

# *ЛЕКЦИЯ 13*

## **Тема 1.12. Основные понятия и аксиомы динамики. Понятие о трении**

*Иметь представление о массе тела и ускорении свободного падения, о связи между силовыми и кинематическими параметрами движения, о двух основных задачах динамики.*

*Знать аксиомы динамики и математическое выражение основного закона динамики.*

*Знать зависимости для определения силы трения.*

### **Содержание и задачи динамики**

*Динамика — раздел теоретической механики, в котором устанавливается связь между движением тел и действующими на них силами.*

В динамике решают два типа задач:

определяют параметры движения по заданным силам;

определяют силы, действующие на тело, по заданным кинематическим параметрам движения.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому тело можно принять за материальную точку.

Если размеры тела малы по сравнению с траекторией, его тоже можно рассматривать как материальную точку, при этом точка совпадает с центром тяжести тела.

При вращательном движении тела точки могут двигаться неодинаково, в этом случае некоторые положения динамики можно применять только к отдельным точкам, а материальный объект рассматривать как совокупность материальных точек.

Поэтому динамику делят на динамику точки и динамику материальной системы.

## Аксиомы динамики

Законы динамики обобщают результаты многочисленных опытов и наблюдений. Законы динамики, которые принято рассматривать как аксиомы, были сформулированы Ньютоном, но первый и четвертый законы были известны Галилею. Механику, основанную на этих законах, называют классической механикой.

**Первая аксиома** (принцип инерции):

*Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.*

Это состояние называют состоянием инерции. Вывести точку из этого состояния, т. е. сообщить ей некоторое ускорение, может внешняя сила.

Всякое тело (точка) обладает *инертностью*. Мерой инертности является масса тела.

**Массой** называют *количество вещества в объеме тела*, в классической механике ее считают величиной постоянной. Единица измерения массы — килограмм (кг).

**Вторая аксиома** (второй закон Ньютона — основной закон динамики)

*Зависимость между силой, действующей на материальную точку, и сообщаемым ею ускорением следующая:*

$$F = ma,$$

где  $m$  — масса точки, кг;  $a$  — ускорение точки, м/с<sup>2</sup>.

*Ускорение, сообщенное материальной точке силой, пропорционально величине силы и совпадает с направлением силы.*

Основной закон динамики в дифференциальной форме:

$$F = m \frac{d^2 S}{dt^2}, \quad \text{т. к.} \quad a = \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

На все тела на Земле действует сила тяжести, она сообщает телу ускорение свободного падения, направленное к центру Земли:

$$G = mg,$$

где  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ , ускорение свободного падения.

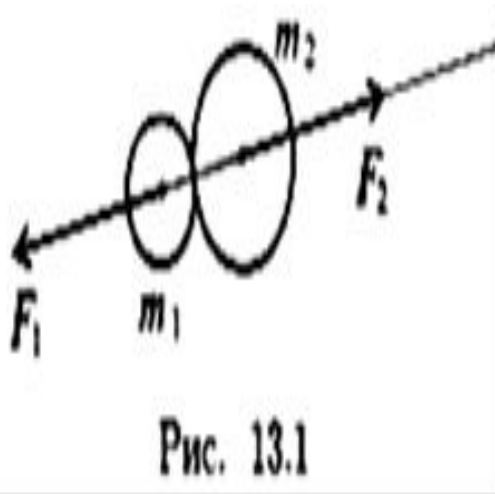


Рис. 13.1

**Третья аксиома** (третий закон Ньютона).

Силы взаимодействия двух тел равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны (рис. 13.1):

$$F_1 = F_2; \quad F_1 = m_1 a_1; \quad F_2 = m_2 a_2.$$

Откуда

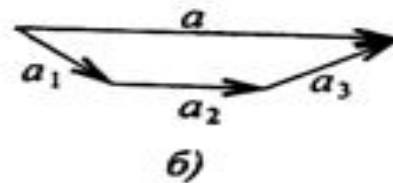
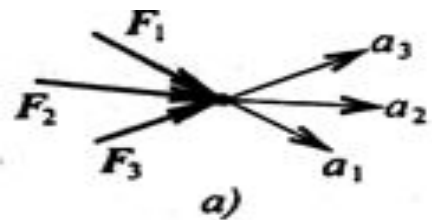
$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

При взаимодействии ускорения обратно пропорцион.....

**Четвертая аксиома** (закон независимости действия сил).

Каждая сила системы сил действует так, как она действовала бы одна.

Ускорение, сообщаемое точке системой сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщенных точке каждой силой в отдельности (рис. 13.2):



$$F_{\Sigma} = ma; \quad a = \sum_0^n a_k.$$

Рис. 13.2

## Понятие о трении. Виды трения

*Трение* — сопротивление, возникающее при движении одного шероховатого тела по поверхности другого. При скольжении тел возникает трение скольжения, при качении — трение качения. Природа сопротивлений движению в разных случаях различна.

### *Трение скольжения.*

Причина — механическое зацепление выступов. Сила сопротивления движению при скольжении называется *силой трения скольжения* (рис. 13.3а).

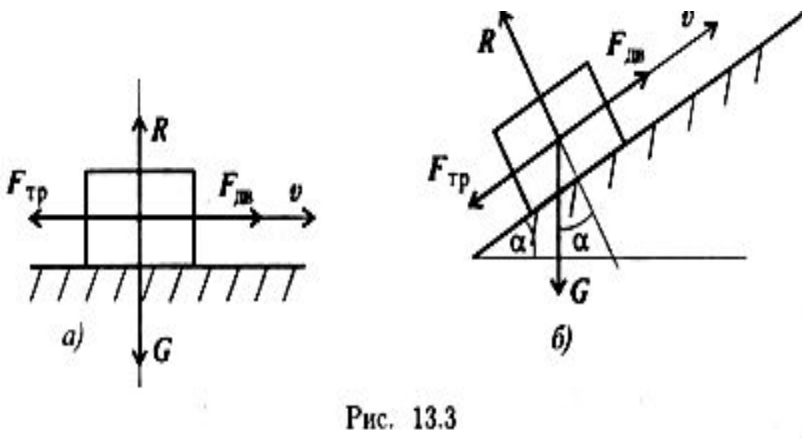


Рис. 13.3

### **Законы трения скольжения:**

Сила трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{тр} = F_f = fR,$$

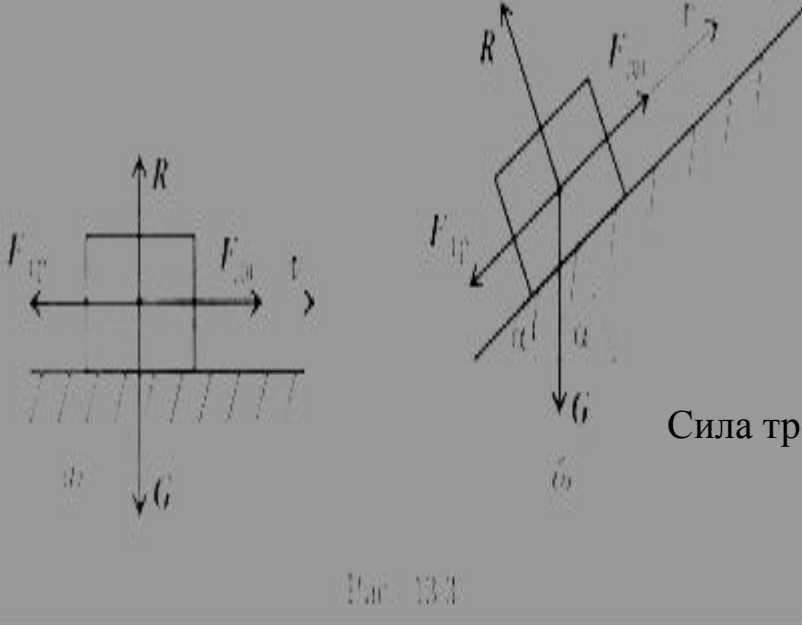
где  $R$  — сила нормального давления, направлена перпендикулярно опорной поверхности;  $f$  — коэффициент трения скольжения.

В случае движения тела по наклонной плоскости (рис. 13.3, б)

$$R = G \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол наклона плоскости к горизонту.

*Сила трения всегда направлена в сторону, обратную направлению движения*



Сила трения меняется от нуля до некоторого максимального значения, называемого силой трения покоя (статическое трение):

$$0 < F_f \leq F_{f0}$$

$F_{f0}$  — статическая сила трения (сила трения покоя).

Сила трения при движении меньше силы трения покоя.

Сила трения при движении называется динамической силой трения ( $F_f$ ):

$$F_f \leq F_{f0}$$

Поскольку сила нормального давления, зависящая от веса и направления опорной

поверхности, не меняется, то различают статический и динамический коэффициенты трения:

$$F_f = fR; \quad F_{f0} = f_0R.$$

Коэффициент трения скольжения зависит от следующих факторов:

от материала: материалы делятся на *фрикционные* (с большим коэффициентом трения) и *антифрикционные* (с малым коэффициентом трения), например  $f = 0,1 - 0,15$  (при скольжении стали по стали всухую),  $f = 0,2 - 0,3$  (при скольжении стали по текстолиту);

от наличия смазки, например  $f = 0,04 - 0,05$  (при скольжении стали по стали со смазкой);

от скорости взаимного перемещения.

## Трение качения

Сопротивление при качении связано с взаимной деформацией грунта и колеса и значительно меньше трения скольжения.

Обычно считают грунт мягче колеса, тогда в основном деформируется грунт, и в каждый момент колесо должно перекатываться через выступ грунта. Для равномерного качения колеса необходимо прикладывать силу  $F_{дв}$  (рис. 13.4).

Условие качения колеса состоит в том, что движущийся момент должен быть не меньше момента сопротивления:

$$F_{дв}r \geq Nk;$$
$$N = G; \quad F_{дв} \geq k \frac{G}{r},$$

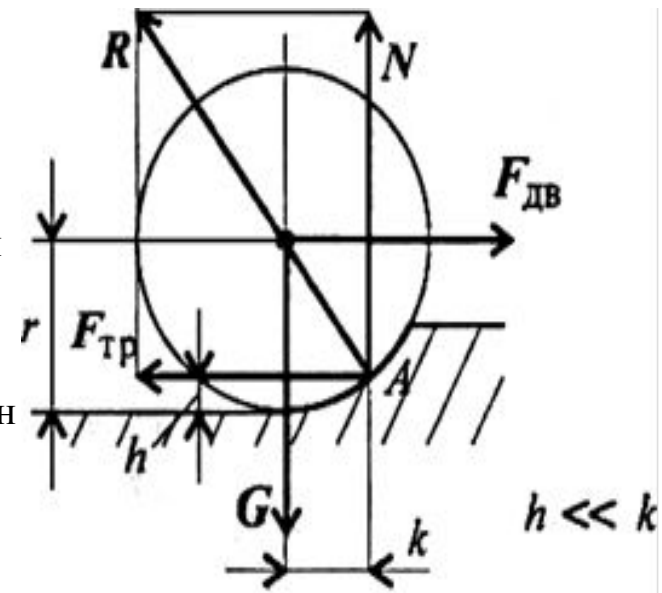


Рис. 13.4

где  $k$  — максимальное значение плеча (половина колеи) принимается за коэффициент трения качения, размерность — сантиметры.

Ориентировочные значения  $k$  (определяются экспериментально): сталь по стали —  $k = 0,005$  см; резиновая шина по шоссе —  $k = 0,24$  см.

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Свободная материальная точка, масса которой 5 кг, движется согласно уравнению  $S = 0,48t^2 + 0,2t$ . Определить величину движущей силы.

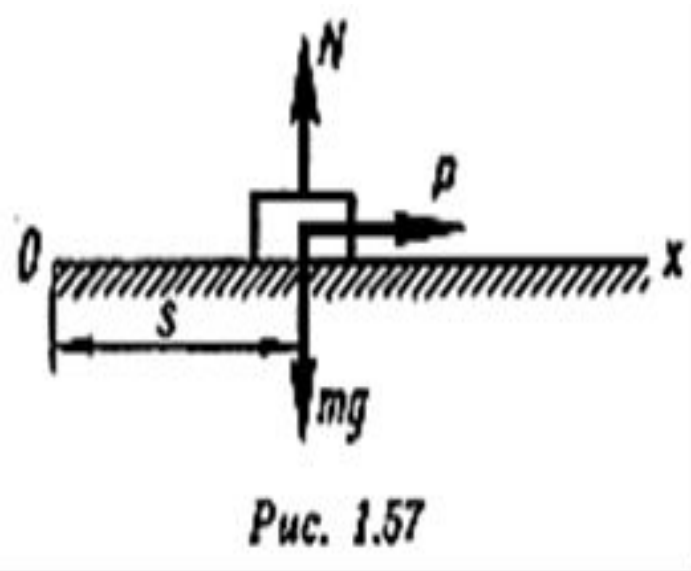
### Решение

1. Ускорение точки:  $a = v' = S''$ ;  $v = S' = 0,96t + 0,2$ ;  $a = v' = 0,96$  м/с<sup>2</sup>.

2. Действующая сила согласно основному закону динамики  $F = ma$ ;  $F = 5 * 0,96 = 4,8$  Н.

**Пример 2.** Тело массой  $m = 2 \text{ кг}$  движется по гладкой горизонтальной поверхности согласно уравнению  $S = 2t^3$  ( $S$  — в метрах, ( $t$  — в секундах). Определить силу  $P$  в конце второй секунды после начала движения.

*Решение*



Тело движется по прямой. Следовательно, и сила, действующая на точку, направлена по этой же прямой.

Силы, действующие на тело, показаны на рис. 1.57 ( $mg$  — сила тяжести тела,  $N$  — реакция поверхности,  $P$  — искомая сила).

Очевидно, что

$$P = ma.$$

Определим ускорение тела в конце второй секунды.

Как известно,

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Продифференцировав дважды уравнение движения, получим

$$a = 12t.$$

Ускорение тела в конце второй секунды

$$a_{t=2} = 12 \cdot 2 = 24 \text{ м/с}^2.$$

Тогда

$$P = ma = 2 \cdot 24 = 48 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 48 \text{ Н.}$$

**Пример 3.** К двум материальным точкам массой  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 5$  кг приложены одинаковые силы. Сравнить величины ускорений.

*Решение*

Согласно третьей аксиоме динамики ускорения обратно пропорциональны массам:

$$a_1/a_2 = m_2/m_1 = 5/2 = 2,5$$

$$a_1 = 2,5 a_2$$

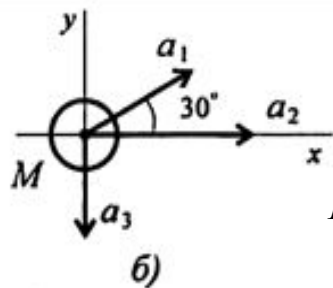
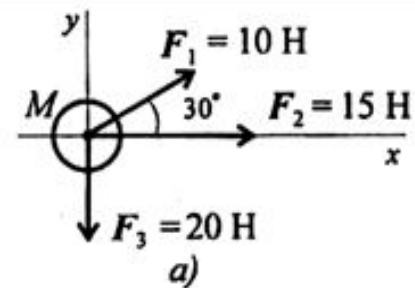


Рис. 13.5

**Пример 4.** На материальную точку действует система сил (рис. 13.5). Определить числовое значение ускорения, полученного материальной точкой  $m = 7$  кг. Остальные данные представлены на чертеже.

*Решение*

**1-й вариант.**

Определяем суммарную силу, действующую на точку:

$$\sum_0^n F_{kx} = 15 + 10 \cdot \cos 30^\circ = 15 + 10 \cdot 0,866 = 23,66 \text{ Н};$$

$$\sum_0^n F_{ky} = 10 \cdot \cos 60^\circ - 20 = -15 \text{ Н};$$

$$F_\Sigma = \sqrt{23,66^2 + 15^2} = 28 \text{ Н.}$$



Определяем ускорение, сообщенное точке:

$$a_{\Sigma} = 28/7 = 4 \text{ м/с}^2$$

**2-й вариант.**

Определяем ускорения от каждой из сил системы (рис. 13.5, б):

$$a_1 = 10/7 = 1,43 \text{ м/с}^2, \quad a_2 = 15/7 = 2,14 \text{ м/с}^2; \quad a_3 = 20/7 = 2,86 \text{ м/с}^2.$$

2. Определяем суммарное ускорение:

$$\sum_0^n a_x = 1,43 \cdot 0,866 + 2,14 = 3,38 \text{ м/с}^2;$$

$$\sum_0^n a_y = 1,43 \cdot 0,5 + (-2,86) = -2,14 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{\Sigma} = \sqrt{3,38^2 + 2,14^2} = 4 \text{ м/с}^2.$$

**Пример 4.** Материальная точка, сила тяжести которой  $G = 100 \text{ Н}$ , движется по прямолинейной гладкой поверхности (рис. 1.58) с ускорением  $a = 1,5 \text{ м/с}^2$ . Определить силу  $P$ , вызывающую движение, пренебрегая силами сопротивления.

*Решение*

Задано движение материальной точки, требуется определить движущую силу (прямая задача динамики). На материальную точку действуют три силы: сила тяжести  $G$ , реакция гладкой горизонтальной плоскости  $N$  и движущая сила  $P$ .

Силы  $G$  и  $N$  уравновешены, следовательно, основное уравнение динамики в этом случае имеет вид:

$$P = ma, \quad m = G/g.$$

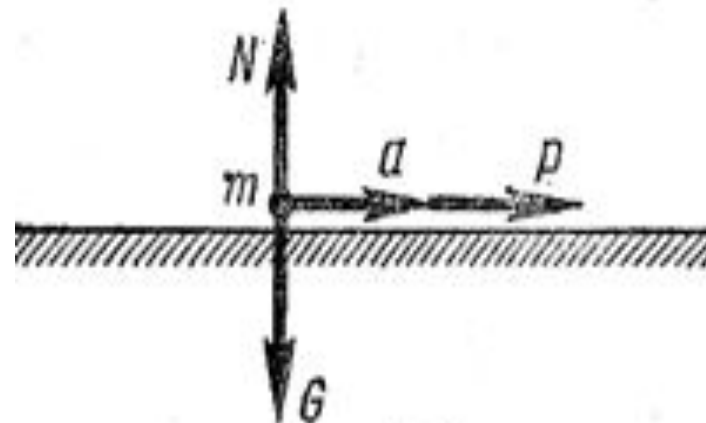


Рис. 1.58

Подставляя числовые значения, получаем

$$P = Ga/g = 100 \cdot 1,5/9,81 = 15,3 \text{ Н.}$$

**Пример 5.** Под действием силы тяжести тело  $M$  падает с высоты  $H = 1500$  м, испытывая сопротивление воздуха. Полагая силу сопротивления постоянной и равной половине силы тяжести, найти ускорение тела  $a$  и скорость  $V$  через 5с после начала движения, если начальная скорость  $V_0 = 0$  (рис. 1.59).

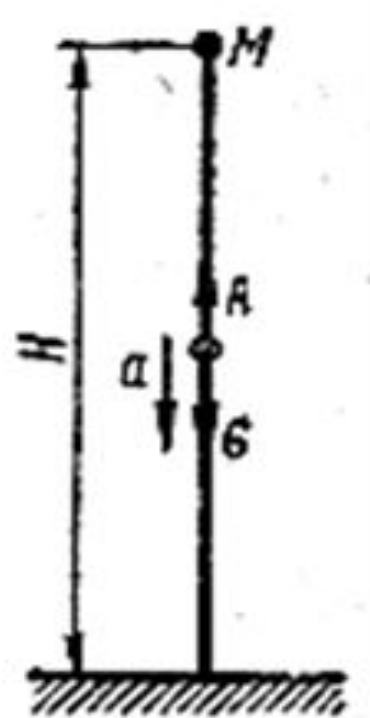


Рис. 1.59

### Решение

В данном случае силы заданы, требуется определить кинематические характеристики движения: ускорение, скорость (обратная задача динамики). По основному уравнению получим

$$ma = G - R = G - 0,5 G = 0,5 G,$$

Откуда

$$a = 0,5 G/m = 0,5 Gg/G = 0,5 \cdot 9,81 = 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Рассматриваемое тело движется равномерно-ускоренно,  $a = const = 4,9 \text{ м/с}^2$ . Скорость точки при равномерно-ускоренном движении определяется по формуле

$$v = v_0 + at.$$

В рассматриваемом примере  $v_0 = 0$ , следовательно,  $v = at$ .

В конце пятой секунды после начала движения скорость точки

$$v = 4,9 \cdot 5 = 24,5 \text{ м/с.}$$

Определим время падения тела.

При равномерно-ускоренном движении

$$H = v_0 t + at^2/2.$$

Поскольку  $v_0 = 0$ , получаем

$$H = at^2/2,$$

Откуда

$$t = \sqrt{2H/a} = \sqrt{2 \cdot 1500/4,9} = 24,7 \text{ с.}$$

Итак, через 24,7 с тело упадет на землю

**Пример 6.** В шахте опускается равномерно-ускоренно бадей, сила тяжести которой  $Q = 280$  кН. В первые 10 с она проходит путь  $S = 35$  м. Найти натяжение каната, на котором висит бадей (рис. 1.60).

*Решение*

На бадью действует сила тяжести  $Q$  и натяжение каната  $T$ . Следовательно,

$$ma = Q - T,$$

Откуда

$$T = Q - ma = Q(1 - a/g).$$

ускорение  $a$  определяем из уравнения

$$s = at^2/2,$$

Откуда

$$a = 2s/t^2 = 2 \cdot 35/10^2 = 0,7 \text{ м/с}^2.$$

Подставляя числовые значения в формулу, получаем

$$T = Q(1 - a/g) = 280(1 - 0,7/9,81) = 260 \text{ кН}$$

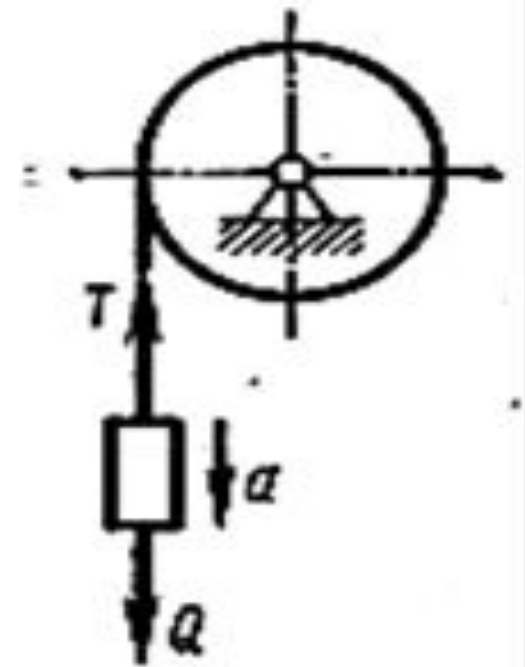


Рис. 1.60

## Контрольные вопросы и задания

1. Что называют массой тела? Назовите единицу измерения массы в системе СИ.
2. Что является мерой инертности тела?
3. Запишите основной закон динамики в векторной и дифференциальной форме.
4. На материальную точку действует постоянная сила. Как движется точка?
5. Какое ускорение получит точка, если на нее действует сила, равная удвоенной силе тяжести?

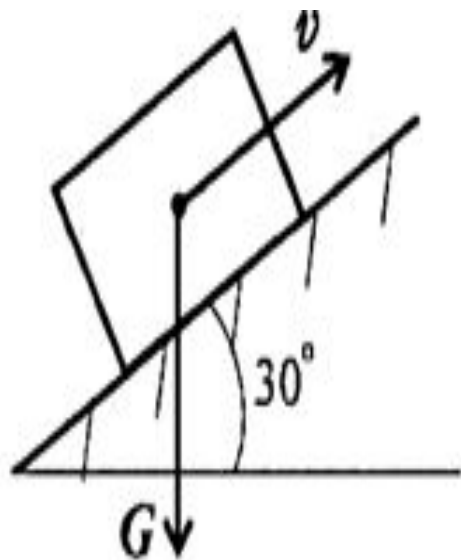


Рис. 13.6

6. После столкновения двух материальных точек с массами  $m_1 = 6$  кг и  $m_2 = 24$  кг первая точка получила ускорение  $1,6$  м/с<sup>2</sup>. Чему равно ускорение, полученное второй точкой?
7. В чем заключается принцип независимости действия сил?
8. Перечислите законы трения скольжения.
9. Перечислите факторы, влияющие на величину коэффициента трения скольжения.
10. Тело движется по наклонной плоскости вверх (рис. 13.6). Масса тела  $10$  кг, коэффициент трения  $0,2$ . Определите возникающую силу