ -ի հապաղումը հավասար է ամբողջ թվով դիսկրետացման միջակայքերի: Երբ  $\alpha$ -ը գույգ է,  $\alpha$ -ն ամբողջ թիվ չէ,  $\Phi$ -ի հապաղումը հավասար չէ ամբողջ թվով դիսկրետացման միջակայքերի:

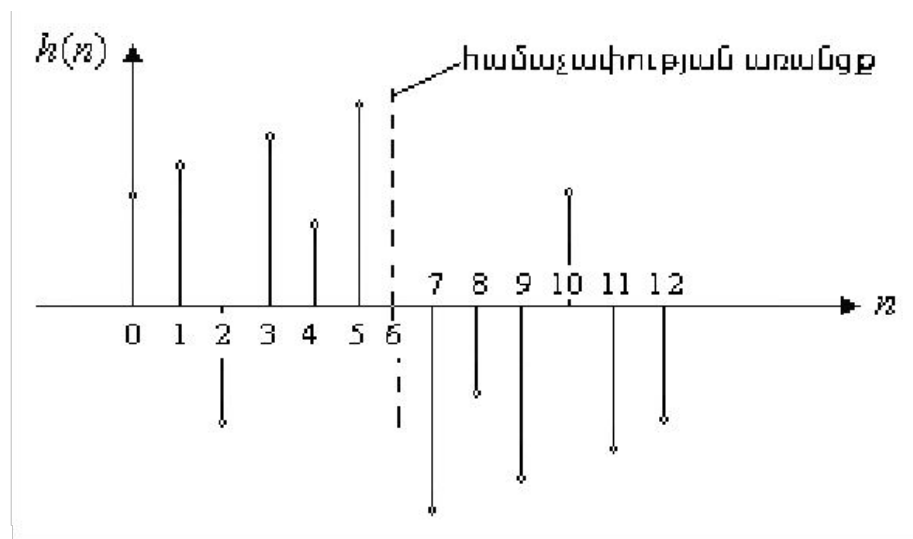
Բերենք գծային փոփոխյին բնութագրերով տարբեր (ՎԻԲ)  $\Phi$ -երի իմպուլսային բնութագրեր, որոնց հապաղումները հավասար են ամբողջ կամ կոտորակային թվով դիսկրետացման միջակայքերի:



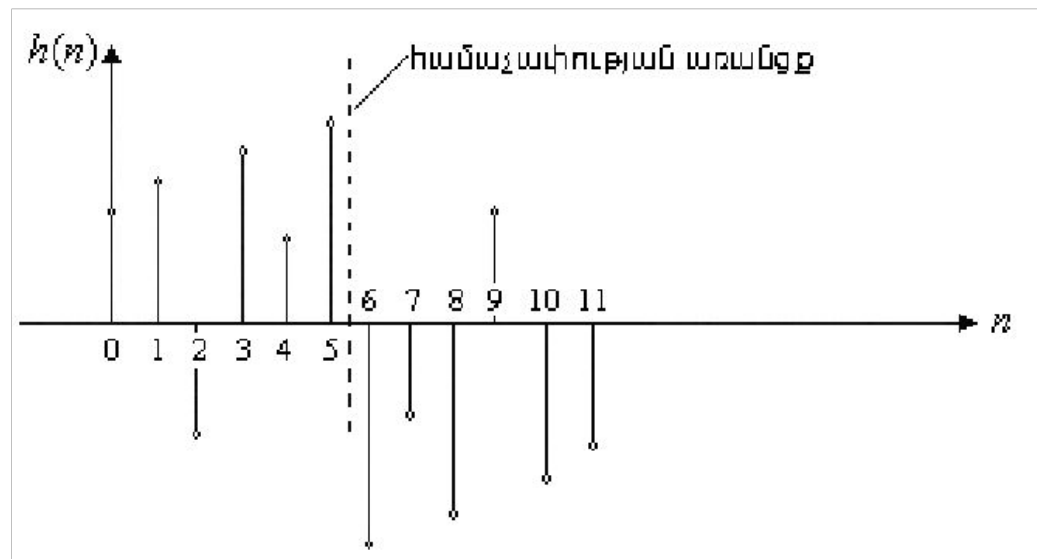
Գծապիր 2.3.  $N = 13$ ,  $M = 6$ :  
զժ.



Գծապիր 2.4.  $N = 12$ ,  $M = 5,5$ :



Գծադիր 2.5.  $\square\square = 13$ ,  $\square\square = 6$ :



Գծադիր 2.6.  $\square\square = 12$ ,  $\square\square = 5,5$ :

Կան նաև Ֆիլտրերի մի քանի կարևոր տեսակներ, որոնցում հապաղումը հավասար չէ ամբողջ թվով դիսկրետացման միջակայքերի (Ֆիլտրի իմպուլսային բնութագիրը բաղկացած է  $\beta$  զույգ թվով տարրերից):

**Սահմանում.** Ֆիլտրի խմբակային հապաղում ասելով կհասկանանք նրա փուլային բնութագրի ածանցյալն ըստ անկյունային հաճախականության վերցրած միևուրև նշանով:

Եթե Ֆիլտրի փուլային բնութագրի գծայնության փոխարեն պահանջենք, որ նրա խմբակային հապաղումը լինի հաստատուն, ապա կարող ենք սահմանել Ֆիլտրերի գծային փուլով ևս մեկ տեսակ՝ Ֆիլտրեր, որոնց փուլային բնութագիրը կտոր առ կտոր գծային է:

Այդպիսի Ֆիլտրերի համար կունենանք՝

$$H(\omega) = \pm \sum_{k=0}^{M-1} h_k e^{-j\omega k} \beta^{-\alpha \omega} \quad (2.18)$$

Դժվար չէ ապացուցել, որ այդ դեպքում

$$\alpha = \frac{M-1}{2}, \quad h_k = \pm \frac{1}{2}, \quad h_{k+1} = -h_k - 1 - \beta, \quad 0 \leq k \leq M-1: \quad (2.19)$$



# ԳՆԱՅԻՆ ՓՈՒԼԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՎ (ՎԻԲ) ՖԻԼՏՐԵՐԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Ենթադրենք (ՎԻԲ) ֆիլտրի հաճախականային բնութագիրը որոշվում է

$$|H(\omega)|^2 = |H^*(\omega)|^2 |H(\omega)|^{-\alpha\omega}, \quad (2.20)$$

որտեղ  $|H^*(\omega)|^2$  - ն իրական ֆունկցիա է,  $|H(\omega)|^2$  - ն և  $|H(\omega)|^{-\alpha\omega}$  - ն որոշվում են (2.19) բանաձևից: Գտնենք  $|H^*(\omega)|^2$  - ի արտահայտությունը, կախված ֆիլտրի իմպուլսային բնութագրից, վերը դիտարկված (ՎԻԲ) ֆիլտրերի համար:

1. Իմպուլսային բնութագիրը համաչափ է, և  $|H(\omega)|^2$  - ը կենտ է (գծ. 2.3):

$$|H(\omega)|^2 = \sigma_{\omega=0}^{\frac{\omega-3}{2}} h(\omega) + h\left(\frac{\omega-1}{2}\right) + \sigma_{\omega=\frac{\omega+1}{2}}^{\omega-1} h(\omega):$$

Վերջին հավասարությունը համարժեք է հետևյալին.

$$|H(\omega)|^2 = \sigma_{\omega=0}^{\frac{\omega-3}{2}} h(\omega) + h\left(\frac{\omega-1}{2}\right) + \sigma_{\omega=0}^{\frac{\omega-3}{2}} h(\omega-1-\omega):$$

Քանի որ  $h(\omega) = h(\omega-1-\omega)$   $0 \leq \omega \leq \omega-1$ , կստանանք՝

$$|H(\omega)|^2 = \sigma_{\omega=0}^{\frac{\omega-3}{2}} h(\omega) + \sigma_{\omega=0}^{\frac{\omega-3}{2}} h(\omega-1-\omega) + h\left(\frac{\omega-1}{2}\right),$$

կամ՝ 
$$|H(\omega)|^2 = \sigma_{\omega=0}^{\frac{\omega-3}{2}} 2h(\omega) \cos\left(\frac{\omega-1}{2}\right) - h(\omega) + h\left(\frac{\omega-1}{2}\right):$$

Վերջին հավասարությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{kh}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{h}{2} f\left(\frac{kh}{n}\right) + 2h \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} f\left(\frac{(k+2j)h}{n}\right) \cos\left(\frac{j\pi kh}{n}\right) + h \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-k-1}{2} \rfloor} f\left(\frac{(k+2j+1)h}{n}\right) \cos\left(\frac{j\pi kh}{n}\right) \right]$$

երբ

$$f(0) = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{kh}{n}\right), \quad \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+2j)h}{n}\right) = 2h \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} f\left(\frac{(k+2j)h}{n}\right), \quad j = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2},$$

կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{kh}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left[ \frac{h}{2} f\left(\frac{kh}{n}\right) + 2h \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} f\left(\frac{(k+2j)h}{n}\right) \cos\left(\frac{j\pi kh}{n}\right) + h \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-k-1}{2} \rfloor} f\left(\frac{(k+2j+1)h}{n}\right) \cos\left(\frac{j\pi kh}{n}\right) \right]$$

Հետևաբար առաջին տիպի ֆիլտրի համար

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{kh}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left[ \frac{h}{2} f\left(\frac{kh}{n}\right) + 2h \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} f\left(\frac{(k+2j)h}{n}\right) \cos\left(\frac{j\pi kh}{n}\right) \right]$$



3. Իմպուլսային բնութագիրը հակահամաչափ է, և  $\alpha$ -ը կենտ է (զճ. 2.5):  
Այս դեպքում կունենանք

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h \left( \frac{t}{2} \right)^{\alpha-1} \sigma_{\omega=0}^{\frac{\alpha-3}{2}} 2h \left( \frac{t}{2} \right)^{\alpha-1} - \cos(\omega t) dt,$$

Ընդ որում  $h \left( \frac{t}{2} \right)^{\alpha-1} = 0$ : Նշանակենք

$\omega_k = 2h \left( \frac{t}{2} \right)^{\alpha-1} - \cos(\omega_k t)$ , երբ  $k = 1, 2, \dots, \frac{\alpha-1}{2}$ , կստանանք՝

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{t}{2} \right)^{\alpha-1} \sigma_{\omega=1}^{\frac{\alpha-1}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{\alpha-1}{2}} \sin(\omega_k t) dt: \quad (2.21)$$

Երրորդ տիպի ֆիլտրի համար կստացվի՝

$$F(\omega) = \sigma_{\omega=1}^{\frac{\alpha-1}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{\alpha-1}{2}} \sin(\omega_k t)$$

Նկատենք, որ  $F(\omega) = 0$ , երբ  $\omega = 0$ , և  $\omega = \pm \omega_k$  անկախ  $h$ -ի,  $\alpha$ -ի արժեքներից: (2.21) ից բխում է, որ հաճախականային ֆիլտրի բնութագիրը կլինի կեղծ ֆունկցիա, եթե հաշվի չառնենք (2.20) ուս  $\beta - \alpha$  արտադրիչը: Ֆիլտրերի այս տեսակը նպատակահարմար է օգտագործել Հիլբերտի ձևափոխիչներում և դիֆերենցատորներում [3]:



## ԳԾԱՅԻՆ ՓՈՒԼՈՎ ՎԻՔ ՖԻԼՏՐԵՐԻ ՉՐՈՆԵՐԻ ՏԵՂԱԲԱՇԽՈՒՄԸ

Գծայն փուլով վ.ի.բ ֆիլտրի զրոների տեղաբաշխումը պայմանավորված է նրա իմպուլսային բնութագրի համաչափությամբ: Այդպիսի ֆիլտրի զրոները կարելի է գտնել իմպուլսային բնութագրի  $z$  - ձևափոխությամբ՝

$$\begin{aligned} \sigma_{z=0}^{-1} h_{z=0}^{-1} &= h_{z=0} + h_{z=0}^{-1} + h_{z=0}^{-2} + \\ &+ \dots \pm h_{z=0}^{-3} \pm h_{z=0}^{-2} \pm h_{z=0}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

որտեղ "+" և "-" նշանները համապատասխանում են համաչափ և հակահամաչափ իմպուլսային բնութագրերին: (2.22) - ից կստանանք՝

$$\begin{aligned} \sigma_{z=0}^{-1} h_{z=0}^{-1} &= \frac{\sigma_{z=0}^{-1}}{2} \left[ h_{z=0}^{-1} \pm \frac{\sigma_{z=0}^{-1}}{2} \right] + \\ &+ h_{z=0}^{-3} \pm \frac{\sigma_{z=0}^{-3}}{2} + h_{z=0}^{-5} \pm \frac{\sigma_{z=0}^{-5}}{2} + \dots: \end{aligned} \quad (2.23)$$

Տեղադրելով (2.23) - ի մեջ  $\sigma_{z=0}^{-1}$  ի փոխարեն  $\sigma_{z=0}^{-1}$ , կստանանք՝

$$\begin{aligned} \sigma_{z=0}^{-1} h_{z=0}^{-1} &= \frac{\sigma_{z=0}^{-1}}{2} \left[ h_{z=0}^{-1} \pm \frac{\sigma_{z=0}^{-1}}{2} \right] + \\ &+ h_{z=0}^{-3} \pm \frac{\sigma_{z=0}^{-3}}{2} + h_{z=0}^{-5} \pm \frac{\sigma_{z=0}^{-5}}{2} + \dots: \end{aligned} \quad (2.24)$$

Նկատենք, որ

$$\cos^2 \theta = \pm \cos^2 \theta \quad (2.25)$$

Ենթադրենք՝  $\cos^2 \theta$ -ը ունի կոմպլեքս արմատ  $\alpha = \cos^2 \theta$  կետում, ընդ որում՝  $\alpha \neq 1$ ,  $\alpha \neq -1$ ,  $\theta \neq 0$ ,  $\theta \neq \pi$  Այդ դեպքում  $\cos^2 \theta$ -ը կունենա արմատ  $\alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cos^2 \theta$  կետում: Քանի որ ֆիլտրի իմպուլսային բնութագիրն իրական է, ապա  $\cos^2 \theta$ -ի յուրաքանչյուր արմատի կոմպլեքս համալուծը կա  $\cos^2 \theta$ -ի արմատ է: Հետևաբար, եթե  $\cos^2 \theta$ -ը ունի կոմպլեքս արմատ  $\alpha = \cos^2 \theta$  ( $\alpha \neq 1, \alpha \neq -1$ ) կետում ( $\alpha \neq 1, \theta \neq 0, \pi$ ), ապա  $\cos^2 \theta$ -ը պարունակում է

$$\cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta$$

արտադրիչ, կամ՝

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= 1 - 2 \frac{\cos^2 \theta + 1}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta + \\ &+ \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} + 4 \cos^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \frac{\cos^2 \theta + 1}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta + \cos^2 \theta: \end{aligned}$$

Երբ  $\cos \theta = 1, \sin \theta \neq 0, \cos \theta \neq \pm 1, \sin \theta = \pm 1$  - ն  $\cos \theta = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  - ն գտնվում են միավոր շրջանագծի վրա ու  $\cos \theta - 1$ -ի և  $\cos \theta + 1$ -ի արմատներ են : Այս դեպքում  $\cos \theta - 1$  - ը պարունակում է հետևյալ տեսքի արտադրիչ՝

$$\cos \theta - 1 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta = (1 - \cos \theta)^2 \quad (2.26)$$

Երբ  $\cos \theta \neq 1$ , և  $\sin \theta = 0$ , կամ  $\cos \theta = \pm 1, \sin \theta = 0$  - ն կլինի իրական, և  $\cos \theta - 1$  - ը կպարունակի հետևյալ տեսքի արտադրիչ՝

$$\cos \theta - 1 = \cos^2 \theta \pm \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \pm \sin^2 \theta = \pm \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = 1 \pm \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} + \cos^2 \theta,$$

որտեղ "+" - ը համապատասխանում է  $\cos \theta = 1$  "-" - ը՝  $\sin \theta = 0$  արժեքին: Վերջապես, երբ  $\cos \theta = 1$ , և  $\sin \theta = 0$ , կամ  $\sin \theta = \pm 1, \cos \theta = 0$ , կամ  $\cos \theta = -1$ , և  $\sin \theta = 0$  - ը կպարունակի հետևյալ տեսքի արտադրիչ՝

$$\cos \theta - 1 = \pm \sin^2 \theta \quad (2.27)$$

(2.27) տեսքի արտադրիչներով նկարագրվում են համակարգերը, որոնցում հապաղումը հավասար է դիսկրետացման միջակայքի կեսին: Ուստի, երբ համակարգի իմպուլսային բնութագրի երկարությունը  $\pm 1$  - ը, հավասար է կեսո թվի, համակարգը պետք է չպարունակի (2.27) տեսքի արտադրիչ կամ պետք է պարունակի այդ տեսքի գույգ թվով արտադրիչներ:



## ԳԾԱՅԻՆ ՓՈՒԼՈՎ ՎԻԲ ՖԻԼՏՐԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

Կան գծային փուլով ՎԻԲ ֆիլտրերի հաշվարկման տարբեր մեթոդներ: Առավել հայտնի են հաշվարկի կշռային (պատուհանների միջոցով), հաճախականային ընտրանքների, օպտիմալացման մեթոդները [2-5]: Մենք կծանոթանանք դրանց հաշվարկման կշռային մեթոդին:

Թվային ֆիլտրերի հաշվարկման համար սովորաբար տրված է լինում նրա հաճախականային բնութագիրը, և պահանջվում է գտնել իմպուլսային բնութագիրը: Հաճախականային բնութագիրը  $2\pi$  պարբերական ֆունկցիա է: Այն ներկայացվում է Ֆուրյեի շարքի միջոցով.

$$H(\omega) = \sigma_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{j\omega n}, \quad (2.28)$$

որտեղ

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\omega) e^{-j\omega n} d\omega \quad (2.29)$$

$h[n]_{n=-\infty}^{\infty}$  - ը համընկնում է համակարգի իմպուլսային բնութագրի հետ: Շատ դեպքերում տրված  $H(\omega)$  հաճախականային բնութագրով, գծային փուլով ՎԻԲ ֆիլտրերի հաշվարկման և նախագծման համար (2.28), (2.29) բանաձևերի կիրառումը նպատակահարմար չէ հետևյալ պատճառներով.

1. Ֆիլտրի իմպուլսային բնութագրի երկարությունն անվերջ է, քանի որ գումարումը կատարվում է անվերջ սահմաններում:

2. Ֆիլտրը ֆիզիկապես իրագործելի չէ, քանի որ իմպուլսային բնութագիրը սկսվում է  $\omega = -\infty$  ից: Հետևաբար, վերջավոր թվով հապաղումները չեն կարող ֆիլտրը դարձնել ֆիզիկապես իրագործելի: Այն անվերջ իմպուլսային բնութագրով (ԱԻԲ) անիրագործելի ֆիլտր է: Եթե (2.29) շարքի փոխարեն վերցնենք նրա որևէ մասնակի գումար՝

$$\sum_{\omega_1}^{\omega_2} \sum_{\omega_3}^{\omega_4} \dots = \sigma_{\omega_1 = -\infty}^{\omega_2} h(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots), \quad (2.30)$$

Ապա մոտարկումը կհանգեցնի Գիբսի էֆեկտին [6], որի դեպքում հաճախականային բնութագրի արմուկները (ամպլիտուդի պուլսացիաները) չեն նվազում մասնակի գումարներում գումարելիների թիվն ավելացնելով: Հետևաբար, (2.28) շարքն իր մասնակի գումարներով մոտարկելը պիտանի չէ ՎԻԲ ֆիլտրերի հաշվարկման և նախագծման համար:

Բերենք Գիբսի էֆեկտի սահմանումը. Ենթադրենք՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{\sigma \in \Omega_n} e^{-\beta H_n(\sigma)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{\sigma \in \Omega_n} e^{-\beta H_n(\sigma)} + 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{\sigma \in \Omega_n} e^{-\beta H_n(\sigma)}$$

Եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{\sigma \in \Omega_n} e^{-\beta H_n(\sigma)}$  կամ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{\sigma \in \Omega_n} e^{-\beta H_n(\sigma)}$

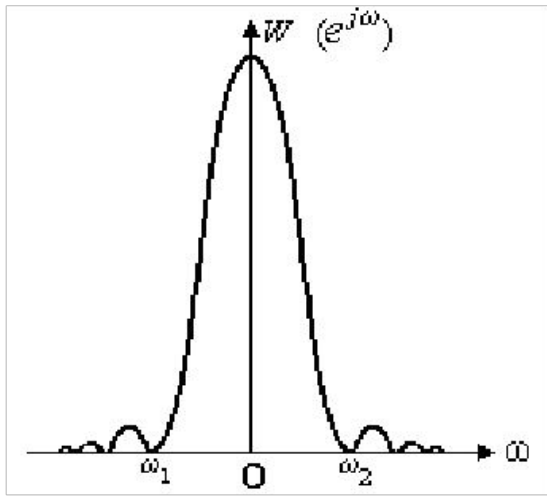
ապա կասենք, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n$ -ի համար տեղի ունի Գիբսի էֆեկտը:

Նույն ձևով կսահմանենք  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n \in \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{\sigma \in \Omega_n} e^{-\beta H_n(\sigma)}$  դեպքում:

ՎԻԲ ֆիլտրերի հաշվարկման և նախագծման համար համեմատաբար լավ արոյունքներ է ստացվում պատուհաններ իմերսիոյով: Մերոնի եռթյունը հետևյալն է. Մտրվում է վերջավոր երկարության  $\mathbb{Z}^d$  պատուհան կոչվող կշռային հաջորդականություն, որի միջոցով փոփոխվում են իմպուլսային բնութագրի գործակիցները:

Ենթադրենք՝ ունենք ֆիլտրի իմպուլսային բնութագիրը՝  $h(\sigma)$  և նրա  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n$  հաճախականային բնութագիրը: Ենթադրենք նաև, որ պատուհանը որոշվում է  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n$  վերջավոր կշռային հաջորդականությամբ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n < \infty$  և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n$  հաճախականային բնութագրով:

Պատուհանի կիրառություններից ստացված արդյունքը լավ է այնքանով, որքանով  $\Delta\omega$  հաճախականային բնութագրի գլխավոր մասը պարունակում է պատուհանի համարյա ամբողջ էներգիան ( $\Delta\omega$ -ով և  $\omega_0$  - առանցքով սահմանափակված համարյա ողջ մակերեսը), իսկ մնացած "երկրորդական մասերի" էներգիան աննշան է: Գծագրում գլխավոր մասը սահմանափակված է  $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$ ,  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$  ուղիղներով  $\Delta\omega$ -ի գրաֆիկով և  $\omega_0$  առանցքով:



$\Delta\omega$  ֆունկցիայի ՎԻԲ մոտարկումը ստանալու համար գտնում են  $h(\omega) = h(\omega_0)$  - ը, որը հավասար է զրոյի ինչ որ  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$   $\omega > 0$  վերջավոր միջակայքից դուրս, և դրանից հետո միայն հապաղումների միջոցով  $h(\omega)$ -ից ստանում են մոտարկվող, ֆիզիկապես իրագործելի համակարգի իմպուլսային բնութագիրը:

# ԹՎԱՅԻՆ ՖԻԼՏՐԵՐԻ ԿԱՌՈՒՄՑՎԱԾՔԸ ԵՎ ՍԻՏՄԱՆԵՐԸ

Միևնույն փոխանցման ֆունկցիայով ֆիլտրերը կարելի է կառուցել տարբեր ձևերով: Զվանստացման հետևանքով առաջացած սխալների և աղմուկի չափն էապես կախված է ֆիլտրի կառուցվածքից:

Նշանակենք  $\square\square\square\square$  - ով ֆիլտրի մուտքային և  $\square\square\square\square$  - ով ելքային ազդանշանները: Կախված ելքային ազդանշանի տեսքից՝ թվային ֆիլտրերը կբաժանենք երկու դասերի՝ ռեկուրսիվ և ոչ ռեկուրսիվ:

Ֆիլտրը կանվանենք ռեկուրսիվ, եթե ելքային ազդանշանի ընթացիկ  $\square\square\square\square$  արժեքը կախված է ոչ միայն մուտքային ազդանշանի արժեքներից ընթացիկ և նախորդ պահերին, այլև ելքային ազդանշանի նախորդ պահերին ունեցած արժեքներից:

Ռեկուրսիվ ֆիլտրերի համար մուտքային և ելքային ազդանշանները կապված են  $\square\square\square\square = \square\square\square\square - 1\square, \square\square\square\square - 2\square, \dots, \square\square\square\square, \square\square\square\square - 1\square, \dots\square$  տեսքի առնչությամբ:

Ֆիլտրը կանվանենք ոչ ռեկուրսիվ, եթե ելքային ազդանշանի ընթացիկ արժեքը կախված է միայն մուտքային ազդանշանի արժեքներից ընթացիկ և նախորդ պահերին (կախված չէ ելքային ազդանշանի նախորդ պահերին) ունեցած արժեքներից:

Ոչ ռեկուրսիվ ֆիլտրերի համար մուտքային և ելքային ազդանշանները կապված են  $\square\square\square\square = \square\square\square\square\square\square, \square\square\square\square - 1\square, \dots\square$  տեսքի առնչությամբ:

Ենթադրենք՝ համակարգը նկարագրվում է տարբերություններով հավասարումով: Կատարելով  $Z$  - ձևափոխություն կստանանք՝

$$\begin{matrix} \square & \square \\ \square \square \square \square \square & \square \square \square \square \square \square \square \\ \square = 0 & \square = 0 \end{matrix} = \begin{matrix} \square & \square \\ \square \square \square \square \square & \square \square \square \square \square \square \square \\ \square = 0 & \square = 0 \end{matrix},$$

կամ՝

$$\begin{matrix} \square & \square \\ \square \square (\square) \square \square \square & \square \square (\square) \\ \square = 0 & \square = 0 \end{matrix} = \begin{matrix} \square & \square \\ \square \square (\square) \square \square \square \square & \square \square (\square) \\ \square = 0 & \square = 0 \end{matrix}:$$

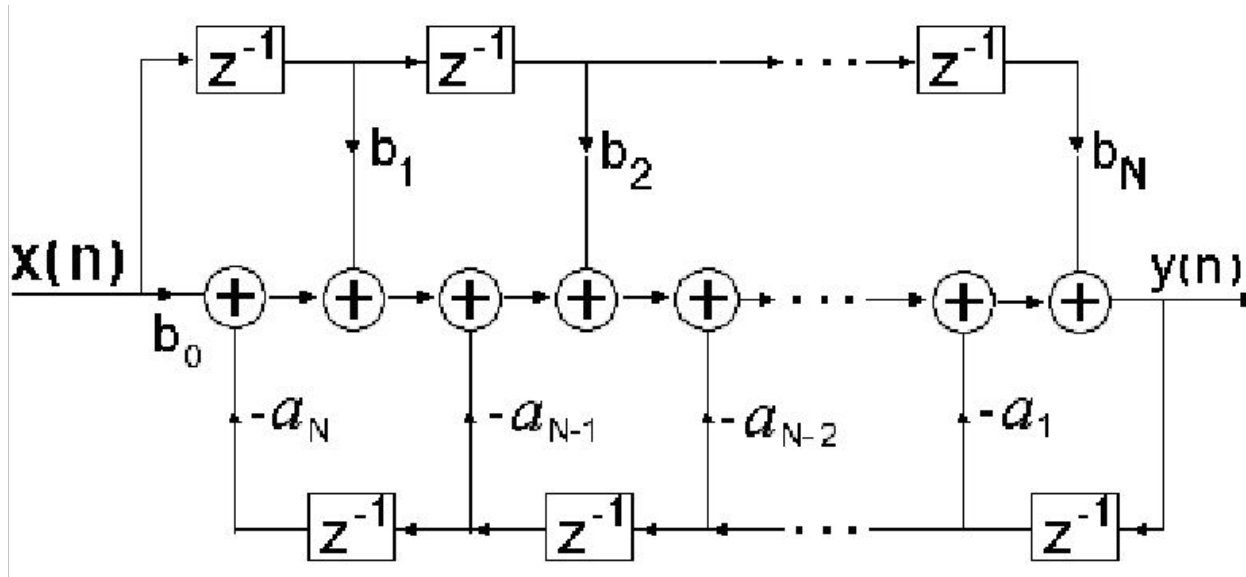
Կատարելով հակադարձ  $Z$  - ձևափոխություն հավասարության երկրմասերի նկատմամբ, կստանանք՝

$$\begin{matrix} \square & \square \\ \square \square (\square) \square \square \square \square & \square \square \square \\ \square = 0 & \square = 0 \end{matrix} = \begin{matrix} \square & \square \\ \square \square (\square) \square \square \square \square & \square \square \square \\ \square = 0 & \square = 0 \end{matrix}$$

Վերցնենք  $\square = 1$ , կստանանք՝

$$\begin{matrix} \square & \square \\ \square \square \square \square & \square \square (\square) \square \square \square \square - \square \square \square - \square \square (\square) \square \square \square \square - \square \square \square \\ \square = 0 & \square = 1 \end{matrix}$$

Պատկերենք վերջին առնչությունը սխեմաների միջոցով՝



Համակարգի սխեմա, ուղիղ ձև 1

Բերված սխեմայում համարիչի և հայտարարի համար օգտագործված են հապաղման տարբեր տարրեր: Սխեման բավական պարզ է: Այն կոչվում է (առաջին) ուղիղ ձև 1: Նրանում անմիջականորեն արտահայտված է կապը տարբերություններով հավասարման հետ: Սակայն, երբ  $\square\square\square\square$  փոխանցման ֆունկցիայի բևեռներն իրար բավականաչափ մոտ են, կամ մոտ են գտնվում միավոր շրջանագծին, բերված կառուցվածքի ֆիլտրում առաջանում են բարդ ինդիրներ կապված նրանց զգայնության և գործակիցների (մոտավորությունների) սխալների հետ: Այդ պատճառով գործնականում աշխատում են չօգտագործել ուղիղ ձև 1 տիպի ֆիլտրերը:

Փոխանցման  $\sigma(\sigma)$  ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\sigma(\sigma) = \frac{\sigma(\sigma)}{\sigma(\sigma)} = \frac{1}{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma(\sigma)} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma(\sigma) = \sigma_1(\sigma) \cdot \sigma_2(\sigma),$$

սակայն ստացված բանաձևը ենթադրում է ֆիլտրի այլ կառուցվածք:

Ֆիլտրը կառուցված է երկու  $\sigma_1(\sigma)$  և  $\sigma_2(\sigma)$  փոխանցման ֆունկցիաներով՝

հաջորդաբար գործող (միացված) ֆիլտրերից: Նրանցից առաջինն ունի

միայն բևեռներ, երկրորդը՝ միայն գրոներ:

Ենթադրենք՝

$$\sigma_1(\sigma) = \frac{\sigma(\sigma)}{\sigma(\sigma)} = \frac{1}{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma(\sigma)}, \quad \sigma(\sigma) = 1, \quad \sigma_2(\sigma) = \frac{\sigma(\sigma)}{\sigma(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma(\sigma):$$

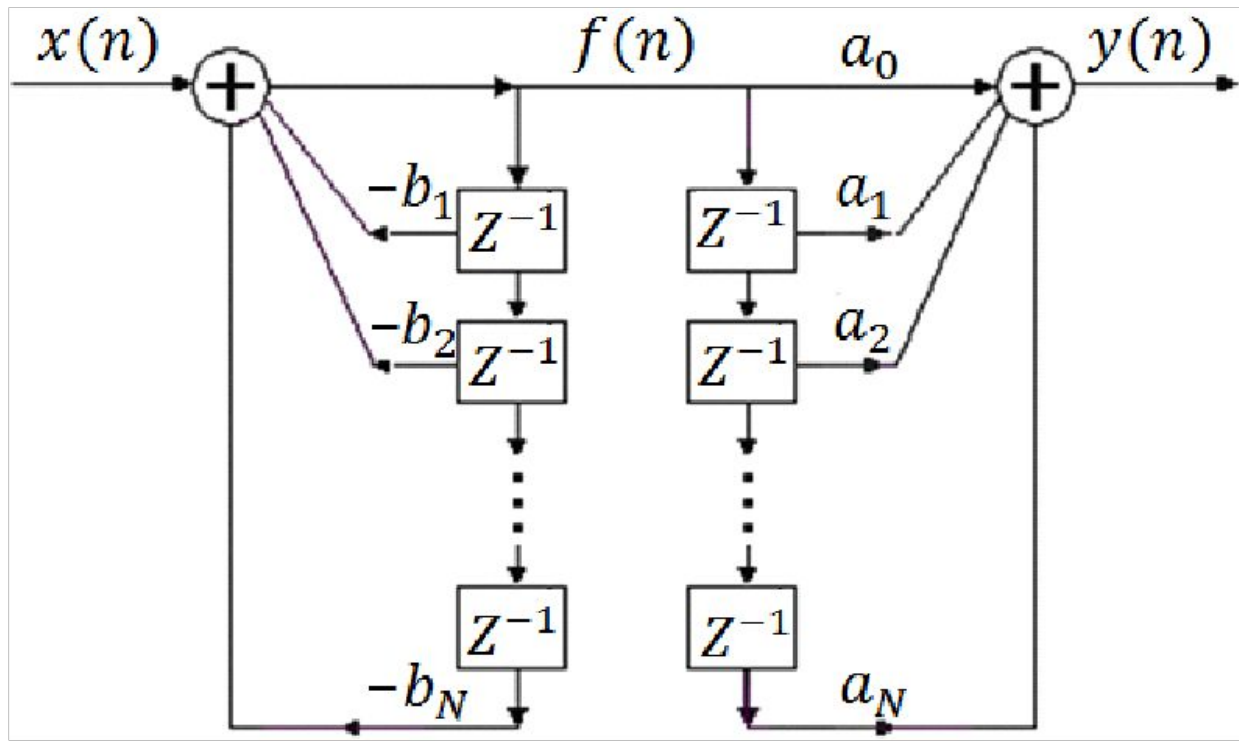
Վերջին առնչություններին համապատասխան հավասարումներն են՝

$$\sigma(\sigma) = \sigma(\sigma) - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma(\sigma) - \sigma(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma(\sigma) - \sigma(\sigma):$$

Ստացված հավասարումներին համապատասխան համակարգերը

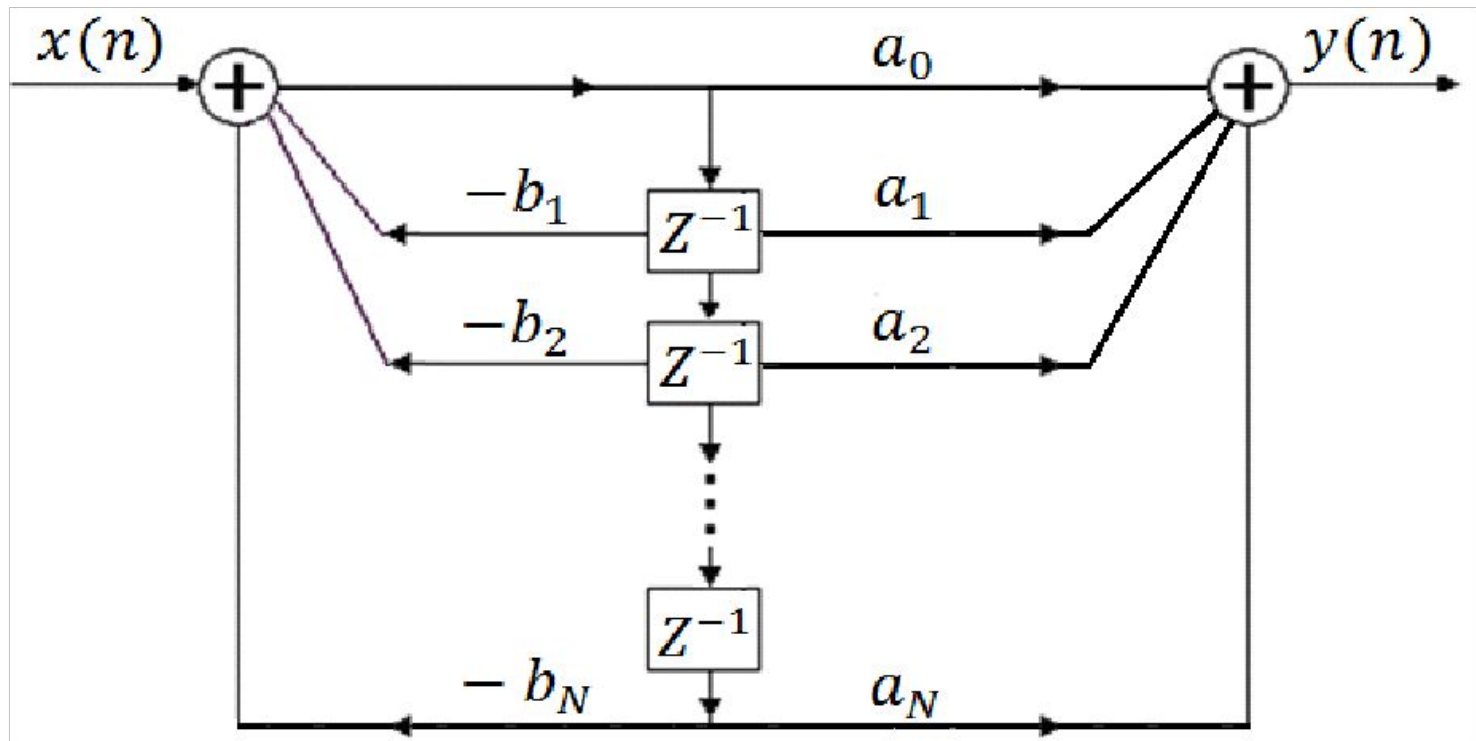
կարելի է իրականացնել ստորև բերված սխեմայի միջոցով:





Համակարգի սխեմա, ուղիղ ձև Z ոչ կանոնական

Նկատենք, որ վերջին սխեմայում ազդանշանների հապաղումն համընկնում են, հետևաբար ֆիլտրի կառուցման համար բավական օգտագործել հապաղման տարրերի միայն մեկ հավաքածու, ինչս պատկերված է ստորև բերված գծագրում: Այդձ կը կանվանենք ուղիղ 2: Նրա կառուցման համար օգտագործվում են նվազագույն թ գումարման, բազմապատկման և հապաղման տարրեր:



Համակարգի սխեմա, ուղիղ ձև 2

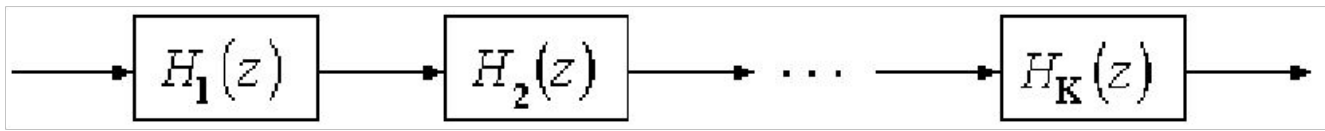
Նկատենք, որ  $H(z)$  - ը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$H(z) = \frac{H(z)}{H(z)} = \prod_{k=1}^K \frac{H_k(z)}{H_k(z)}$$

որտեղ

$$H_k(z) = \frac{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}, \text{ կամ } H_k(z) = \frac{1 + a_{1k}z^{-1}}{1 + b_{1k}z^{-1}}$$

Նկարագրված համակարգը կարելի է իրականացնել հաջորդական միացված սխեմաների միջոցով:



Հաջորդական միացում

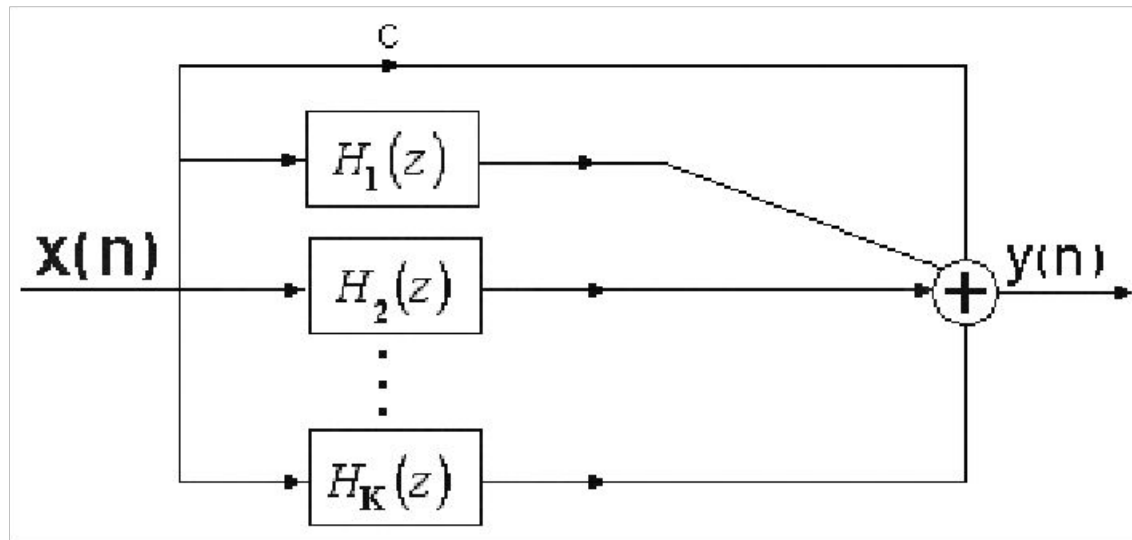
Ներկայացնք  $X(z)$  - ը պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների գումարի տեսքով՝

$$X(z) = \frac{X(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} X(z)$$

որտեղ

$$x_k z^{-k} = \frac{x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots}{1 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots}, \text{ կամ } x_k z^{-k} = \frac{x_0}{1 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots}$$

Այս ձևով կստանանք ֆիլտրերի կառուցման նոր՝ չորրորդ ձևը, որը կոչվում է գուգաիեր ձևապատկերված է գծագրում:



Չուգաիեր ձև