Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots .$$

$$S_1 = b_1;$$

$$S_2 = b_1 + b_2;$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3;$$

$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Формула *n-го* члена геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Получилась последовательность $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$. Как всякая числовая последовательность, она может сходиться или расходиться. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют *суммой геометрической прогрессии* (обратите внимание: не суммой n членов геометрической прогрессии, как мы говорили в 9-м классе, а суммой геометрической прогрессии). Если же эта последовательность расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме первых n членов геометрической прогрессии можно, разумеется, говорить и в этом случае.

Если знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то сумма S прогрессии вычисляется по формуле $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

Пример 1. Найти сумму геометрической прогрессии

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ .$$

Решение. Здесь $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$. Поскольку знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, мы имеем право воспользоваться только что полученной формулой $S = \frac{b_1}{1-q}$. Значит, $S = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$. Обратите внимание, что нам удалось найти сумму бесконечного множества слагаемых:

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 8.$$

Ответ: $S = 8$.

Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 10,\ q = 0{,}1;$

б) $S = -3,\ q = -\frac{1}{3};$

в) $S = 6,\ q = -0{,}5;$

г) $S = -21,\ q = \frac{1}{7}.$

Найдите n-й член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 15,\ q = -\frac{1}{3},\ n = 3;$

б) $S = -20,\ b_1 = -16,\ n = 4;$

в) $S = 20,\ b_1 = 22,\ n = 4;$

г) $S = 21,\ q = \frac{2}{3},\ n = 3.$