

# Лекция 1

1. Общая задача линейного программирования

2. Система  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными, основные (базисные) и неосновные (свободные) переменные. Базисные решения.

3. Геометрический смысл решений линейных неравенств и их систем.

## 1. Общая задача линейного программирования

Дана система  $m$  линейных уравнений и неравенств с  $n$  переменными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k$$

$$a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

и линейная функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

**Необходимо найти такое решение системы**

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_j \geq 0, (j = 1, 2, \dots, l; l \leq n)$$

**при котором линейная функция принимает оптимальное (т.е. максимальное или минимальное) значение .**

**Оптимальное решение иногда называют оптимальным планом (экономическая интерпретация).**

**Рассматривают различные формы задач линейного программирования.**

**Если все переменные неотрицательны и система ограничений СОСТОИТ лишь из одних неравенств, то задача называется стандартной.**

**Если система ограничений состоит из одних уравнений, то задача называется канонической.**

**Любая задача линейного программирования может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче.**



**Теорема.** Если для системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными (1.1) существует хотя бы одна группа базисных переменных, то эта система является неопределенной, причем каждому произвольному набору значений свободных переменных соответствует одно решение системы.

Д. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_m$  - базисные переменные. Запишем систему уравнений в виде

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n$$

При произвольном наборе значений переменных  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$  получаем систему

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b'_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b'_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b'_m$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

*по теореме Крамера система имеет **единственное решение**. В силу произвольного выбора свободных переменных получаем бесконечное множество решений.*

Решение системы (1.1) называется **допустимым**, если оно содержит только неотрицательные компоненты.

**Базисным решением** системы  $m$  уравнений с  $n$  переменными называется решение, в котором все  $n - m$  свободных переменных равны нулю.

Базисное решение, в котором хотя бы одна из основных переменных равна нулю, называется **вырожденным**.

**Пример.** Найти все базисные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases} \quad C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \quad \text{максимальное число пар базисных переменных}$$

1)  $x_1, x_2$  - базисные переменные;  $x_3, x_4$  - свободные переменные

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0 \quad x_1, x_2 \text{ не могут быть базисными переменными}$$

2)  $x_1, x_3$  - базисные переменные;  $x_2, x_4$  - свободные переменные

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 2. \end{cases} \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{3}{2} \quad X_1 = \left( \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right) \quad \text{базисное допустимое решение}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

3)  $x_1, x_4$  - базисные переменные;  $x_2, x_3$  - свободные переменные

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_4 = 2. \end{cases} \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = -\frac{1}{2} \quad X_2 = \left( \frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

4)  $x_2, x_3$  - базисные переменные;  $x_1, x_4$  - свободные переменные

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad x_2 = \frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad X_3 = \left( 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

5)  $x_2, x_4$  - базисные переменные;  $x_1, x_3$  - свободные переменные

$$\begin{cases} 2x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_2 - 3x_4 = 2. \end{cases} \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad x_4 = -\frac{1}{2} \quad X_4 = \left( 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

6)  $x_3, x_4$  - базисные переменные;  $x_1, x_2$  - свободные переменные

$$\begin{cases} -3x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases} \quad x_3 = -\frac{1}{4}, \quad x_4 = -\frac{3}{4} \quad X_5 = \left( 0, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4} \right)$$



### 3. Геометрический смысл решений линейных неравенств и их систем.

**Теорема.** *Решением линейного неравенства*  $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \leq c$

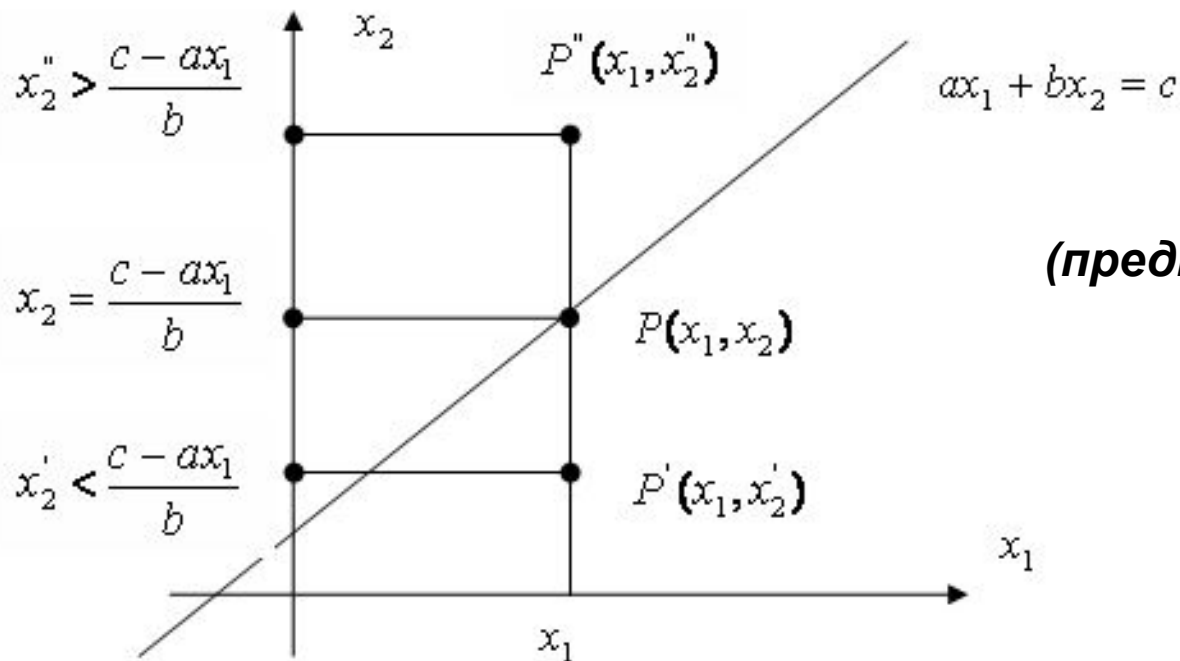
*является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая*

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c$$

*делит всю плоскость, а также и сама прямая. Вторая полуплоскость вместе с прямой является решением неравенства*

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \geq c$$

## Доказательство



(предполагаем, что  $b > 0$ )

$$x_2' < \frac{c - ax_1}{b} \Rightarrow b \cdot x_2' < c - ax_1 \Rightarrow ax_1 + bx_2' < c$$

$$x_2'' > \frac{c - ax_1}{b} \Rightarrow b \cdot x_2'' > c - ax_1 \Rightarrow ax_1 + bx_2'' > c$$

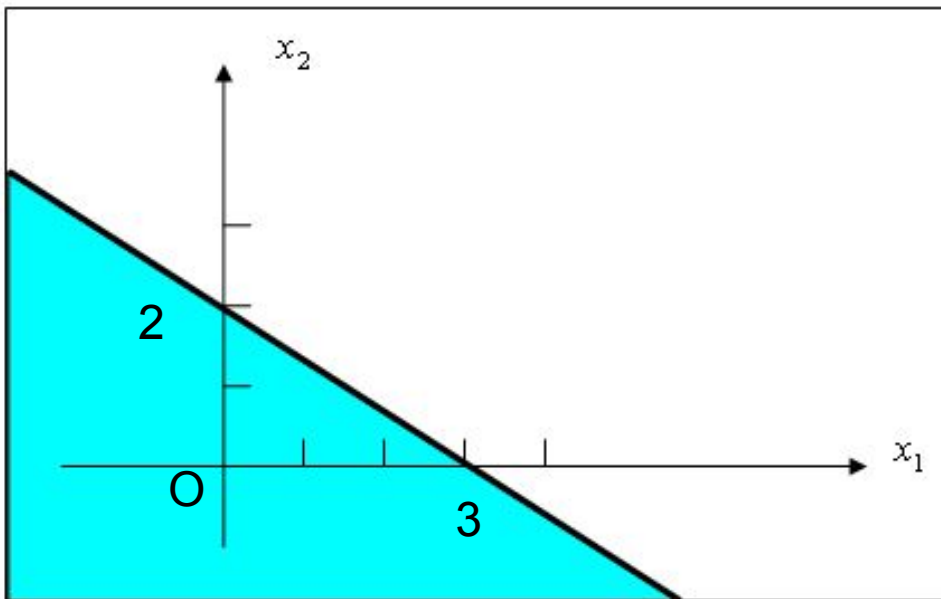
**Пример1.** Построить множество решений неравенства  $2x_1 + 3x_2 \leq 6$

**Решение.** Строим прямую  $2x_1 + 3x_2 = 6$

Выбираем контрольную точку на плоскости, например,  $O(0;0)$ .  
Координаты этой точки удовлетворяют неравенству

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 < 6$$

следовательно, нижняя полуплоскость является решением неравенства



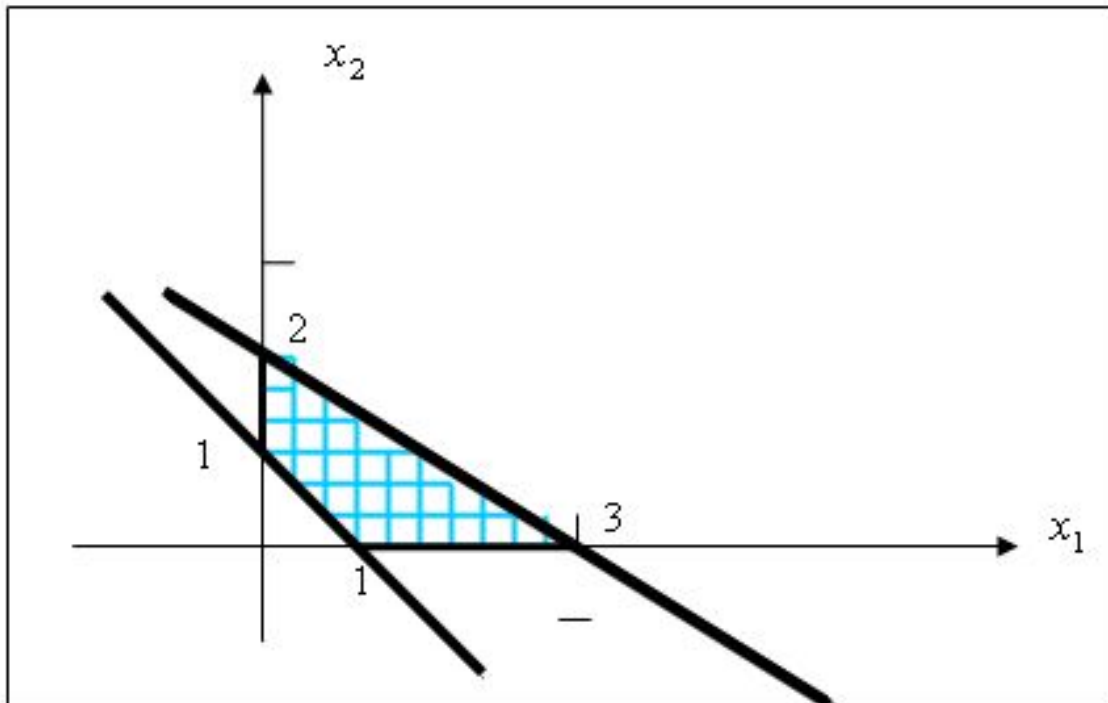
**Пример 2.** Найти решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение  $2x_1 + 3x_2 = 6$  (1)

$$x_1 + x_2 = 1$$
 (2)

Строим прямые и выбираем контрольные точки



**Пример. Построить множество решений системы неравенств**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 = 12, \quad (1)$$

$$3x_1 + x_2 = 9, \quad (2)$$

$$B\left(\frac{6}{5}; \frac{27}{5}\right)$$

