Лекция 1

1.Общая задача линейного программирования

*2. Система m линейных уравнений с n переменными, основные (**базисные**) и неосновные (**свободные**) переменные. Базисные решения.*

3.Геометрический смысл решений линейных неравенств и их систем.

1.Общая задача линейного программирования

Дана система ***m*** *линейных уравнений и неравенств с* ***n*** *переменными*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots \qquad + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots \qquad + a_{2n}x_n \leq b_2$$

....

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots \qquad + a_{kn}x_n \leq b_k$$

$$a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

и линейная функция

$$\boxed{F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n}$$

Необходимо найти такое решение системы $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$x_j \geq 0, (j = 1,2,\ldots,l; l \leq n)$

при котором линейная функция принимает оптимальное (т.е. максимальное или минимальное) значение .

Оптимальное решение иногда называют оптимальным планом (экономическая интерпретация).

Рассматривают различные формы задач линейного программирования.
Если все переменные неотрицательны и система ограничений состоит **лишь из одних неравенств, то задача называется стандартной.**
Если система ограничений состоит **из одних уравнений, то задача называется канонической.**
Любая задача линейного программирования может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче.

2. Система *m* линейных уравнений с *n* переменными, основные (базисные) и неосновные (свободные) переменные). Базисные решения.

Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.1) \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Будем считать, что в системе ***(1.1)*** все ***m*** уравнений линейно независимы, т.е. ***r = m*** (***r*** - ранг системы) и ***m < n .***

Определение. ***Любые m переменных системы (1.1) называются основными (или базисными), если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные n - m переменных называются неосновными (или свободными).***

Замечание. ***Максимально возможное число групп основных переменных не превосходит числа всех сочетаний из n по m***

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Теорема. ***Если для системы m линейных уравнений с n переменными (1.1) существует хотя бы одна группа базисных переменных, то эта система является неопределенной, причем каждому произвольному набору значений свободных переменных соответствует одно решение системы.***

Д. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ - базисные переменные. Запишем систему уравнений в виде

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{2n}x_n$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n$$

При произвольном наборе значений переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ получаем систему

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1^{'}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2^{'}$$
....
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m^{'}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

по теореме Крамера система имеет единственное решение. В силу произвольного выбора свободных переменных получаем бесконечное множество решений.

Решение системы (1.1) называется допустимым, если оно содержит только неотрицательные компоненты.

Базисным решением системы m уравнений с n переменными называется решение, в котором все n - m свободных переменных равны нулю.

Базисное решение, в котором хотя бы одна из основных переменных равна нулю, называется вырожденным.

Пример. Найти все базисные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases} \qquad C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$$

максимальное число пар базисных переменных

1) x_1, x_2 -,базисные переменные; x_3, x_4 – свободные переменные

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 2 = 0$$

x_1, x_2 не могут быть базисными переменными

2) x_1, x_3 - базисные переменные; x_2, x_4 – свободные переменные

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 2. \end{cases} \qquad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{3}{2} \quad X_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

базисное допустимое решение

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}}$$

3) x_1,x_4 - базисные переменные; x_2, x_3 – свободные переменные

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_4 = 2. \end{cases} \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \;\; x_4 = -\frac{1}{2} \qquad X_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

4) x_2 ,x_3 - базисные переменные; x_1, x_4 – свободные переменные

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \qquad x_2 = \frac{3}{4}, \;\; x_3 = \frac{1}{2} \qquad X_3 = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

5) x_2,x_4 - базисные переменные; x_1, x_3 – свободные переменные

$$\begin{cases} 2x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_2 - 3x_4 = 2. \end{cases} \qquad x_2 = \frac{1}{4}, \;\; x_4 = -\frac{1}{2} \qquad X_4 = \left(0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

6) x_3,x_4 - базисные переменные; x_1, x_2 – свободные переменные

$$\begin{cases} -3x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases} \qquad x_3 = -\frac{1}{4}, \;\; x_4 = -\frac{3}{4} \qquad X_5 = \left(0, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4} \right)$$

3. Геометрический смысл решений линейных неравенств и их систем.

Теорема. Решением линейного неравенства $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \le c$

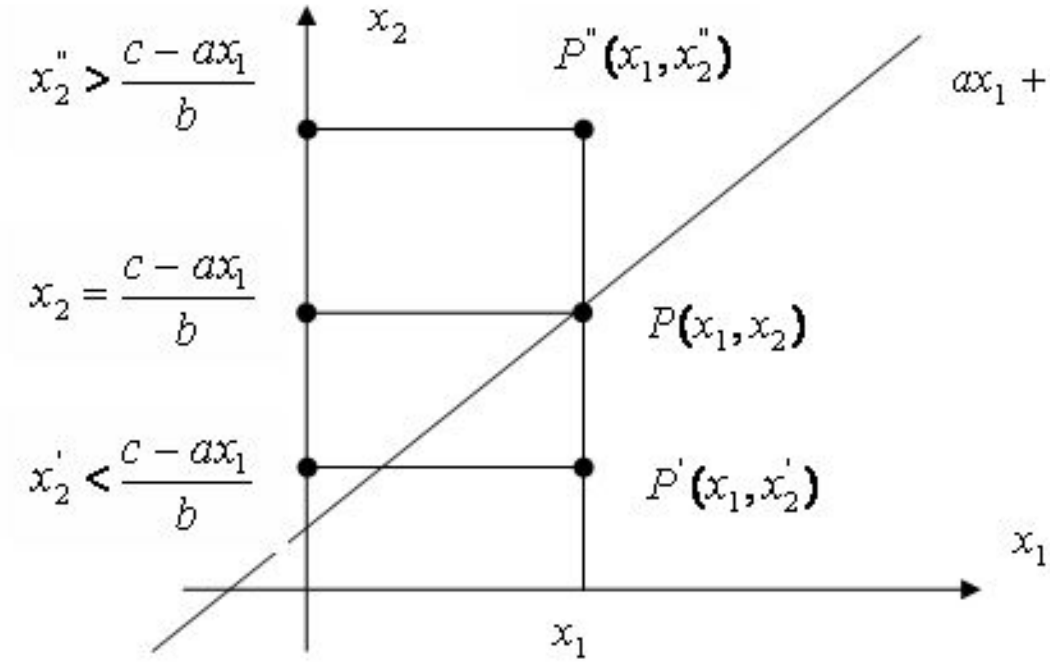
является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c$$

делит всю плоскость, а также и сама прямая. Вторая полуплоскость вместе с прямой является решением неравенства

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \ge c$$

Доказательство



(предполагаем, что b>0)

$$x_2' < \frac{c - ax_1}{b} \Rightarrow b \cdot x_2' < c - ax_1 \Rightarrow ax_1 + bx_2' < c$$

$$x_2'' > \frac{c - ax_1}{b} \Rightarrow b \cdot x_2'' > c - ax_1 \Rightarrow ax_1 + bx_2'' > c$$

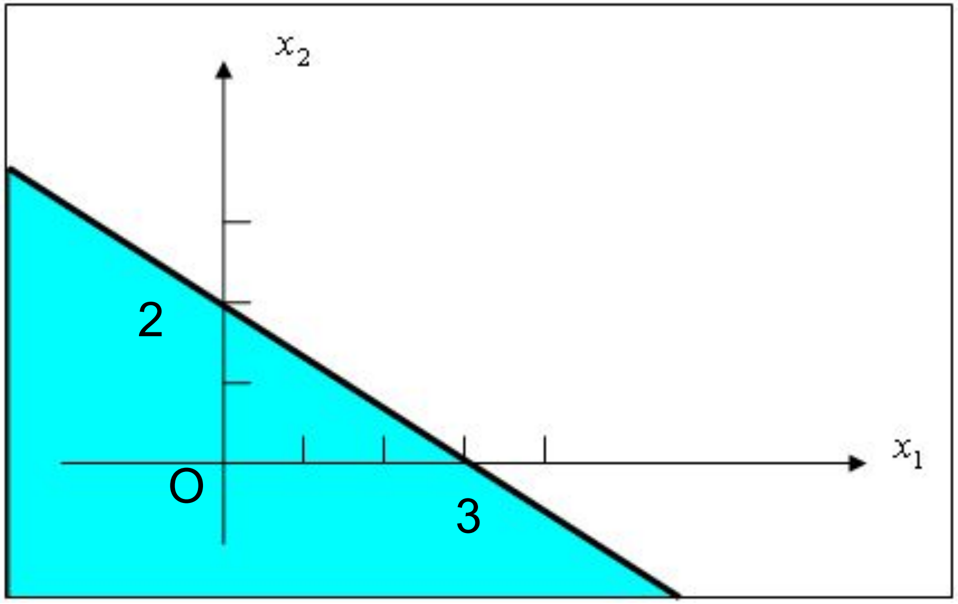
Пример*1. Построить множество решений неравенства* $2x_1 + 3x_2 \le 6$

Решение. Строим прямую $2x_1 + 3x_2 = 6$

Выбираем контрольную точку на плоскости, например, ***O(0;0).*** Координаты этой точки удовлетворяют неравенству

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 < 6$$

следовательно, нижняя полуплоскость является решением неравенства



Пример 2. Найти решение системы неравенств

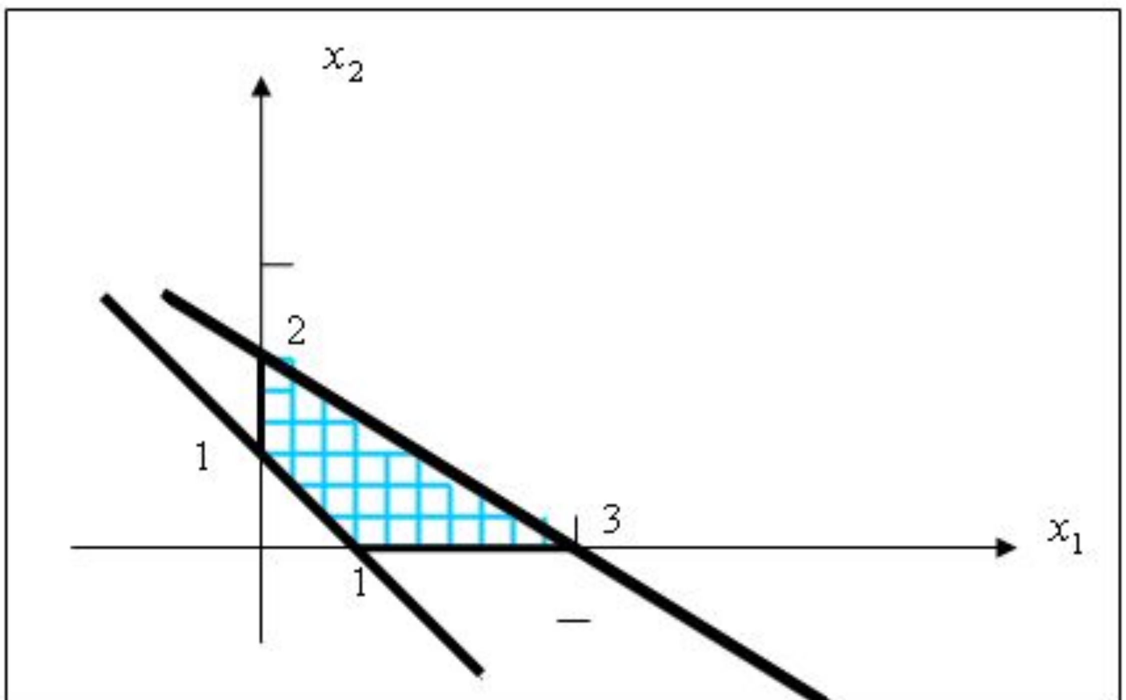
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

$$2x_1 + 3x_2 = 6 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad (2)$$

Строим прямые и выбираем контрольные точки



Пример. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 = 12, \qquad (1)$$

$$3x_1 + x_2 = 9, \qquad (2)$$

$$B\left(\frac{6}{5}; \frac{27}{5}\right)$$