

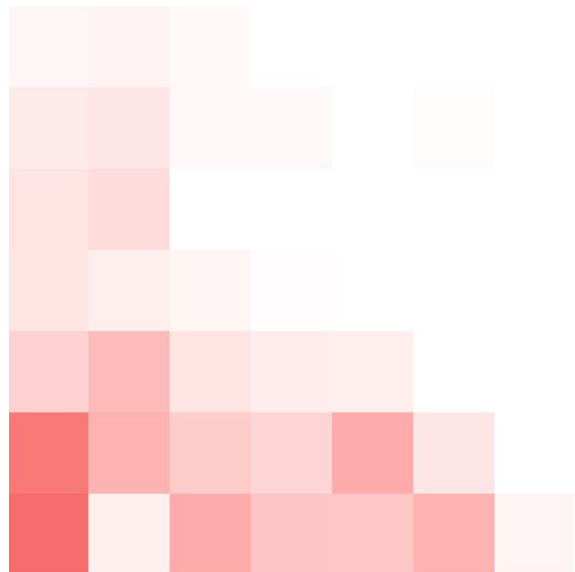
БГТУ им. В.Г. Шухова
Кафедра информационных технологий



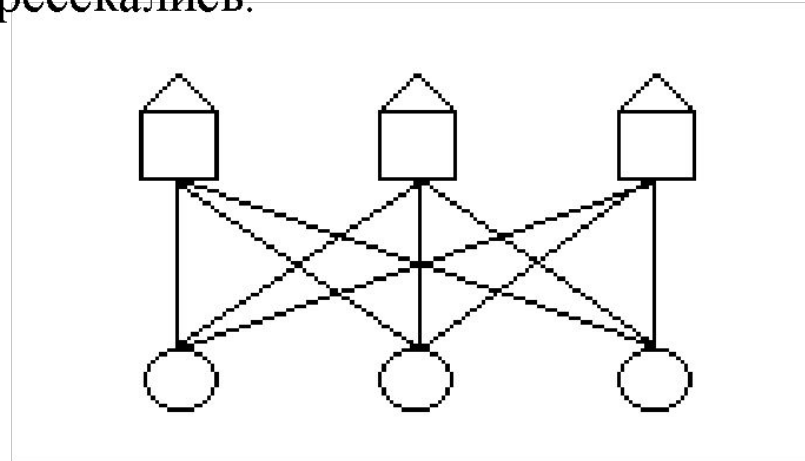
Дискретная математика

Коломыцева Елена Павловна, 2020

Лекция 1 Графы



Имеется 3 домика и 3 колодца. От каждого домика к каждому колодцу проложена тропинка. Требуется проложить тропинки так, чтобы они не пересекались.



Эта задача решений не имеет.

Польский математик Куратовский и советский Понтрягин независимо друг от друга в 1930 году доказали, что при решении этой задачи хотя бы одно пересечение будет.

Понятие графа.

Пусть задано некоторое множество $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$. образуем множество E , элементами которого являются неупорядоченные пары, составленные из элементов множества V : $E = \{(V_1, V_2), (V_1, V_5), \dots\}$, причем $(V_1, V_2) = (V_2, V_1)$. Множество V называется *множеством вершин*, а множество E – *множеством ребер*. Совокупность этих множеств называется *графом $G(V, E)$* .

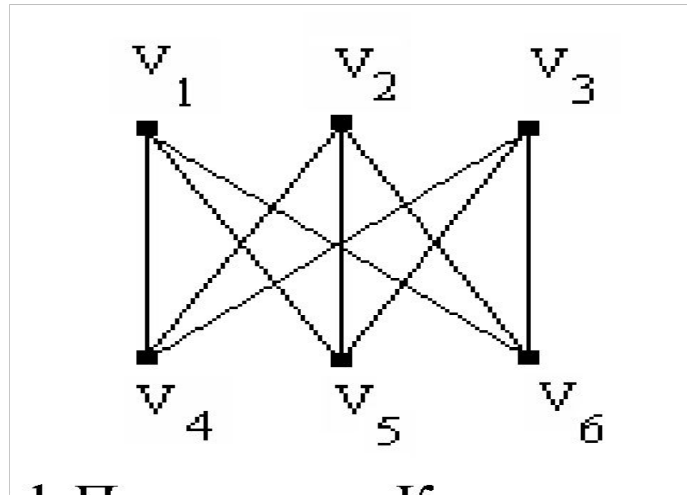


Рис1. Граф Понтрягина Куратовского

Смежность.

Если вершина V_1 принадлежит ребру E_1 , то V_1 и E_1 называются *инцидентными*.

Две вершины, инцидентные одному ребру, называются *смежными*.
Два ребра, инцидентные одной вершине, тоже называются *смежными*.

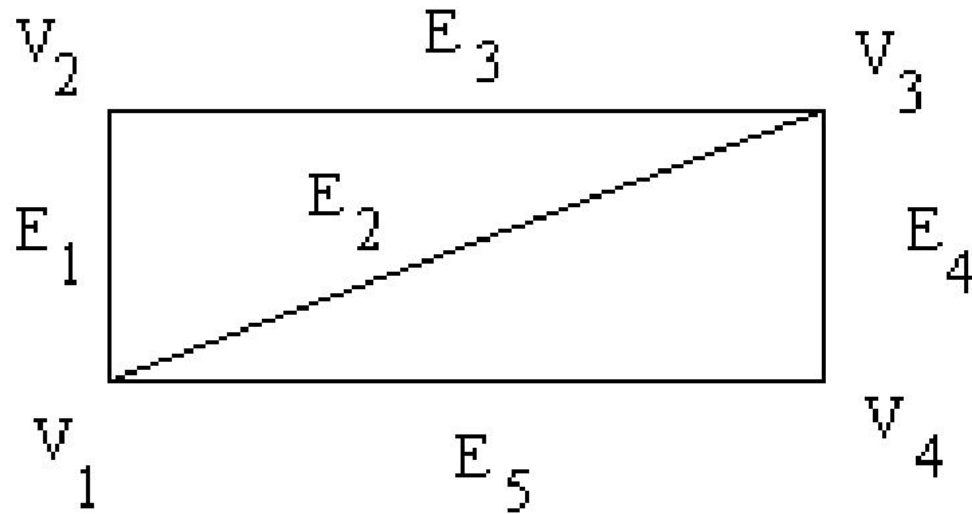


Рис.2. Пример графа.

Вершина V_1 смежна с вершинами V_2 и V_4 . Ребро E_1 является смежным с ребрами E_2, E_3, E_5 .

Количество ребер, инцидентных данной вершине, называется **степенью вершины $d(V)$** .

Например, для рис2 имеем $d(V_1)=3$, а $d(V_2)=2$.

Если $d(V)=0$, то вершина называется **изолированной**. Если $d(V)=1$, то вершина называется **висячей или концевой**.

Если все вершины графа имеют одинаковую степень k , то граф называется **регулярным степени k** .

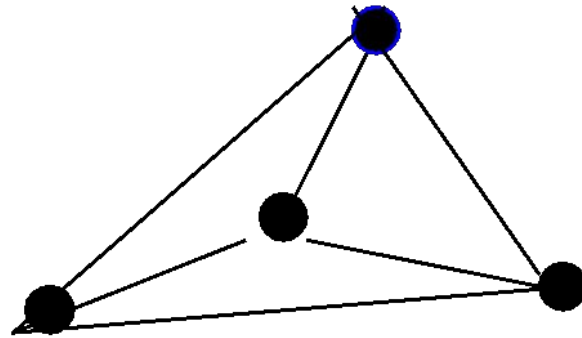


Рис. 3. Регулярный граф степени 3.

Виды графов.

1) Если множество E составлено из упорядоченных пар, то есть является подмножеством Декартового квадрата, то граф называется **ориентированным, или орграфом**. В орграфе ребра называются **дугами**

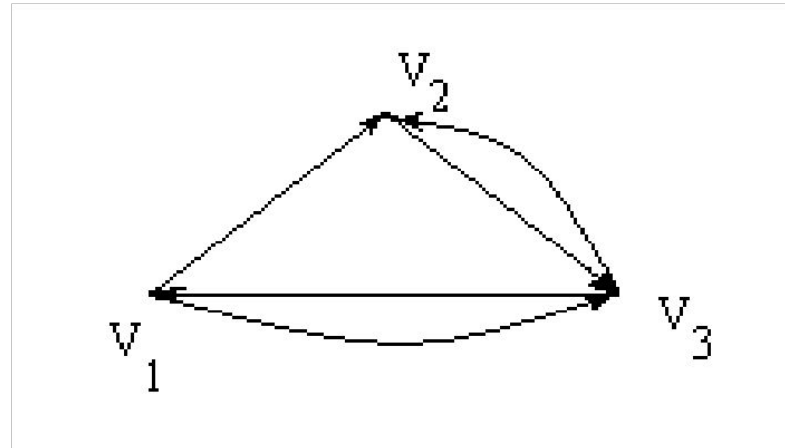


Рис.4 . Орграф.

Примеры дуг: $(V_1, V_2), (V_2, V_3), (V_3, V_2), (V_3, V_1), (V_1, V_3)$.

Заметим, что $(V_i, V_k) \neq (V_k, V_i)$.

Если вершина является началом дуги, то будем говорить, что «дуга исходит из вершины». А если вершина является концом дуги, то «дуга заходит в вершину». Количество заходящих дуг называется **полустепенью захода**, а количество исходящих дуг – **полустепенью исхода**.

2) Если допустить, что элементами множества E являются пары с одиночными вершинами, то такое ребро называется *петлей*, а граф – *псевдографом*.

3) Если допустить, что V является не множеством, а набором элементов, то есть допустимо наличие одинаковых элементов, то у нас могут появиться *кратные ребра*, а граф будет *мультиграфом*.

4) Если множество E содержит элементы, состоящие более чем из двух вершин, то такой граф называется *гиперграфом*.

Теорема Эйлера. Обозначим количество вершин буквой p , а количество ребер буквой q .

Сумма степеней графа равна удвоенному числу ребер:

$$\sum_{i=1}^n d(V_i) = 2q.$$

Доказательство:

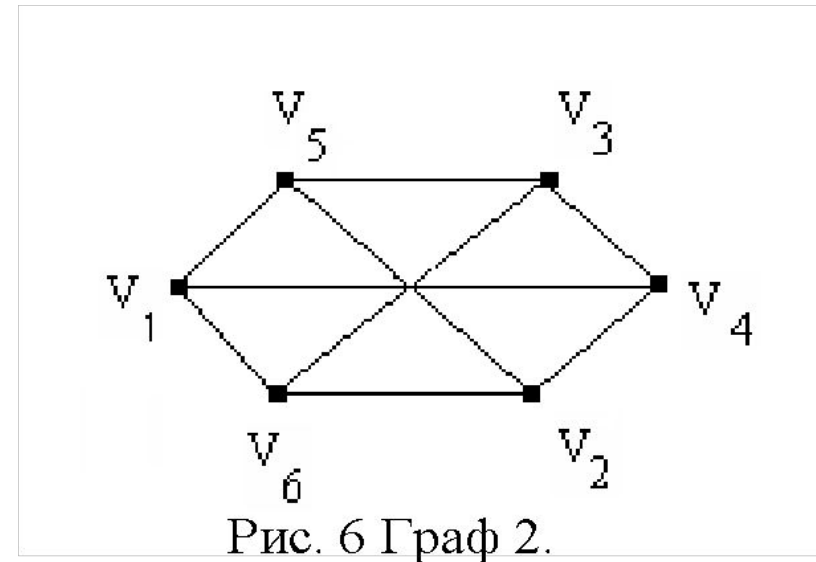
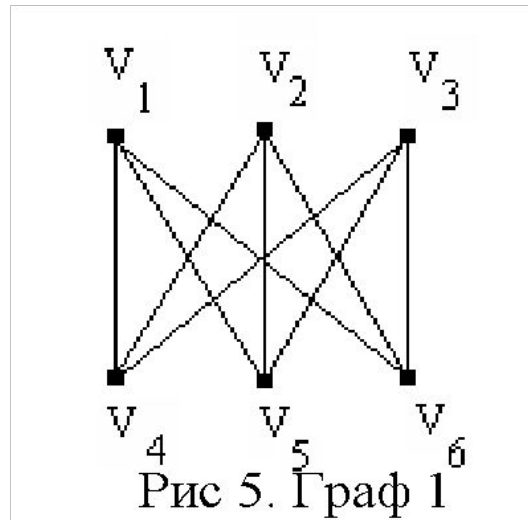
Для двух смежных вершин в сумму их степеней каждое ребро входит дважды.

Что и требовалось доказать.

Изоморфизм.

Над графом можно производить различные действия: добавить / удалить ребро / вершину, изменить направление ребра ит.д.

Два графа называются *изоморфными*, если при преобразовании не нарушается смежность.



Пример изоморфных графов.

Рассмотрим граф

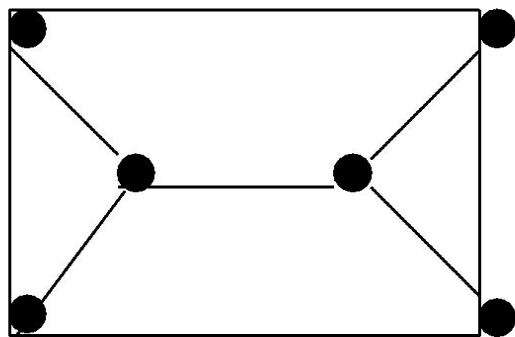


Рис. 7. Граф 3

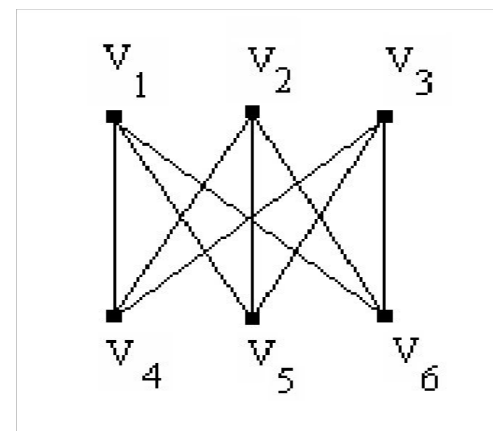


Рис 5. Граф 1

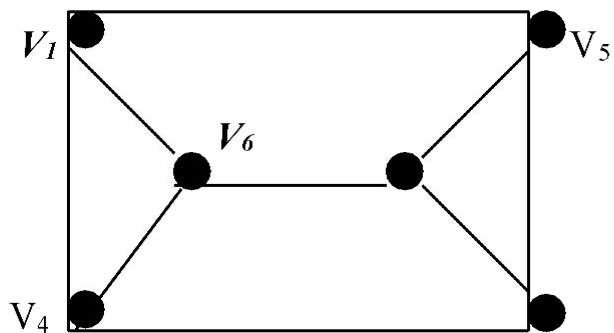


Рис. 8. Граф 3₁

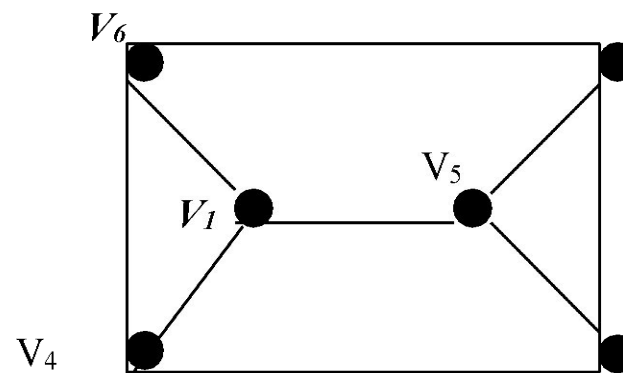


Рис. 9. Граф 3₂

Инварианты.

Графы характеризуются некоторыми параметрами: число вершин, ребер, степень вершины и так далее. Параметры, которые не меняются с преобразованием графа, называются ***инвариантами***.

Рассмотрим следующее утверждение:

Если при преобразовании количество вершин, ребер и степень вершины являются инвариантами, то преобразование - ***изоморфизм***.

Однако наше предложение не является теоремой. В этом нас убеждает граф 3, у которого перечисленные характеристики совпадают с характеристиками графа 1, но эти графы не изоморфны.

Пока неизвестен набор инвариантов, позволяющий определить изоморфны ли графы.

Подграфы.

Пусть задан граф $G(V, E)$. Граф $G'(V', E')$ называется *подграфом графа G* , если

$V' \subseteq V$ и/или $E' \subseteq E$.

Если $V' = V$, то подграф G' называется *остовным*.

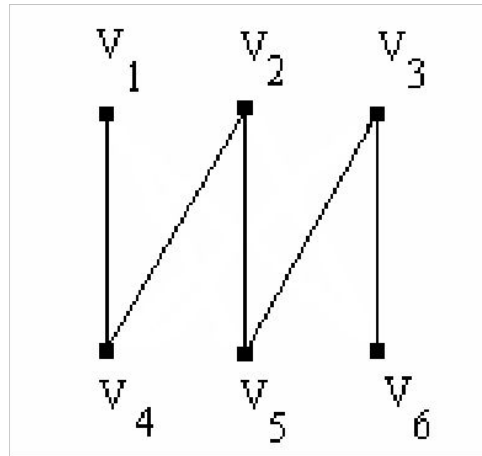


Рис 10. Остовной подграф графа $K_{3,3}$

Маршруты. Цепи. Циклы.

Пусть задан граф $G(V,E)$. Последовательность вершин и ребер $V_0 I_1 V_1 I_2 \dots I_k V_k$, в которой каждые два соседних элемента инцидентны, называется *маршрутом*.

Замечание: маршрут может быть задан последовательностью вершин: $V_0, V_1, V_2, \dots, V_k$. Вершины V_0 и V_k - концы маршрута.

Маршрут, в котором все ребра различны, называется *цепью*.

Цепь, в которой все вершины различны, называется *простой цепью*.

Цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают, называется *циклом*.

Простая цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают, называется *простым циклом*.

Граф, не имеющий циклов, называется *ациклическим*.

Задача: Выделить маршрут, связывающий V_2, V_4 , цепь, простую цепь, цикл, простой цикл. Рис.11

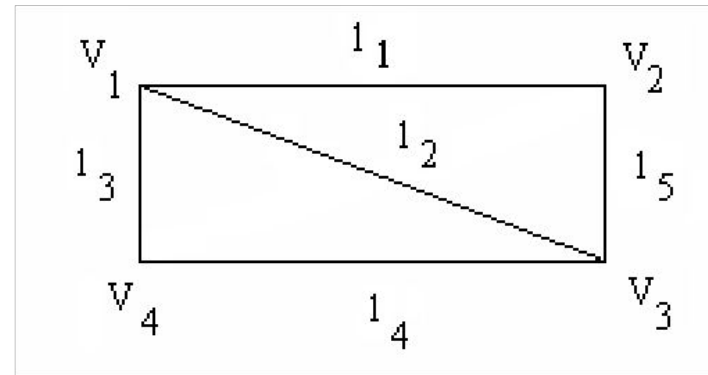


Рис. 11. Маршруты, цепи, циклы.

Решение:

$V_2, l_1, V_1, l_2, V_3, l_2, V_1, l_3, V_4$ - маршрут, но не цепь.

V_1, V_2, V_3, V_1, V_4 - цепь.

V_2, V_1, V_3, V_4 - простая цепь.

$V_1, V_2, V_3, V_4, V_3, V_1$ - цикл.

V_1, V_2, V_3, V_1 - простой цикл.

Теорема. Если существует цепь, соединяющая две вершины, то существует и простая цепь.

Доказательство:

Пусть существует цепь $V_1, V_2, \dots, V_i, V_{i+1}, \dots, V_i, \dots, V_k$. Все вершины и ребра, расположенные между V_i и вторым вхождением V_i , можно из цепи выбросить вместе с одной из V_i . Получилась новая цепь, содержащая V_i один раз. Если в ней еще есть одинаковые вершины, поступаем так же. Получится цепь, не содержащая одинаковых вершин, то есть простая цепь.

Что и требовалось доказать.

Замечание: в орграфах цепь называется *путем*, а цикл - *контуром*.

Расстояние.

Пусть имеется цепь, связывающая две вершины. Количество ребер, входящих в цепь, называется *расстоянием* $d(U, V)$, где U и V – концы цепи.

Так как количество вершин конечно, то количество цепей тоже конечно, следовательно, расстояние ограничено снизу и сверху, а значит, существует цепь с кратчайшим расстоянием, которая называется *геодезической*.

Наибольшее из расстояний называется *диаметром графа*.

Вершины, находящиеся на одном и том же расстоянии от заданной вершины, образуют *ярус*.

Полный граф – граф, у которого любые две вершины смежны.

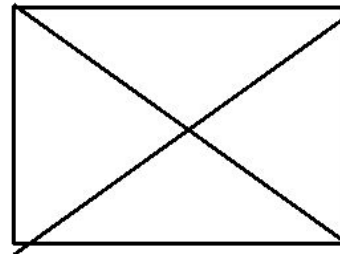


Рис.12. Пример полного графа.

Связность.

Если для двух вершин существует цепь, то они называются *связанными*. Граф называется *связным*, если у него все вершины связны. Таким образом, если граф не связан, то из него можно выделить связные подграфы, называемые компонентами связности..

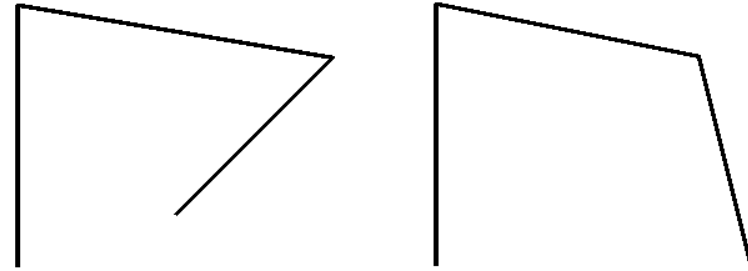
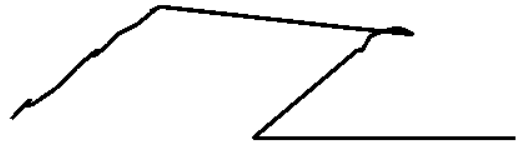


Рис.13.Связный граф. Рис.14. граф с двумя компонентами связности.

Задание графа.

- *Матрица смежности.*

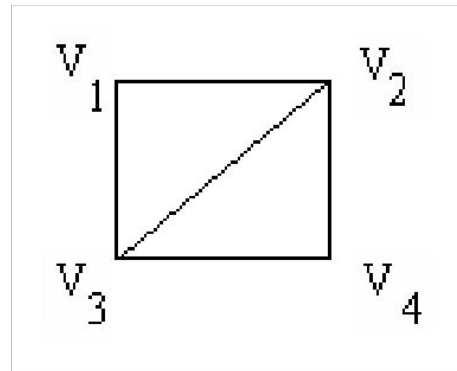
Пусть имеется граф G с n вершинами. Рассмотрим квадратную матрицу n , элементами которой являются 0 и 1.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } i \text{ смежна с вершиной } j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & & V_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Эта матрица называется матрицей *смежности*, и она симметрична относительно главной диагонали.

Пример: Дан граф



матрица смежности

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

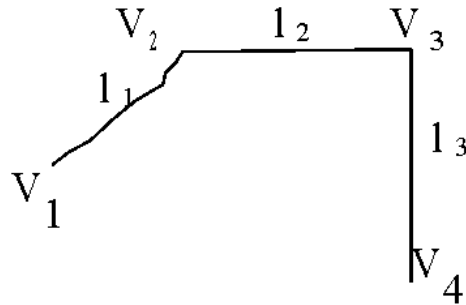
Рис. 15. Пример задания графа матрицей смежности

- **Матрица инцидентности.**

Матрица инцидентности устанавливает связь вершин и инцидентных с ней ребер.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } i \text{ и ребро } j \text{ инцидентны} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример



Матрица инцидентности

	V_1	V_2	V_3	V_4
l_1	1	1	0	0
l_2	0	1	1	0
l_3	0	0	1	1

Рис.16. Задание графа матрицей инцидентности

- **Список смежности.**

В списке смежности указывается вершина и смежные с ней вершины.

$$V_1 \rightarrow (V_2, V_5);$$

$$V_2 \rightarrow (V_1, V_3);$$

$$V_3 \rightarrow (V_6, V_2, V_4);$$

$$V_4 \rightarrow (V_3, V_5);$$

$$V_5 \rightarrow (V_1, V_4);$$

$$V_6 \rightarrow (V_3, V_7, V_8);$$

$$V_7 \rightarrow (V_6);$$

$$V_8 \rightarrow (V_6);$$

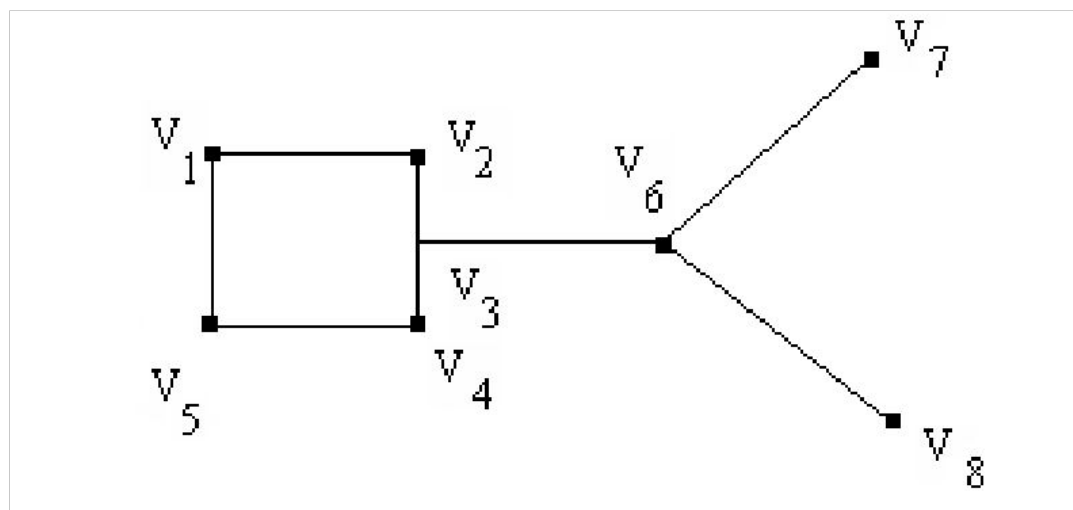


Рис. 17. Задание графа списком смежности.

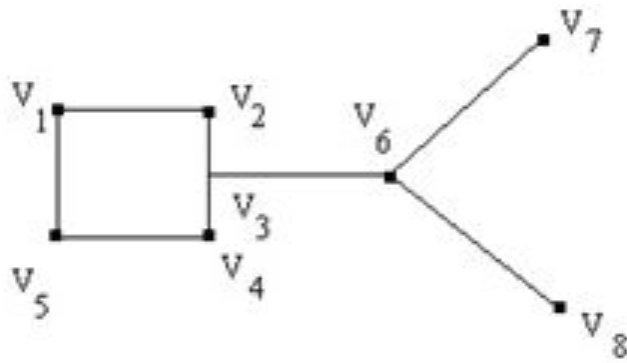
Задание графа в виде списка смежности полезно при решении задачи обхода всех вершин графа: обследовать все вершины графа, побывав в каждой 1 раз.

Различают два метода решения этой задачи:

- 1) Поиск в глубину.
- 2) Поиск в ширину.

При поиске в глубину некоторая вершина выбирается в качестве начальной и помечается. Затем рассматривается список смежности этой вершины и из него выбирается первая вершина и помечается (какая-то вершина U). Рассматривается список смежности для вершины U. Выбирается первая вершина и помечается (W). Рассматриваем список смежности для W, и так далее пока не столкнемся со случаем, что вершины списка помечены. Возвращаемся в вершину U и выбираем не помеченную вершину, если такая есть. Продвигаемся в этом направлении до тех пор, пока список вершины не оказывается помеченным. Опять возвращаемся назад и так далее. В итоге все вершины будут помечены.

Пример:



Пусть начальная вершина V_7 (метка 1). В списке смежности вершины V_7 числится V_6 (метка 2). В списке смежности V_6 - вершина V_3 (метка 3). В списке смежности вершины V_3 имеются вершины V_2, V_4, V_6 . V_6 уже помечена. Из V_2 следуем в V_1 (метка 5). $V_1 \rightarrow V_5$ (метка 6). Аналогично, $V_5 \rightarrow V_4$ (метка 7). Теперь возвращаемся в V_5 . Все вершины помечены. Аналогично и в V_1, V_2, V_3 . В списке смежности V_6 имеется непомеченная вершина - V_8 (метка 8). В списке V_6 все вершины помечены. Возвращаемся в V_7 . Здесь тоже все помечены. Следовательно, обход графа завершен. См. рис. 18

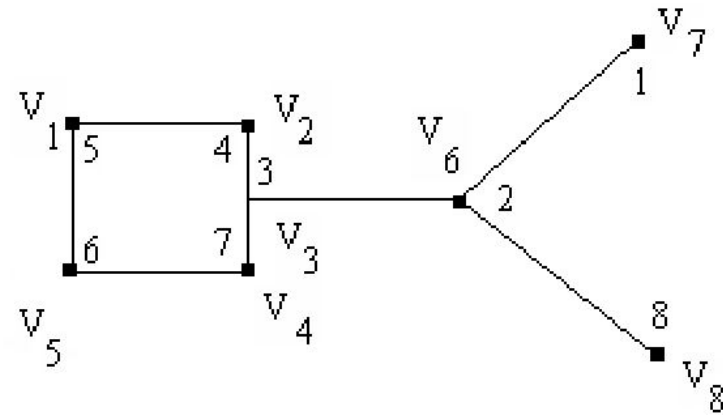


Рис. 18. Граф с помеченными вершинами при обходе в глубину.

Поиск в ширину.

Смысл поиска в ширину заключается в том, что некоторую вершину V мы объявляем начальной - V_0 . Перебираем весь список смежности этой вершины. Когда список исчерпан, то есть все вершины, достижимые из V_0 , помечены, мы переходим к 1 – ой вершине из помеченных. Затем, исчерпав список этой вершины, переходим ко 2 – ой вершине из 1 – ых помеченных и так далее до тех пор, пока не останется непомеченных вершин.

Пример:

Пусть V_7 (метка 1)- начальная вершина. В списке смежности у вершины V_7 вершина V_6 (метка 2). Больше нет вершин в списке смежности V_7 . Переходим в V_6 . $V_6 \rightarrow (V_3, V_7, V_8)$. Назначаем метку вершине V_3 (метка 3). V_7 - помечена, V_8 (метка 4). Список вершины V_6 исчерпан, переходим в вершину $V_3 \rightarrow (V_2, V_4, V_6)$. Вершины V_2 (метка 5), V_4 (метка 6). Возвращаемся в список вершины V_6 . Вершины V_7 и V_8 - помечены. Возвращаемся в V_3 , затем в $V_2 \rightarrow (V_1, V_3)$. V_1 (метка 7). Возвращаемся в V_3 и переходим в V_4 . $V_4 \rightarrow (V_3, V_5)$. Переходим в V_1 . Все вершины из списка V_1 помечены. Переходим в V_5 . Список V_5 - помечен. Непомеченных вершин не осталось. Поиск в ширину закончен.

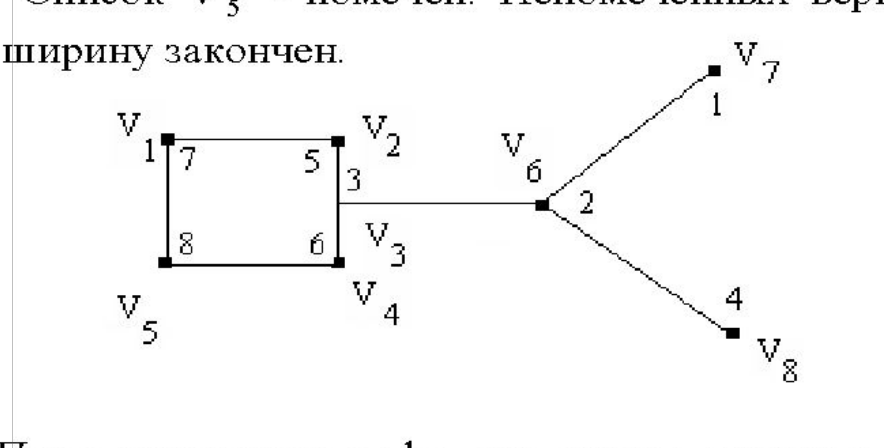


Рис 19. Пометки вершин графа при поиске в ширину.

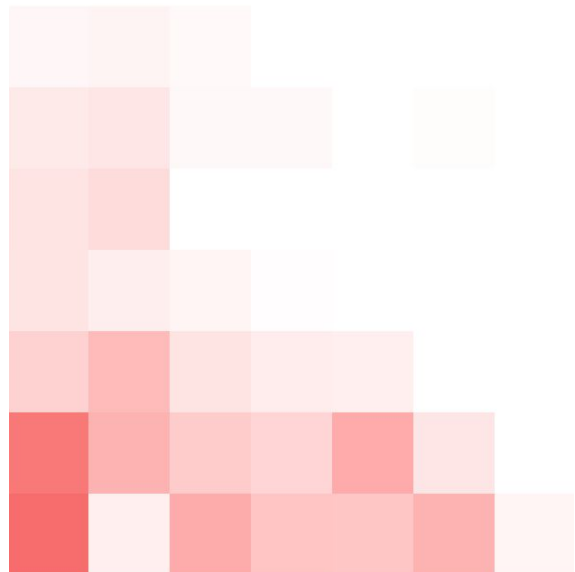
Ясно, что последовательность поиска в глубину и в ширину зависит от выбора V_0 .

БГТУ им. В.Г. Шухова
Кафедра информационных технологий



Спасибо за
внимание!

Лекция 2 Графы



Метод математической индукции:

Мы заметили некоторую закономерность в значениях изучаемой последовательности. Проверяем эту закономерность для $n=1$. Предполагаем, что формула справедлива при некотором n и доказываем, что она справедлива для $n=n+1$. Подставляем в формулу $n+1$ и получаем формулу, которой соответствует $(n+1)$ – ый член. Затем получаем $(n+1)$ – ый член, исходя из общего принципа построения последовательности. Получим формулу для $n+1$. Если эти формулы совпадают, то закономерность считается доказанной.

Пример:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{при } n=1 \text{ эта формула}$$

справедлива: Пусть она справедлива при некотором n . Если она

справедлива для $n+1$, то должно быть $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Получим эту формулу из общих соображений.

$$S_{n+1} = S_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Что и требовалось доказать.

Двудольные графы.

Пусть задан граф G . Если вершины графа могут быть разбиты на два множества X и Y $G(V,E)$, $V = X \sqcup Y$, таких, что каждая вершина множества X смежна со всеми вершинами множества Y (следовательно, каждая вершина из Y смежна со всеми вершинами из X), и все вершины каждого из этих подмножеств между собой не смежны, то такой граф называется **двудольным**.

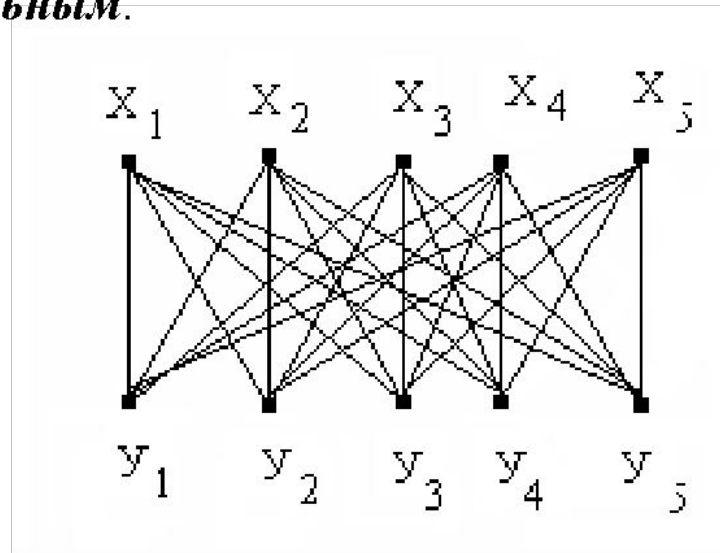


Рис. 20. Пример двудольного графа.

Граф Понтрягина – Куратовского – тоже двудольный граф.

Взвешенный граф.

Пусть задан граф $G(V,E)$. Если каждому ребру этого графа поставлено в соответствие некоторое число, то граф называется ***взвешенным***.

При задании взвешенных графов в матрицу смежности (или список) заносятся веса.

Задача о кратчайшем пути.

Пусть задан связный взвешенный граф. Будем истолковывать его вершины как населенные пункты, а веса как расстояния между ними. Поставим задачу о нахождении такого маршрута, соединяющего x_0 и x_n , что сумма расстояний была минимальной (маршрут не обязан включать все вершины).

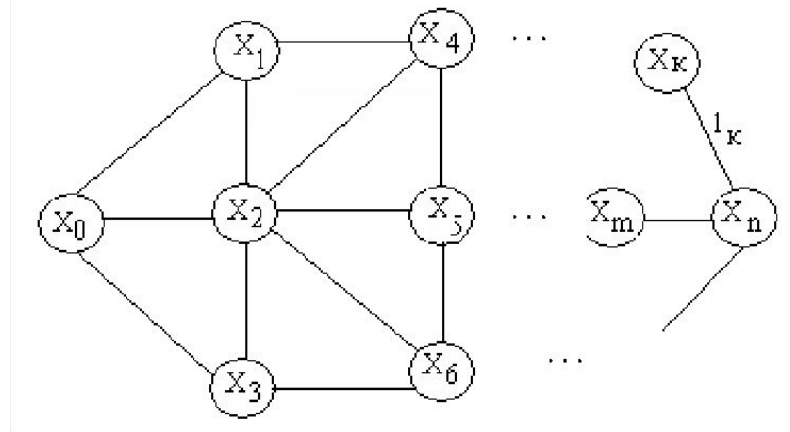


Рис. 24. Пример дорожного графа.

Обозначим l_{ij} - расстояние от i -той до смежной с ней j -той вершины. Задача о нахождении кратчайшего расстояния может быть решена прямым перебором всевозможных расстояний. Кроме кратчайшего расстояния нам необходимо еще и знание промежуточных вершин, через которые пролегает маршрут. Если n - велико, то эта задача становится трудно разрешимой. Возникает необходимость в разработке более компактного алгоритма.

Алгоритм Форда.

Сущность этого алгоритма заключается в том, что каждой i – той вершине ставится в соответствие некоторое число λ_i , значение которого зависит от значения λ предыдущей вершины и расстояния между ними. Сначала объявляется $\lambda_0 = 0$, а все остальные $\lambda = \infty$:

λ	λ	λ	...	λ
0	1	2		n
0	∞	∞	∞	∞

Обозначим через l_{ij} расстояние между i – той и j – той вершинами.

Пусть назначена λ_i i – той вершине ($i=0,1,\dots, n$). Рассмотрим все j – ые вершины, смежные с i – той. Если $\lambda_j - \lambda_i > l_{ij}$ (1),

то полагаем $\lambda_j = \lambda_i + l_{ij}$ (2)

И так до тех пор, пока не дойдем до λ_n . Значение λ_n и будет значением кратчайшего пути.

Обратный ход:

Мы получили $\lambda_n = \lambda_{k_1} + 1_{k_1 n}$ (1*)

Среди расстояний, соединяющих x_n со смежными вершинами, ищем $1_{k_1 n} = \lambda_n - \lambda_{k_1}$.

Затем ищем вершину x_{k_2} , у которой $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} + 1_{k_1 k_2}$. Затем переходим в x_{k_2} и так далее пока не доберемся до x_0 .

Замечание 1:

При каждом поиске предыдущей вершины обратного хода необходимо проверять все смежные вершины, так как предыдущая вершина может быть не единственной.

Замечание 2:

Изменение значения λ происходит только тогда, когда выполняется неравенство (1), то есть $\lambda_j > \lambda_i + 1_{ij}$. Заменяя значение λ_j по формуле (2), мы тем самым уменьшаем его. Так как граф связный, то висячих вершин нет, и, следовательно, каждая вершина получит значение λ .

Обоснование алгоритма:

Так как значение λ при каждом шаге может только уменьшаться, то последовательность значений λ для каждой вершины в конечном итоге принимает минимальное значение. В конечном итоге каждая λ - это кратчайшее расстояние данной вершины от x_0 .

Пример:

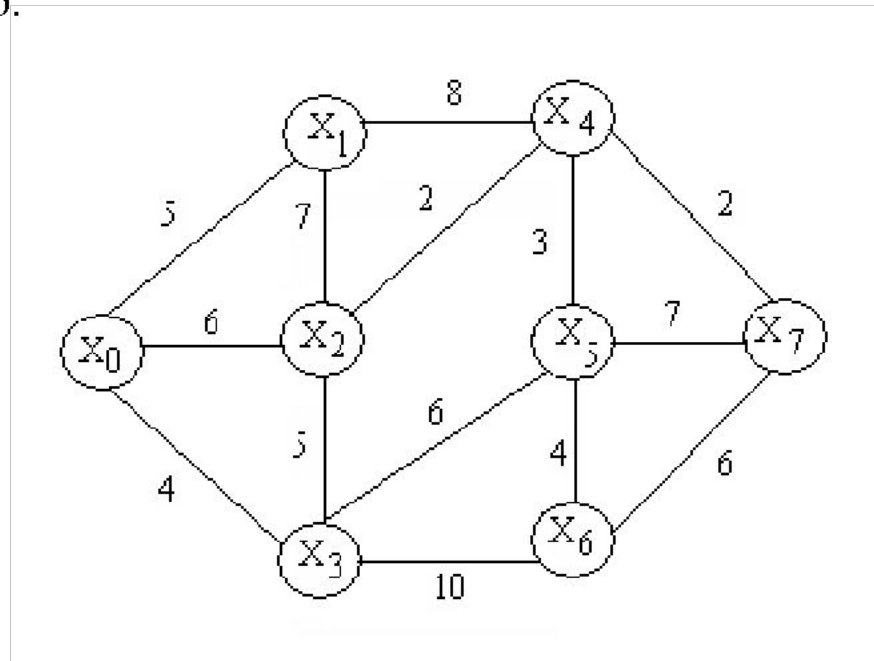


Рис. 25. Пример взвешенного графа.

1) $i=0, j=1,2,3;$

$j=1: \lambda_1 - \lambda_0 = \infty - 0, \infty > 1_{01}; \lambda_1 = \lambda_0 + 1_{01} = 5;$ заносим в таблицу.

$j=2: \lambda_2 - \lambda_0 = \infty - 0, \infty > 1_{02}; \lambda_2 = \lambda_0 + 1_{02} = 6;$ заносим в таблицу.

$j=3: \lambda_3 - \lambda_0 = \infty - 0, \infty > 1_{03}; \lambda_3 = \lambda_0 + 1_{03} = 4;$ заносим в таблицу.

2) $i=1, j=0,2,4$ (0 – уже не рассматриваем)

$j=2: \lambda_2 - \lambda_1 = 1_2, \lambda_2 < \lambda_1 + 1_{12};$ значит не меняем λ_2

$j=4: \lambda_4 > \lambda_1 + 1_{14}, \lambda_4 = 5 + 8 = 13;$ заносим в таблицу.

3) $i=2, j=0, 1, 3, 4.$

$j=0;$ не рассматриваем

$j=1: \lambda_1 < \lambda_2 + 1_{12};$ значит не меняем λ_1

$j=3: \lambda_3 < \lambda_2 + 1_{23};$ значит не меняем λ_3

$j=4: \lambda_4 > \lambda_2 + 1_{24}, \lambda_4 = 6 + 2 = 8;$ заносим в таблицу.

4) $i=3, j=0,2,5,6;$

$j=0;$ не рассматриваем

$j=2: \lambda_2 < \lambda_3 + 1_{23};$ значит не меняем

$j=5: \lambda_5 = 4 + 6 = 10;$ заносим в таблицу.

$j=6: \lambda_6 = \lambda_3 + 1_{63}, \lambda_6 = 4 + 110 = 14;$ заносим в таблицу.

1) $i=4, j=1,2,5,7;$

$j=1: \lambda_1 < \lambda_4 + 1_{14};$ значит не меняем

$j=2: \lambda_2 < \lambda_4 + 1_{24};$ значит не меняем

$j=5: \lambda_5 < \lambda_4 + 1_{45};$ значит не меняем

$j=7: \lambda_7 = \lambda_4 + 1_{47}, \lambda_7 = 10;$ заносим в таблицу.

2) $i=5, j=3,4,6,7;$

$j=3: \lambda_3 < \lambda_5 + 1_{35};$ значит не меняем

$j=4: \lambda_4 < \lambda_5 + 1_{45};$ значит не меняем

$j=6: \lambda_6 = \lambda_5 + 1_{56}, \lambda_6 = 14;$ заносим в таблицу.

$j=7: \lambda_7 < \lambda_5 + 1_{57};$ значит не меняем

3) $i=6, j=3,5,7;$

$j=3: \lambda_3 < \lambda_6 + 1_{36};$ значит не меняем

$j=5: \lambda_5 < \lambda_6 + 1_{56};$ значит не меняем

$j=7: \lambda_7 < \lambda_6 + 1_{67};$ значит не меняем

4) $i=7, j=4,5,6;$

$j=4;$ не рассматриваем

$j=5;$ не рассматриваем

$j=6: \lambda_6 < \lambda_7 + 1_{67};$ значит не меняем

Получили схему:

λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	5	6	4	13			
				8	10	14	10
Итого	5	6	4	8	10	14	10

Обратный ход:

Начиная с последней вершины, проверяем все ей смежные на выполнение условия: $l_{kn} = \lambda_n - \lambda_k$.

Получим кратчайший путь $x_7 \rightarrow x_4 \rightarrow x_2 \rightarrow x_0$.

Задача о максимальном потоке.

Предварительно рассмотрим простую задачу. Пусть трубопровод состоит из трех труб различного сечения с пропускными способностями 10 л/мин, 5 л/мин, 7 л/мин.

Вполне очевидно, что пропускная способность системы равна 5 л/мин, т.е. совпадает с наименьшей пропускной способностью труб.

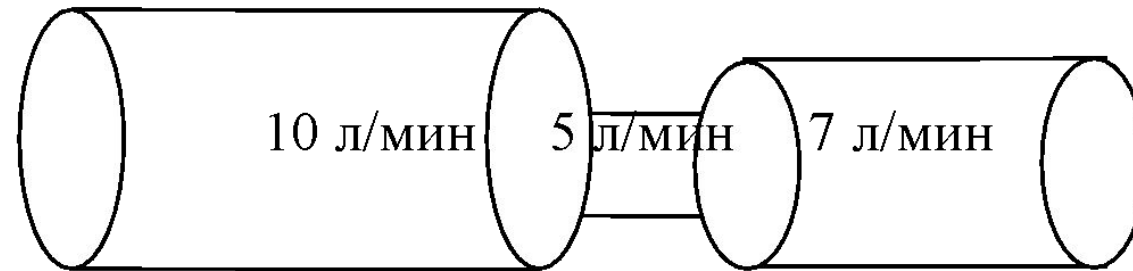


Рис. 26 Трубопровод.

Пусть имеется некоторый взвешенный орграф $G(V,E)$. Выделим в этом графе некоторые две вершины s, t , которые назовем источником и стоком. Будем рассматривать веса как пропускную способность дуги q_{ij} . Количество фактически проходящих единиц по дуге обозначим через z_{ij} . z_{ij} - *поток*, проходящий через дугу ij . Ясно, что $q_{ij} \geq z_{ij}$.

Пусть к источнику S прибывает поток P . Для того, чтобы сеть функционировала нормально, должно быть $P_s = P_t$, $P_i^+ - P_i^- = 0$. Требуется организовать перемещение так, чтобы величина P была максимальной.

Разделим множество вершин на подмножества X_1 и X_2 . Рассмотрим дугу (V_i, V_j) и отнесем вершину V_i к x_1 , а V_j к x_2 . Таким образом, для данного разбиения (x_1, x_2) концы дуг принадлежат разным подмножествам. Такое разбиение называется *разрезом*, отделяющим вершину V_i от V_j .

Совокупность потоков, протекающих через x_1, x_2 , называется *потокom разреза*.

Теорема Форда – Фолкерсона.

Теорема. Максимальный поток сети равен минимальному потоку разреза.

Доказательство:

Так как максимальный поток обязательно пройдет по дуге минимального разреза, то это будет означать, что он совпадает с минимальным потоком разреза. Это будет выполняться, если выполняется условия: $P_s = P_t$, т.е. $P_s - P_t = 0$.

Предположим, что пропускные способности дуг выражаются целыми числами.

. Будем последовательно строить разрезы, и назначать каждой вершине некоторое число – метку r по следующему правилу.

$$r_j = \min(r_i, q_{ij} - z_{ij}), \text{ если } z_{ij} \leq q_{ij} \text{ и дуга исходит из вершины } V_i, \text{ и } r_j = z_{ij}, \text{ при } z_{ij} > 0, \text{ если дуга заходит в } V_i.$$

Для определенности в метку будем включать указатель вершины, из которой мы пришли в вершину V_j , то есть метка будет выглядеть: $+V_i, r_i$ - если V_i - вершина исхода; и $-V_i, r_i$, если V_i - вершина захода.

Будем строить разрезы.

Включаем в разрез источник - вершину V_1 , присвоив ей метку

$$r_s = \infty, \text{ и положив все потоки } z_{ij} = 0.$$

Просматриваем все смежные вершины, идущие в прямом направлении Γ^+ . Если им не присвоены метки, то присваиваем их r_j

$$= \min(r_i, q_{ij} - z_{ij}) \quad (1)$$

Тем самым включаем эти вершины в подмножество X_1 .

Просматриваем все смежные вершины, идущие в обратном направлении Γ^- . Если им не присвоены метки, то присваиваем их

$$r_j = z_{ij} > 0 \quad (2).$$

Тем самым включаем эти вершины в подмножество X_1 .

Проделаем это со следующей вершиной и со следующей, пока не дойдем до вершины t .

1). При этом может оказаться, что вершина t попадает во множество X_1 . Это будет означать, что полученные нами потоки могут быть увеличены на некоторую величину для дуг в прямом направлении, и уменьшены в обратном направлении. Для полученной цепи, связывающей сток и источник (вершины меток) полагаем потоки равными меткам.

Для дуг, идущих в прямом направлении найдем

$$\epsilon 1 = \min(q_{ij} - z_{ij}).$$

Для дуг, идущих в обратном направлении найдем $\epsilon 2 = \min z_{ij} > 0$.

Найдем $\epsilon = \min(\epsilon 1, \epsilon 2)$. Используя метки, строим цепь, связывающую сток с источником. Такие цепи называются аугментальными. Для дуг в прямом направлении к имеющимся потокам прибавим величину ϵ , и вычтем ϵ из потоков в обратном направлении.

После этого стираем все метки и строим новые разрезы с новыми потоками.

2). Вершина t не попала в X_1 . это значит, что для дуг в прямом направлении имеем $q_{ij} = z_{ij}$, а для дуг в обратном направлении

$z_{ij} = 0$. Иначе говор, величина потока равна значению разреза, который и будет минимальным.

Т.к. пропускные способности дуг выражаются целыми числами, то в случае 1). Мы увеличивали поток на некоторое целое число, значит рано или поздно получим максимальный поток. Это наступит тогда, когда не останется аугментальных цепей.

Таким образом, установлено существование минимального разреза. Теорема доказана. Заодно, получен алгоритм нахождения наибольшего потока.

Пример. Граф задается матрицей смежности (пропускных способностей).

	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V ₆	V ₇	V ₈	V ₉	V ₁₀
V ₁		10	17							
V ₂				13		23				
V ₃				11						
V ₄					5					
V ₅			19				11			
V ₆					14		10	21		
V ₇									8	11
V ₈							17			
V ₉										23
V ₁₀								15		

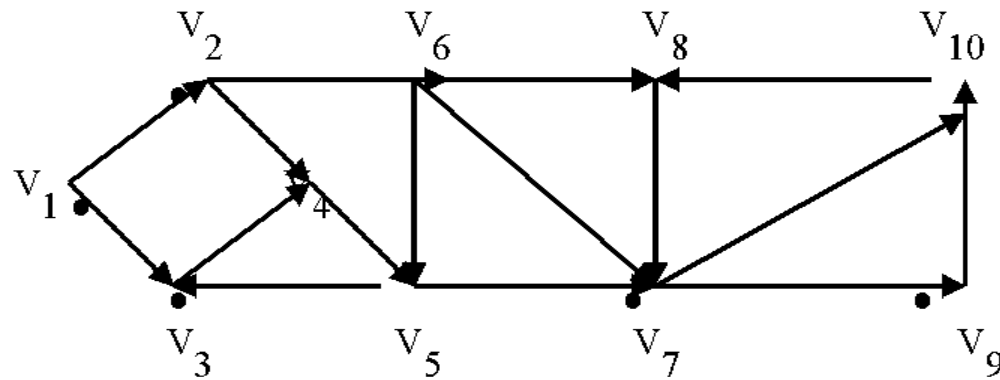


Рис. 27. Пример сети с 10 вершинами.

Вершина V_1 - источник, вершина V_{10} - сток. Строим разрезы.

Вершине V_1 присваиваем метку $r_1 = \infty$, положив все потоки

$$z_{ij} = 0.$$

Просматриваем вершину V_1 .

$$\Gamma^+(V_1) = \{V_2, V_3\}.$$

Присваиваем вершине V_2 метку $+V_1$, $r_2 = \min(r_1, q_{12} - z_{12}) = \min(\infty, 10 - 0) = 10$. Метка V_2 : $+V_1, r_2 = 10$.

Присваиваем вершине V_3 метку $+V_1$, $r_3 = \min(r_1, q_{13} - z_{13}) = \min(\infty, 17 - 0) = 17$. Метка V_3 : $+V_1, r_3 = 17$.

$\Gamma^-(V_1)$ – пусто.

Вершина V_1 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_2 .

$$\Gamma^+(V_2) = \{V_4, V_6\}.$$

Присваиваем вершине V_4 метку $+V_2$, $r_4 = \min(r_2, q_{24} - z_{24}) = \min(10, 13 - 0) = 10$. Метка V_4 : $+V_2, r_4 = 10$.

Присваиваем вершине V_6 метку $+V_2$, $r_6 = \min(r_2, q_{26} - z_{26}) = \min(10, 23 - 0) = 10$. Метка V_6 : $+V_2, r_6 = 10$.

$\Gamma^-(V_2) = \{V_1\}$. Но V_1 помечена.

Вершина V_2 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_3 .

$\Gamma^+(V_3) = \{V_4\}$. Но V_4 помечена.

$\Gamma^-(V_3) = \{V_1, V_5\}$. Но V_1 помечена, а $z_{53} = 0$.

Вершина V_3 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_4 .

$\Gamma^+(V_4) = \{V_5\}$.

Присваиваем вершине V_5 метку $+V_4$, $r_5 = \min(r_4, q_{45} - z_{45}) =$
 $\min(10, 5 - 0) = 5$. Метка V_5 : $+V_4$, $r_5 = 5$.

$\Gamma^-(V_4) = \{V_2, V_3\}$. Но V_2 помечена, и V_3 помечена.

Вершина V_4 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_5 .

$\Gamma^+(V_5) = \{V_7, V_3\}$.

Присваиваем вершине V_7 метку $+V_5$, $r_7 = \min(r_5, q_{57} - z_{57}) = \min(5,$
 $11 - 0) = 5$. Метка V_7 : $+V_5$, $r_7 = 5$.

Вершина V_3 помечена.

$\Gamma^-(V_5) = \{V_4, V_6\}$. Но V_4 и V_6 помечены.

Вершина V_5 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_6 .

$\Gamma^+(V_6) = \{V_5, V_7, V_8\}$. Но V_5 и V_7 помечены. Присваиваем вершине V_8 метку $+V_6, r_8 = \min(r_6, q_{68} - z_{168}) = \min(10, 21 - 0) = 10$.

Метка V_8 : $+V_6, r_8 = 10$.

$\Gamma^-(V_6) = \{V_2\}$. Но V_2 помечена

Вершина V_6 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_7 .

$\Gamma^+(V_7) = \{V_9, V_{10}\}$.

Присваиваем вершине V_9 метку $+V_7, r_9 = \min(r_7, q_{79} - z_{79}) = \min(5, 8 - 0) = 5$. Метка V_9 : $+V_7, r_9 = 5$.

Присваиваем вершине V_{10} метку $+V_7, r_{10} = \min(r_7, q_{710} - z_{710}) = \min(5, 11 - 0) = 5$. Метка V_{10} : $+V_7, r_{10} = 5$

$\Gamma^-(V_7) = \{V_5, V_6, V_8\}$. Но они помечены.

Вершина V_7 помечена и просмотрена.

Все вершины помечены. Получили цепь $V_{10}, V_7, V_5, V_4, V_2, V_1$

Назначим новые потоки, учитывая, что $v = 5$.

Метка V_{10} : $+V_7, r_{10} = 5$. Значит поток $z_{710} = 0 + 5 = 5$.

Метка V_7 : $+V_5, r_7 = 5$. Значит поток $z_{57} = 0 + 5 = 5$.

Метка V_5 : $+V_4, r_5 = 5$. Значит поток $z_{45} = 0 + 5 = 5$.

Метка V_4 : $+V_2, r_4 = 10$. Значит поток $z_{24} = 0 + 5 = 5$.

Метка V_2 : $+V_1, r_2 = 10$. Значит поток $z_{12} = 0 + 5 = 5$.

Остальные потоки равны 0.

Стираем все метки и начинаем с начала строить разрезы с новыми потоками.

Вершине V_1 присваиваем метку $r_1 = \infty$.

Просматриваем вершину V_1 .

$$\Gamma^+(V_1) = \{V_2, V_3\}.$$

Присваиваем вершине V_2 метку $+V_1$, $r_2 = \min(r_1, q_{12} - z_{12}) = \min(\infty, 10 - 5) = 5$. Метка V_2 : $+V_1, r_2 = 5$.

Присваиваем вершине V_3 метку $+V_1$, $r_3 = \min(r_1, q_{13} - z_{13}) = \min(\infty, 17 - 0) = 17$. Метка V_3 : $+V_1, r_3 = 17$.

$\Gamma^-(V_1)$ – пусто.

Вершина V_1 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_2 .

$$\Gamma^+(V_2) = \{V_4, V_6\}.$$

Присваиваем вершине V_4 метку $+V_2$, $r_4 = \min(r_2, q_{24} - z_{24}) = \min(5, 13 - 5) = 5$. Метка V_4 : $+V_2, r_4 = 5$.

Присваиваем вершине V_6 метку $+V_2$, $r_6 = \min(r_2, q_{26} - z_{26}) = \min(5, 23 - 0) = 5$. Метка V_6 : $+V_2, r_6 = 5$.

$\Gamma^-(V_2) = \{V_1\}$. Но V_1 помечена.

Вершина V_2 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_3 .

$$\Gamma^+(V_3) = \{V_4\}. \text{ Но } V_4 \text{ помечена.}$$

$\Gamma^-(V_3) = \{V_1, V_5\}$. Но V_1 помечена, а $z_{53} = 0$.

Вершина V_3 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_4 .

$$\Gamma^+(V_4) = \{V_5\}.$$

Присваиваем вершине V_5 метку $+V_4$, $r_5 = \min(r_4, q_{45} - z_{45}) = \min(5, 5 - 5) = 0$. Значит, этой вершине метку не присваиваем.

$\Gamma^-(V_4) = \{V_2, V_3\}$. Но V_2 помечена, и V_3 помечена.

Вершина V_4 помечена и просмотрена.

Т.к. вершина V_5 не помечена, то её пока не просматриваем

Просматриваем вершину V_6 .

$$\Gamma^+(V_6) = \{V_5, V_7, V_8\}.$$

. Присваиваем вершине V_5 метку $+V_6$, $r_5 = \min(r_6, q_{65} - z_{65}) = \min(5, 14 - 0) = 5$. Метка V_5 : $+V_6$, $r_5 = 5$.

. Присваиваем вершине V_7 метку $+V_6$, $r_7 = \min(r_6, q_{67} - z_{67}) = \min(5, 10 - 0) = 5$. Метка V_7 : $+V_6$, $r_7 = 5$.

Присваиваем вершине V_8 метку $+V_6$, $r_8 = \min(r_6, q_{68} - z_{68}) = \min(5, 21 - 0) = 5$. Метка V_8 : $+V_6$, $r_8 = 5$.

$\Gamma^-(V_6) = \{V_2\}$. Но V_2 помечена.

Вершина V_6 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_5 .

$\Gamma^+(V_5) = \{V_7, V_3\}$. Но V_3 и V_7 помечены.

$\Gamma^-(V_5) = \{V_4, V_6\}$. Но V_4 и V_6 помечены

Вершина V_5 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_7 .

$$\Gamma^+(V_7) = \{V_9, V_{10}\}.$$

Присваиваем вершине V_9 метку $+V_7, r_9 = \min(r_7, q_{79} - z_{79}) = \min(5, 8 - 0) = 5$. Метка V_9 : $+V_7, r_9 = 5$.

Присваиваем вершине V_{10} метку $+V_7, r_{10} = \min(r_7, q_{710} - z_{710}) = \min(5, 11 - (-5)) = 5$.

Все вершины помечены.

Все вершины помечены

. Получили цепь $V_{10}, V_7, V_6, V_2, V_1$

Назначим новые потоки, учитывая, что $\theta = 5$.

Метка V_{10} : $+V_7, r_{10} = 5$. Значит поток $z_{710} = 5 + 5 = 10$.

Метка V_7 : $+V_6, r_7 = 5$... Значит поток $z_{67} = 0 + 5 = 5$.

Метка V_6 : $+V_2, r_6 = 5$. Значит поток $z_{26} = 0 + 5 = 5$.

Метка V_2 : $+V_1, r_2 = 10$. Значит поток $z_{12} = 5 + 5 = 10$.

Потоки имеют вид

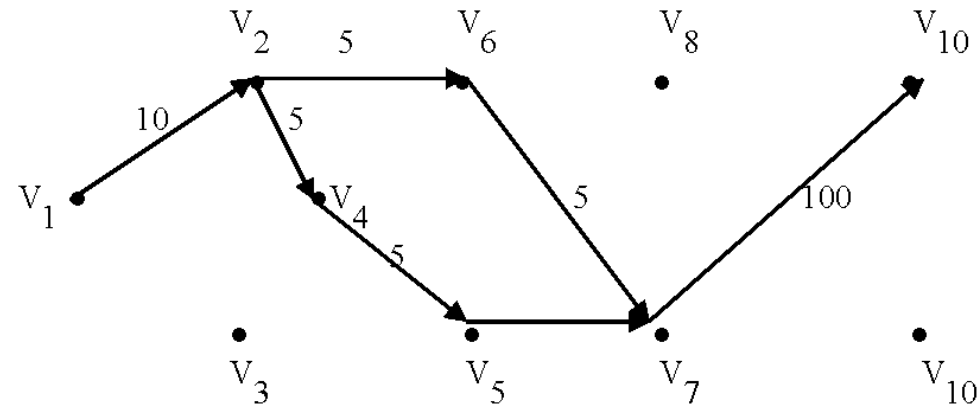


Рис. 28. Распределение потоков после второй итерации.

Стираем все метки и начинаем с начала строить разрезы с новыми потоками.

Вершине V_1 присваиваем метку $r_1 = \infty$.

Просматриваем вершину V_1 .

$$\Gamma^+(V_1) = \{V_2, V_3\}.$$

Присваиваем вершине V_2 метку $+V_1$, $r_2 = \min(r_1, q_{12} - z_{12}) = \min(\infty, 10 - 105) = 0$. значит, вершине V_2 метка не присваивается.

Присваиваем вершине V_3 метку $+V_1$, $r_3 = \min(r_1, q_{13} - z_{13}) = \min(\infty, 17 - 10) = 1$. Метка V_3 : $+V_1, r_3 = 17$.

$\Gamma^-(V_1)$ – пусто.

Вершина V_1 помечена и просмотрена.

Т.к. вершина V_2 не помечена, то её пока не просматриваем

Просматриваем вершину V_3 .

$$\Gamma^+(V_3) = \{V_4\}.$$

Присваиваем вершине V_4 метку $+V_3$, $r_4 = \min(r_3, q_{34} - z_{34}) = \min(17, 11 - 0) = 11$. Метка V_4 : $+V_3, r_4 = 11$.

$\Gamma^-(V_3) = \{V_1, V_5\}$. Но V_1 помечена, а $z_{53} = 0$.

Вершина V_3 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_4 .

$$\Gamma^+(V_4) = \{V_5\}.$$

Присваиваем вершине V_5 метку $+V_4$, $r_5 = \min(r_4, q_{45} - z_{45}) = \min(11, 5 - 5) = 0$. Значит, этой вершине метку не присваиваем.

$\Gamma^-(V_4) = \{V_2, V_3\}$. Но V_3 помечена.

Присваиваем вершине V_2 метку $-V_4$, $r_2 = z_{24} = 5$.

Метка V_2 : $-V_4$, $r_2 = 5$.

Вершина V_4 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_2 .

$$\Gamma^+(V_2) = \{V_4, V_6\}.$$

Но V_4 помечена.

Присваиваем вершине V_6 метку $+V_2$, $r_6 = \min(r_2, q_{26} - z_{26}) = \min(5, 23 - 5) = 5$. Метка V_6 : $+V_2$, $r_6 = 5$.

$\Gamma^-(V_2) = \{V_1\}$. Но V_1 помечена.

Вершина V_2 помечена и просмотрена.

Т.к. вершина V_5 не помечена, то её пока не просматриваем.

Просматриваем вершину V_6 .

$$\Gamma^+(V_6) = \{V_5, V_7, V_8\}.$$

. Присваиваем вершине V_5 метку $+V_6, r_5 = \min(r_6, q_{65} - z_{65}) = \min(5, 14 - 5) = 5$.

$$\text{Метка } \underline{V_5}: \underline{+V_6}, \underline{r_5} = \underline{5}.$$

. Присваиваем вершине V_7 метку $+V_6, r_7 = \min(r_6, q_{67} - z_{67}) = \min(5, 10 - 5) = 5$. Метка V_7 : $+V_6, r_7 = 5$.

Присваиваем вершине V_8 метку $+V_6, r_8 = \min(r_6, q_{68} - z_{68}) = \min(5, 21 - 0) = 5$. Метка V_8 : $+V_6, r_8 = 5$.

$\Gamma^-(V_6) = \{V_2\}$. Но V_2 помечена.

Вершина V_6 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_5 .

$\Gamma^+(V_5) = \{V_7, V_3\}$. Но V_3 и V_7 помечены.

$\Gamma^-(V_5) = \{V_4, V_6\}$. Но V_4 и V_6 помечены

Вершина V_5 помечена и просмотрена.

Просматриваем вершину V_7 .

$$\Gamma^+(V_7) = \{V_9, V_{10}\}.$$

Присваиваем вершине V_9 метку $+V_7, r_9 = \min(r_7, q_{79} - z_{79}) = \min(5, 8 - 0) = 5$. Метка V_9 : $+V_7, r_9 = 5$.

Присваиваем вершине V_{10} метку $+V_7, r_{10} = \min(r_7, q_{710} - z_{710}) = \min(5, 11 - 10) = 1$.

$\Gamma^-(V_7) = \{V_5, V_6\}$. Но V_4 и V_6 помечены

Все вершины помечены. Получили цепь $V_{10}, V_7, V_6, V_2, V_4, V_3, V_1$

. Имеем $v_1 = 1, v_2 = 5$. Тогда $v = \min(v_1, v_2) = 1$.

Назначим новые потоки, учитывая, что $v = 1$.

Метка V_{10} : $+V_7, r_{10} = 5$. Значит поток $z_{710} = 10 + 1 = 11$.

Метка V_7 : $+V_6, r_7 = 5$. Значит поток $z_{67} = 5 + 1 = 6$.

Метка V_6 : $+V_2, r_5 = 5$. Значит поток $z_{26} = 5 + 1 = 6$.

Метка V_2 : $-V_4, r_2 = 5$. Значит поток $z_{24} = 5 - 1 = 4$.

Метка V_4 : $+V_3, r_4 = 11$. Значит поток $z_{34} = 0 + 1 = 1$.

Метка V_3 : $+V_1, r_3 = 17$. Значит поток $z_{13} = 0 + 1 = 1$.

Потоки имеют вид

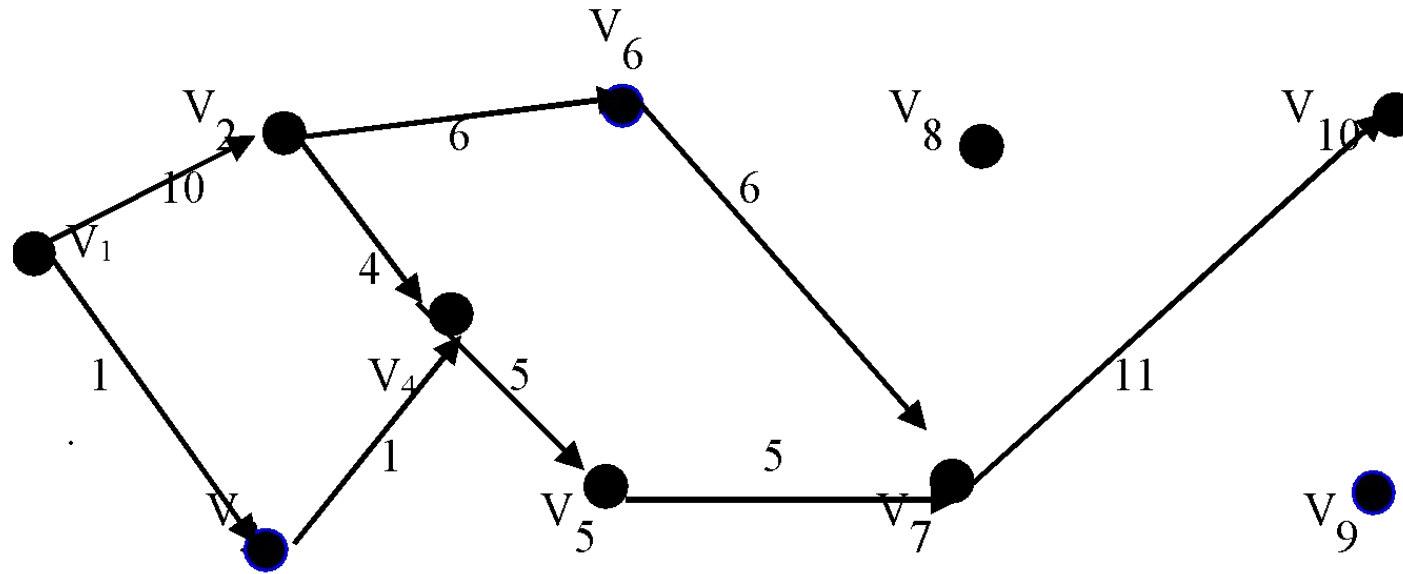


Рис. 29 Распределение потоков после третьей итерации

Связность в графах.

Пусть задан граф G , у которого p – вершин и q – ребер. Если для двух вершин существует цепь, то они называются **связными**. Граф называется **связным**, если у него все вершины связны. Если граф может быть задан в виде объединения нескольких подграфов, то каждый такой подграф называется **компонентой связности**, а количество компонент обозначается буквой k .

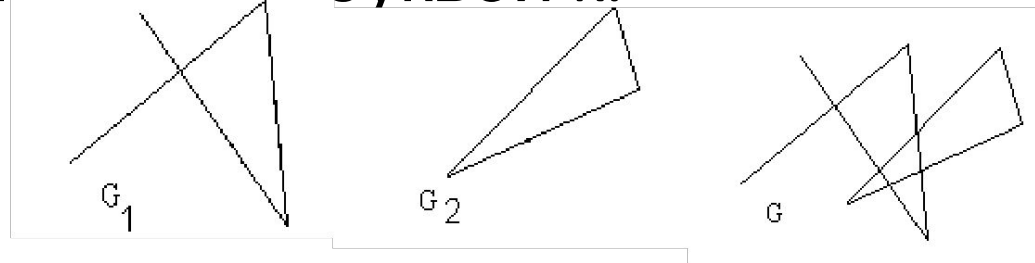


Рис. 31. $G = G_1 \cup G_2$, $k=2$.

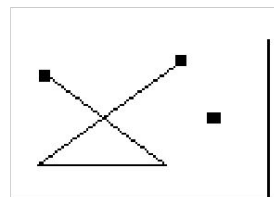


Рис. 32. Несвязный граф, $k=3$.

Циклы.

Цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают, называется **циклом**. Для циклов вводится понятие **циклонического числа** $z = q - p + k$.

Если $z=0$, то граф не имеет циклов. Если же $z=1$, то граф имеет один цикл. Для мультиграфа z выражает число циклов.

Например: при $p=4$, $q=8$ и $k=1$: $z = q - p + k = 8 - 4 + 1 = 5$.

Деревья.

Если граф не имеет циклов, то он называется **ациклическим**. В связном графе **мостом** называется ребро, при удалении которого увеличивается число компонент связности. Если в графе $q=p-1$, то граф называется **древовидным**. Ациклический связный граф называется **деревом**.

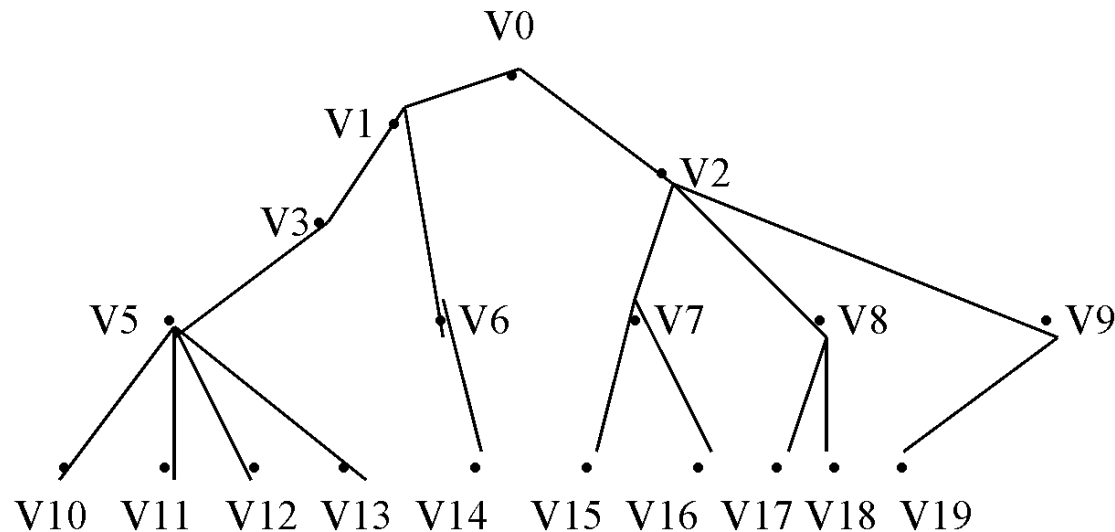


Рис. 33. Граф-дерево

Деревья.

- В деревьях обычно одну из вершин выделяют и называют **корнем**.
- Вершины, удаленные от корня на одно и то же расстояние образуют **ярус**. V_0 - нулевой ярус, V_1, V_2 – первый ярус, V_3, V_4, V_7, V_8, V_9 – второй ярус, $V_5, V_6, V_{15}, V_{16}, V_{17}, V_{18}, V_{19}$ - третий ярус, $V_{10}, V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}$ – четвертый ярус.
- Вершины, степень которых равна 1 (висячие) называются концевыми, или **листьями**. На рис. 33 – это вершины , $V_{10}, V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}, V_{15}, V_{16}, V_{17}, V_{18}, V_{19}$.
- Упорядоченное объединение непересекающихся деревьев называется **лесом**. Ясно, что лес является несвязным графом.
- **Остовом** связного графа называется подграф, содержащий все его вершины и являющийся деревом. Такое дерево называют **покрывающим граф**.
- Каждая вершина дерева называется **узлом**.

Задача о минимальном остовном дереве.

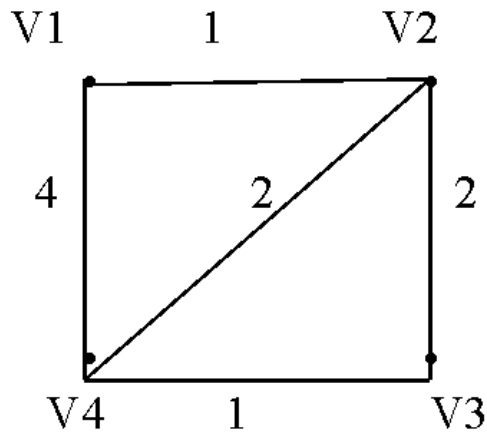


Рис. 34. Граф.

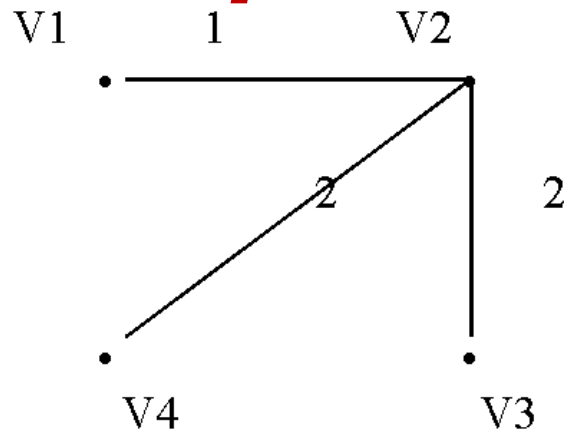


Рис. 35. Дерево кратчайших путей.

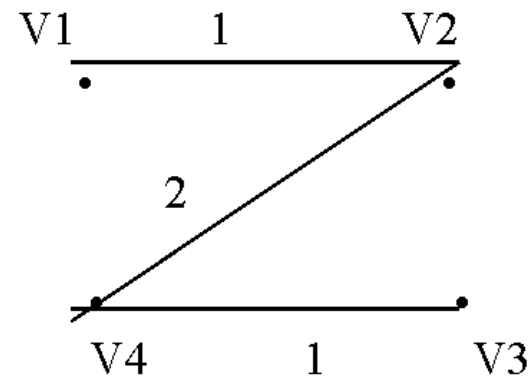
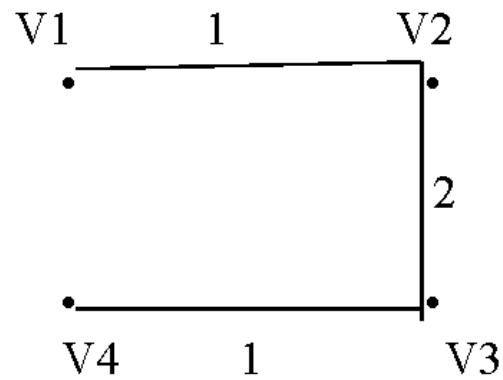


Рис. 36. Два кратчайших остова.

Жадный алгоритм Краскала построения кратчайшего остова.

Пусть задан связный граф, имеющий p вершин и s с различными длинами своих ребер. На первом шаге находим ребро наименьшей длины и помещаем его в будущий остов. Получили подграф. Затем из оставшихся ребер находим второе ребро наименьшей длины и помещаем его в подграф - будущий остов. Затем из оставшихся ребер находим ребро наименьшей длины, не образующее цикла с ранее выбранными ребрами, и помещаем его в подграф. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока есть ребра, не образующие цикл в подграфе. Т.к. граф связный, то в подграф попадут все вершины, т.е. подграф будет содержать p вершин. Следовательно, полученный в конечном итоге подграф будет остовным. Т.к. он ациклический, то он дерево. А т.к. в него включались ребра наименьшей длины, то оно и будет искомым остовом.

Ориентированные деревья.

Орграф называется ориентированным деревом (ордеревом), если:

- существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0 (корень),
- полустепень захода остальных узлов равна 1,
- все узлы достижимы из корня.

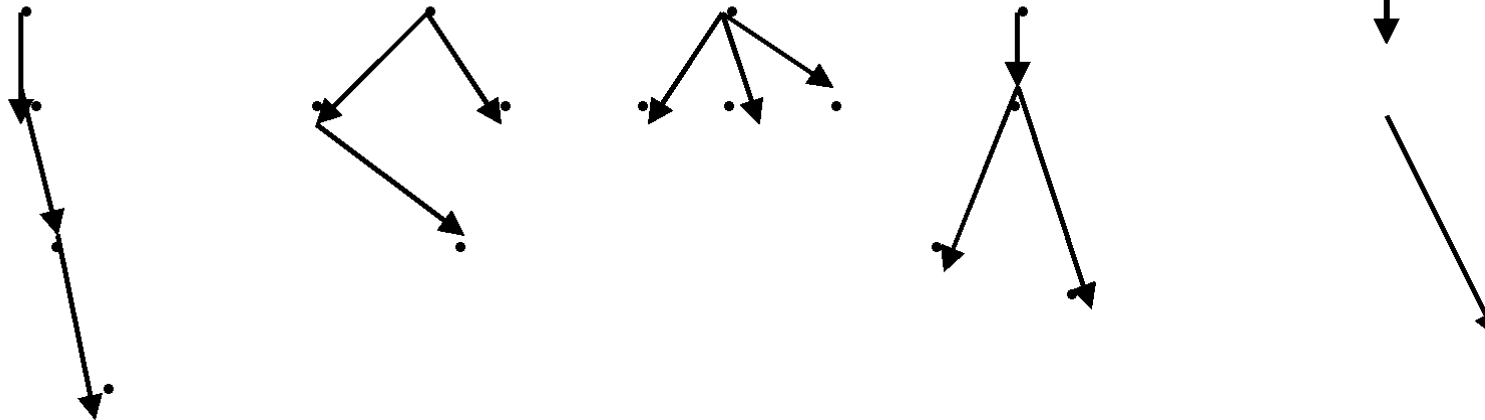


Рис. 37. Ордеревья с 4 узлами.

Ориентированные деревья.

Свойства ордеревьев:

- 1. Если q – число дуг, а p – число узлов ордерева, то $q = p - 1$.
- 2. Если в ордереве отменить ориентацию ребер, то получится свободное дерево.
- 3. Для каждого узла существует единственный путь из корня.
- 4. В ордереве нет контуров.
- 5. Если в свободном дереве любую вершину назначить корнем, то получится ордерев.

Упорядоченные деревья.

- Если в качестве корня в ордереве выбрать какой-нибудь узел v , то множество узлов, достижимых из v образует орграф с корнем v (поддерево).
- Если относительный порядок поддеревьев установлен, то ордереве называется упорядоченным.
- Ордеревья и упорядоченные деревья часто используются в программировании. Например, для представления выражений, вложенных блоков, для представления иерархической структуры операторов, структуры вложенности каталогов и файлов, скобочные структуры и т.д.

Бинарные деревья.



Рис. 60 Пример бинарного дерева.

Эйлеровы циклы.

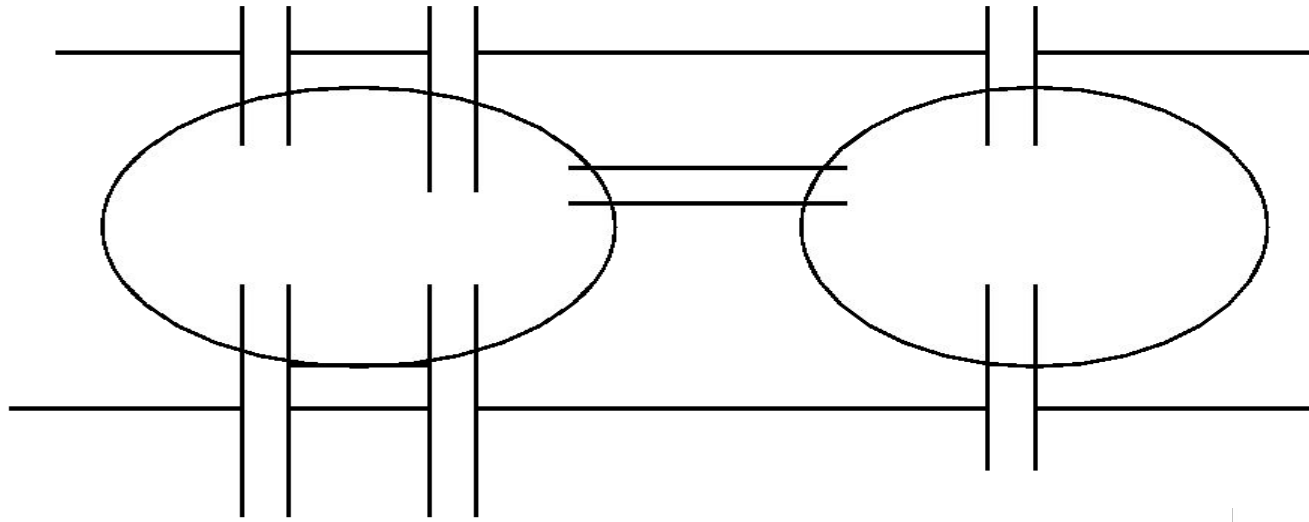


Рис. 61. Задача о Кёнигсбергских мостах.

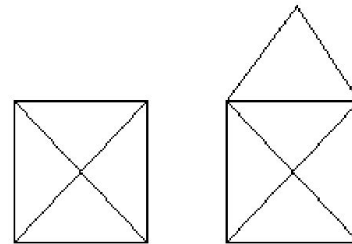


Рис.62. Закрытый и открытый конверты

Эйлеровы циклы.

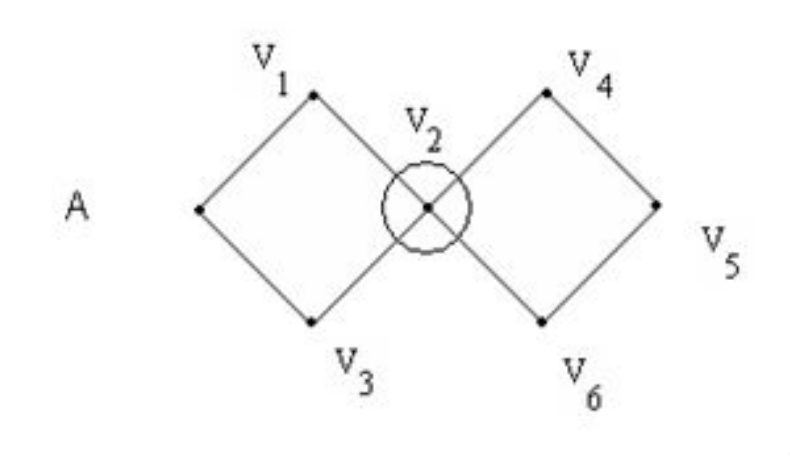


Рис. 63 Образование эйлерового цикла.

Гамильтоновы графы.

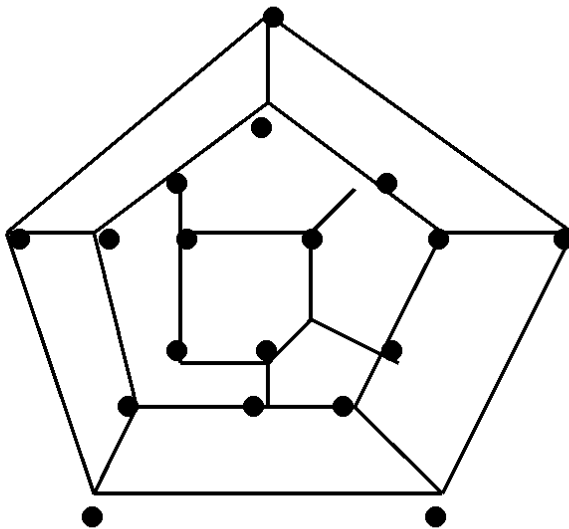


Рис. 64 Задача о «кругосветном путешествии».

БГТУ им. В.Г. Шухова
Кафедра информационных технологий



Спасибо за
внимание!