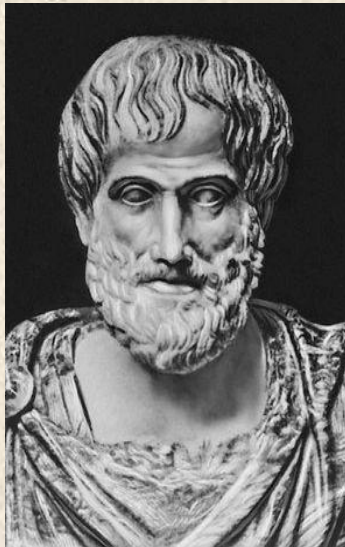


АЛГЕБРА ЛОГИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИНФОРМАТИКИ

Логика - это наука о формах и законах человеческого мышления.

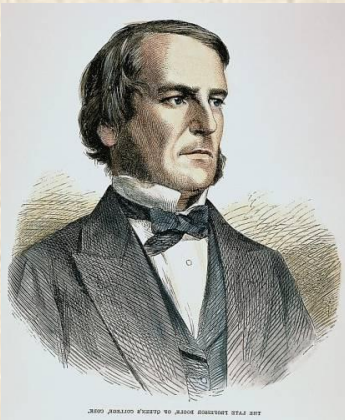


Ее основоположник - древнегреческий
мыслитель
Аристотель (384-322 года до н. э.).

Логика



Вильгельм Лейбниц (1646-1716). Основоположник математической логики (пытался построить первые логические исчисления: арифметические и буквенно-алгебраические).

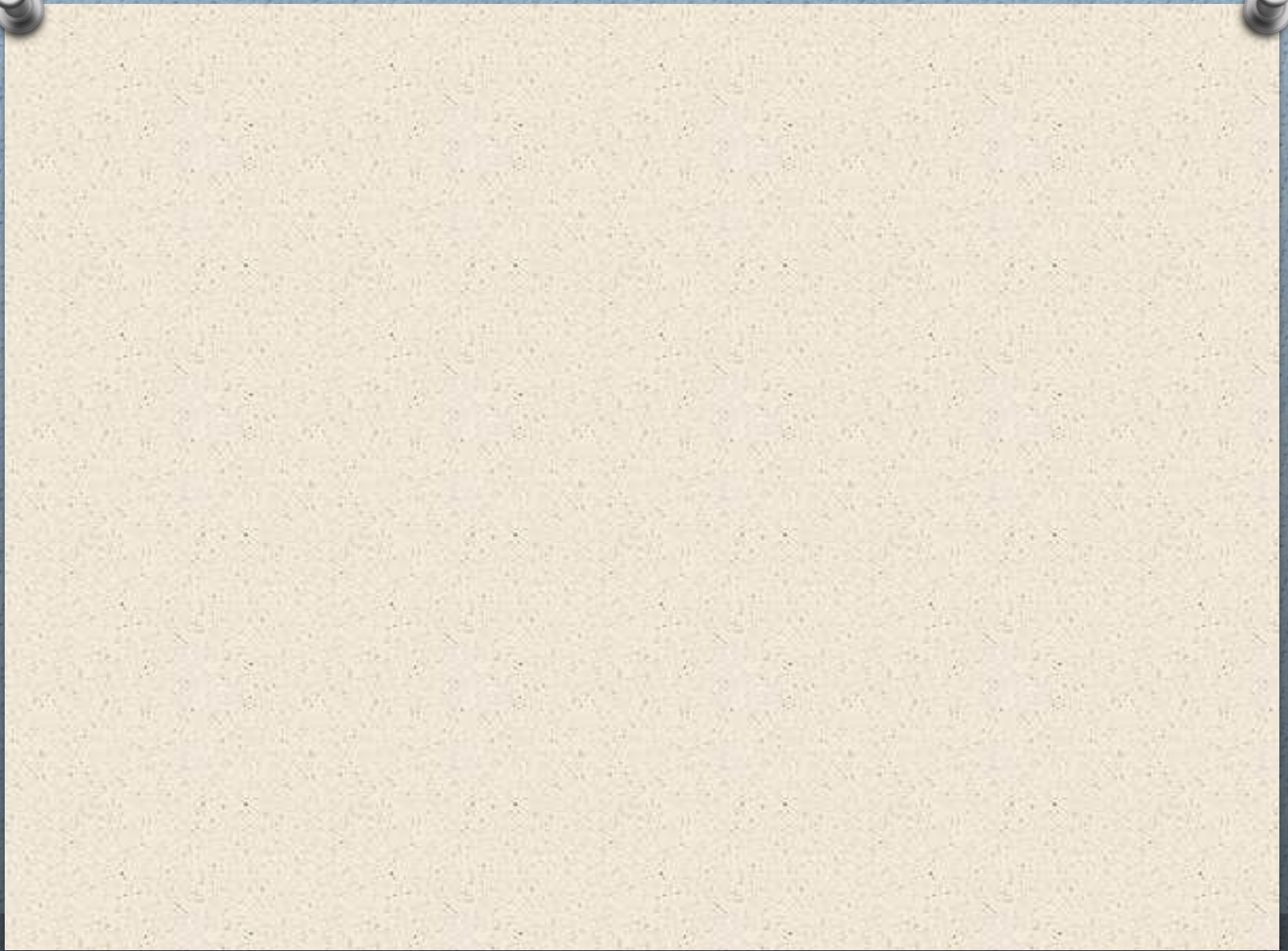


Джордж Буль (1815-1864). Создал новую область науки - Алгебру логики (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).

Алгебра логики (булева алгебра) - это раздел математики, изучающий высказывания, и логические операции над ними.

Цель алгебры логики - описание поведения и структуры логических схем.

Объекты алгебры логики - **высказывания**.



Логическое высказывание - это

повествовательное предложение,
относительно которого можно однозначно
сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- Сейчас идет дождь.
- Жирафы летят на север.
- История - интересный предмет.
- У квадрата - 10 сторон и все разные.
- Красиво!
- В городе N живут 2 миллиона человек.
- Который час?

Виды высказываний

Высказывания

```
graph TD; A[Высказывания] --> B[Простые]; A --> C[Составные]
```

Простые

Составные

Высказывание называется **простым**, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических связок (и; или; не; если, то; и др).

Так, например, из элементарных высказываний "Петров — врач", "Петров — шахматист" при помощи связки "и" можно получить составное высказывание

"Петров — врач и шахматист", понимаемое как "Петров — врач, хорошо играющий в шахматы".

При помощи связки "или" из этих же высказываний можно получить составное высказывание

"Петров — врач или шахматист",

понимаемое в алгебре логики как

"Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно".

В алгебре логики высказывания обозначают ЗАГЛАВНЫМИ буквами латинского алфавита и называют **логическими переменными**.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей ($A = 1$), а если ложно - нулём ($B = 0$).

0 и 1 называются **логическими значениями**.

Так, например, предложение
" Трава зеленая" следует считать
высказыванием, так как оно истинное.
Записывается: $A=1$

Предложение " Лев - птица" тоже
высказывание, так как оно ложное.
Записывается: $B=0$

Пусть через A обозначено высказывание "Тимур поедет летом на море", а через B — высказывание "Тимур летом отправится в горы".

Тогда составное высказывание "Тимур летом побывает и на море, и в горах" можно кратко записать как

А и В

Здесь "и" — логическая связка, А, В — логические переменные, которые могут принимать только два значения — "истина" или "ложь", обозначаемые, соответственно, "1" и "0".

Составьте из простых высказываний составные при помощи связок:

A – Сейчас идет дождь.

B – Форточка открыта.

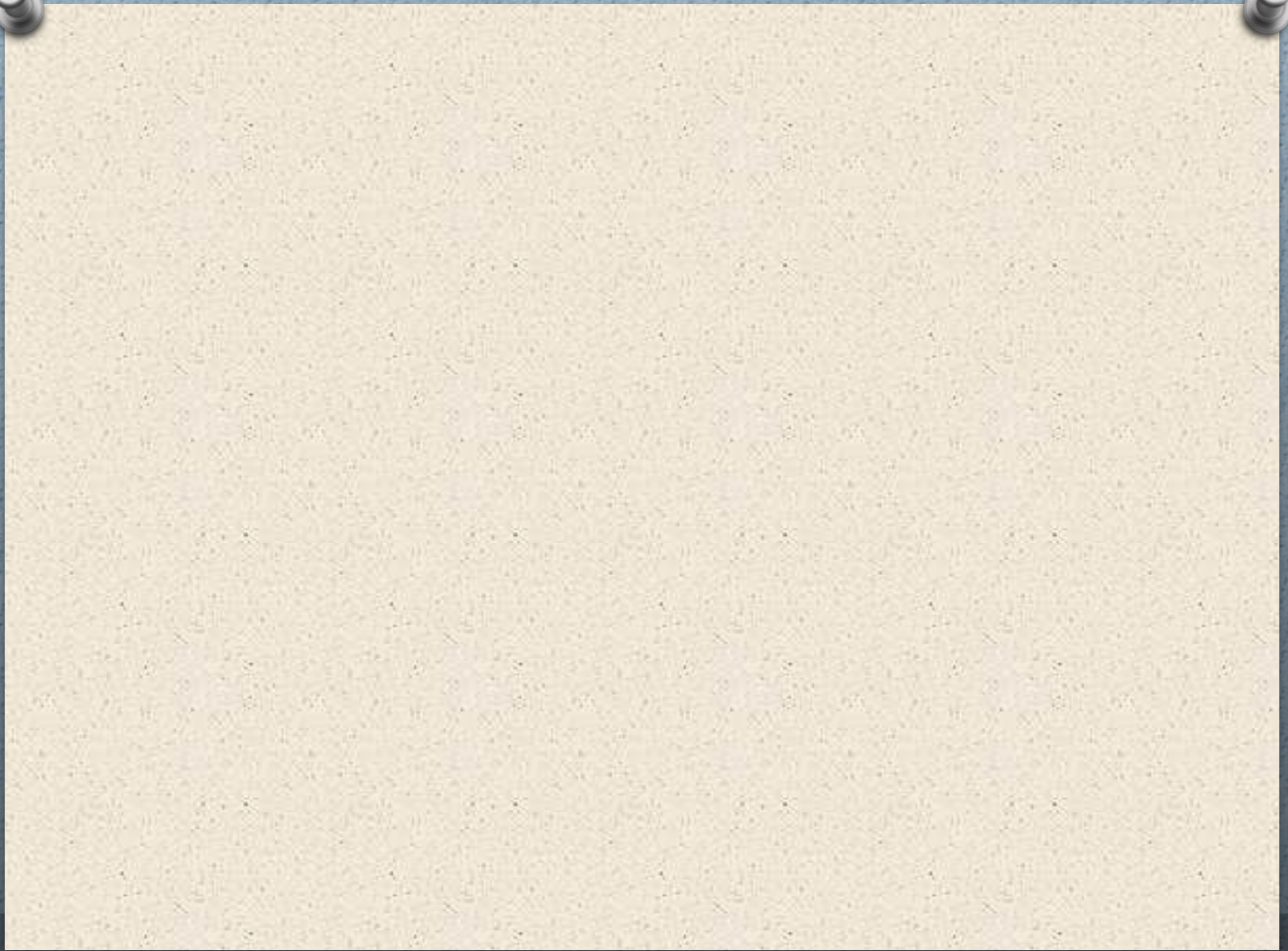
A и B Сейчас идет дождь и открыта форточка.

A или не B Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

если A, то B Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

не A и B Сейчас нет дождя и форточка открыта.

A тогда и только тогда, когда B Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.



Операция НЕ

Операция, выражаемая словом "не", называется **инверсией** или отрицанием и обозначается чертой над высказыванием.

Если высказывание A истинно, то "не A " ложно, и наоборот.



\bar{A}

Высказывание \bar{A} истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно.

Пример. "Луна — спутник Земли" (A):

"Луна — не спутник Земли" (\bar{A}).

Таблица истинности

логического выражения F - это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой - значение выражения F для каждой комбинации.

A	не A
0	1
1	0

таблица
истинности
операции НЕ

Операция **И**

Операция, выражаемая связкой "и", называется конъюнкцией

(лат. conjunctio — соединение)

или **логическим умножением**

и обозначается точкой " . "

(может также обозначаться знаками \wedge или $\&$).

Высказывание $A \cdot B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Например, высказывание

"10 делится на 2 и 5 больше 3" истинно,
а высказывания:

"10 делится на 2 и 5 не больше 3",

"10 не делится на 2 и 5 больше 3",

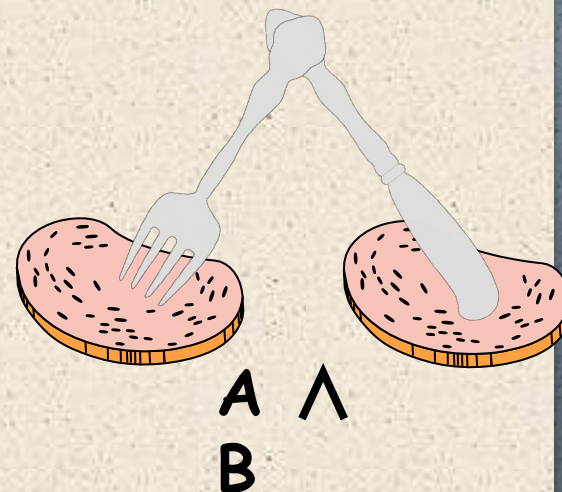
"10 не делится на 2 и 5 не больше 3"

— ложны.

Таблица истинности конъюнкции

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

также: $A \cdot B$, $A \wedge B$,
 $A \& B$



Операция **ИЛИ**

Операция, выражаемая связкой "или" называется дизъюнкцией

(лат. disjunctio — разделение)

или логическим сложением и обозначается знаком **V** (или **+** «плюсом»).

Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Например, высказывание

"10 не делится на 2 или 5 не больше 3"
ложно, а высказывания

"10 делится на 2 или 5 больше 3",

"10 делится на 2 или 5 не больше 3",

"10 не делится на 2 или 5 больше 3"—
истинны.

Таблица истинности дизъюнкции

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: $A+B$, $A \vee B$

Базовый набор операций

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.

И

ИЛИ

НЕ

базовый набор
операций



Сколько всего существует логических операции с двумя переменными?

Операция **ЕСЛИ-ТО**

Операция, выражаемая связками "если ..., то", "из ... следует", "... влечет ...",

называется импликацией

(лат. *implicare* — тесно связаны) и обозначается знаком \rightarrow . Высказывание $A \rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.


Таблица истинности импликации

A - "Работник хорошо работает".

B - "У работника хорошая зарплата".

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Операция **РАВНОСИЛЬНО**

Операция, выражаемая связками "тогда и только тогда", "необходимо и достаточно", "... равносильно ...", называется эквиваленцией и обозначается знаком или \sim . 

Высказывание $A \img alt="orange double-headed arrow" data-bbox="435 648 492 682"/> B$ истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают.

Таблица истинности эквиваленции

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить **логической формулой**.

Определение логической формулы:

1. Всякая логическая переменная и символы "истина" ("1") и "ложь" ("0") - формулы.
2. Если A и B - формулы, то \overline{A} , $A \cdot B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ - формулы.
3. Никаких других формул в алгебре логики нет.

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1. Инверсия;
2. Конъюнкция;
3. Дизъюнкция;
4. Импликация;
5. Эквивалентность.

Определите истинность составного высказывания:

$\overline{(A \& B)} \& (C \vee D)$, состоящего из простых высказываний:

$A = \{\text{Принтер - устройство вывода информации}\},$

$B = \{\text{Процессор - устройство хранения информации}\},$

$C = \{\text{Монитор - устройство вывода информации}\},$

$D = \{\text{Клавиатура - устройство обработки информации}\}.$

Сначала на основании знания устройства компьютера устанавливаем истинность простых высказываний:

$$A = 1, B = 0, C = 1, D = 0.$$

Определим теперь истинность составного высказывания, используя таблицы истинности логических операций:

$$(\overline{1 \& 0}) \& (1 \vee 0) = (0 \& 1) \& (1 \vee 0) = 0$$

Составное высказывание ложно.

Даны простые высказывания:

$A = \{\text{Принтер - устройство ввода информации}\},$

$B = \{\text{Процессор - устройство обработки информации}\},$

$C = \{\text{Монитор - устройство хранения информации}\},$

$D = \{\text{Клавиатура - устройство ввода информации}\}.$

Определите истинность составных высказываний:

а) $(A \& B) \& (C \vee D);$

б) $(A \& B) \Rightarrow (C \vee D);$

в) $(A \vee B) \Leftrightarrow (C \& D);$

г) $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}.$

Логические выражения и их таблицы истинности

Составные высказывания в алгебре логики записываются с помощью логических выражений. Для любого логического выражения достаточно просто построить таблицу истинности.

$$F = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая
формула

Таблица истинности - это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать n - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки: $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

Пример построения таблицы истинности

$$A \vee A \& B$$

n (число переменных) = 2,

m (количество строк без шапки) = $2^2 = 4$.

Операций - 2, значит количество столбцов будет: $n+2=4$

Приоритет операций: $\&$, \vee

A	B	$A \& B$	$A \vee A \& B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Составление таблиц истинности

$$F = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\bar{A} \cdot B$	\bar{B}	F
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Составление таблиц истинности

$$F = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

0
1
2
3
4
5
6
7

A	B	C	A·B	A·C	B·C	F
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Закон тождества

$$A = A$$

Всякое понятие и суждение тождественно самому себе.

Закон тождества означает, что в процессе рассуждения нельзя подменять одну мысль другой, одно понятие другим. При нарушении этого закона возможны логические ошибки. Например, рассуждение *Правильно говорят, что язык до Киева доведет, а я купил вчера копченый язык, значит, теперь смело могу идти в Киев неверно*, так как первое и второе слова «язык» обозначают разные понятия.

Закон непротиворечия

$$A \ \& \ \text{not}A = 0$$

Не могут быть одновременно истинны утверждение и его отрицание.

То есть если высказывание A — истинно, то его отрицание $\text{не } A$ должно быть ложным (и наоборот). Тогда их произведение будет всегда ложным.

Это равенство часто используется при упрощении сложных логических выражений.

Примеры невыполнения закона непротиворечия:

1. *На Марсе есть жизнь и на Марсе жизни нет.*
2. *Оля окончила среднюю школу и учится в X классе.*

Закон исключения третьего

$$A \text{ and not } A = 1$$

В один и тот же момент времени высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано.

Истинно либо A , либо не A .

Примеры выполнения закона исключенного третьего:

1. Число 12345 либо четное, либо нечетное, третьего не дано.
2. Предприятие работает убыточно или безубыточно.
3. Эта жидкость является или не является кислотой.

Закон двойного отрицания

$$\text{Not (notA)}=1$$

Если отрицать дважды некоторое высказывание, то в результате получается исходное высказывание.

Например, высказывание

$A = \text{Матроскин — кот}$ эквивалентно высказыванию

$A = \text{Неверно, что Матроскин не кот.}$

**ЛОГИЧЕСКИЕ
ЭЛЕМЕНТЫ
КОМПЬЮТЕРА**

Логический элемент компьютера — это часть электронной логической схемы, которая реализует элементарную логическую функцию.

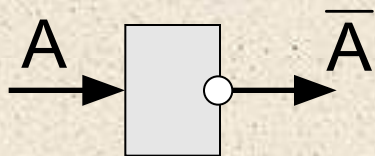
Логическими элементами

компьютеров являются электронные схемы И, ИЛИ, НЕ, И—НЕ, ИЛИ—НЕ и другие.

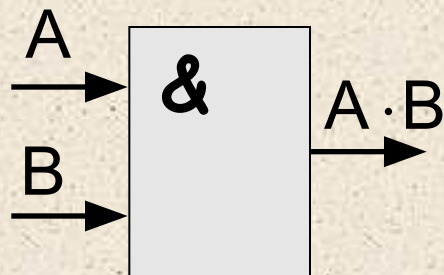
Каждый логический элемент имеет свое условное обозначение, которое выражает его логическую функцию, но не указывает на то, какая именно электронная схема в нем реализована. Это упрощает запись и понимание сложных логических схем.

Логические элементы компьютера

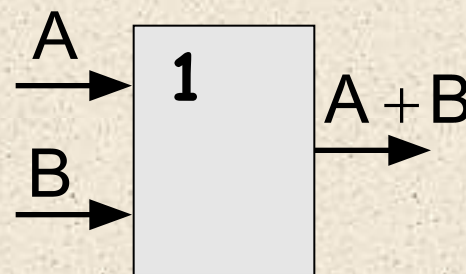
значок инверсии



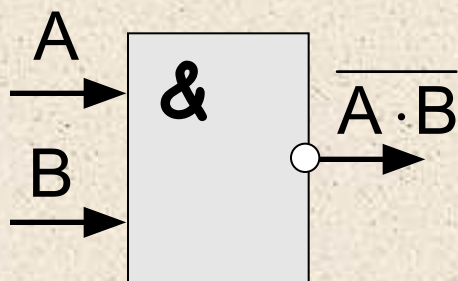
НЕ



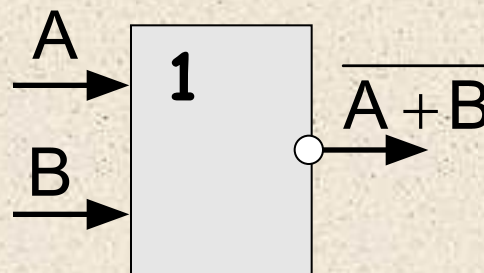
И



ИЛИ
И



И-
НЕ



ИЛИ-
НЕ

Логические элементы компьютера

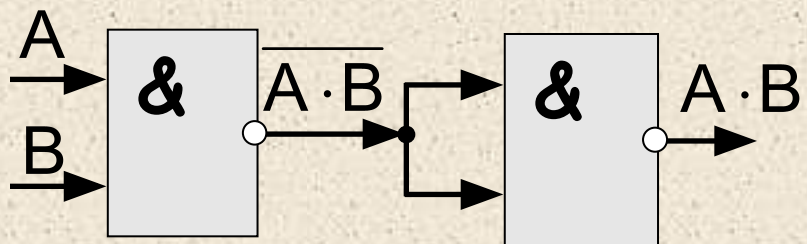
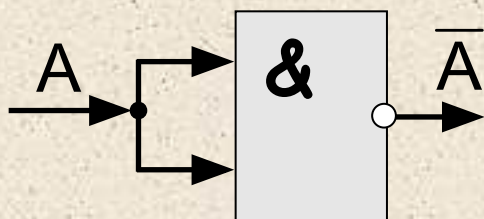
Любое логическое выражение можно реализовать на элементах И-НЕ или ИЛИ-НЕ.

НЕ $\bar{A} = \overline{A + A} = \overline{A \cdot A}$

И $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$

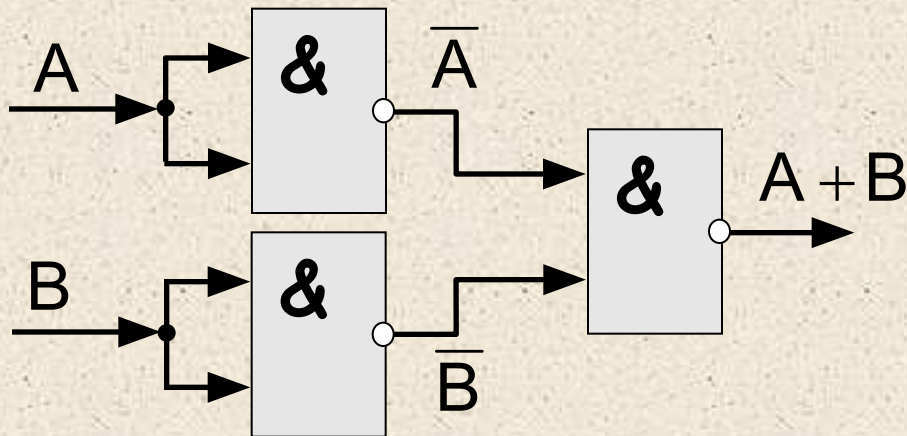
:

:



ИЛИ

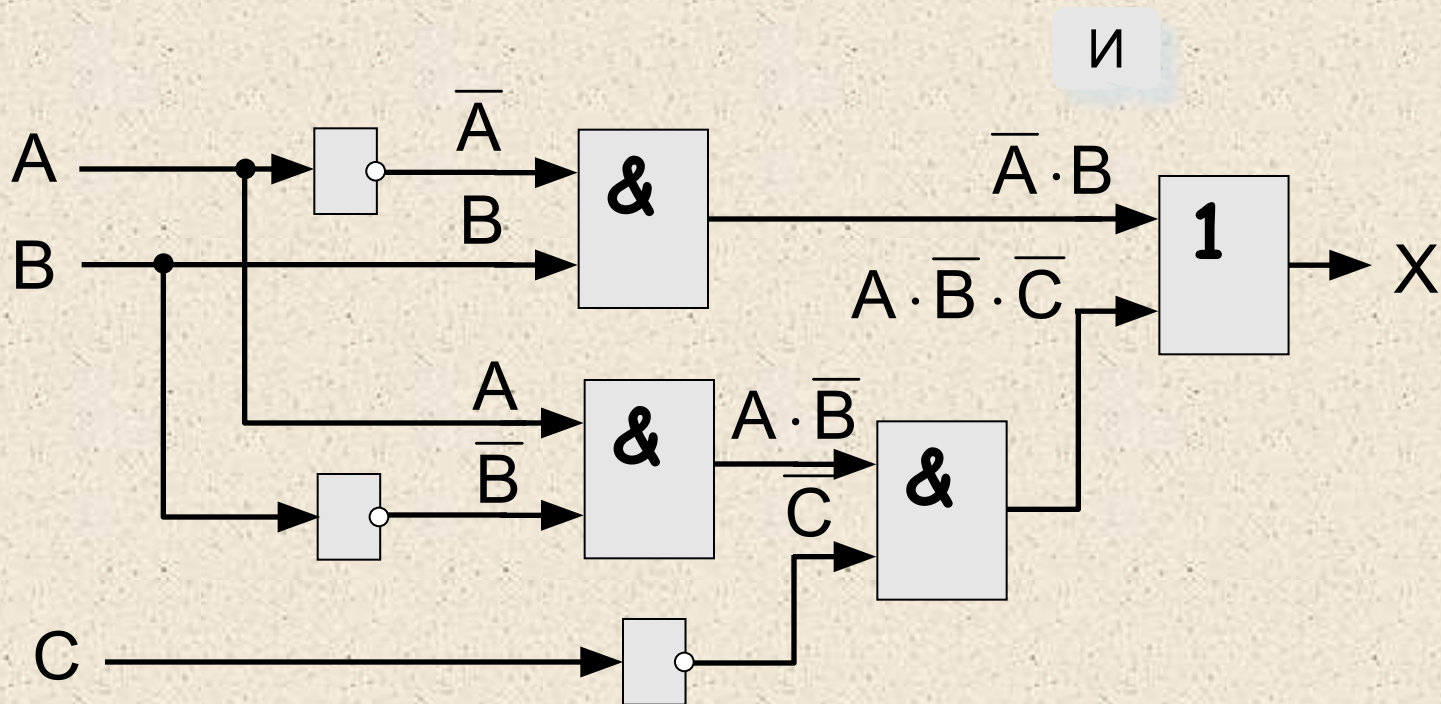
$A + B = \overline{\overline{A \cdot B}}$



Составление схем

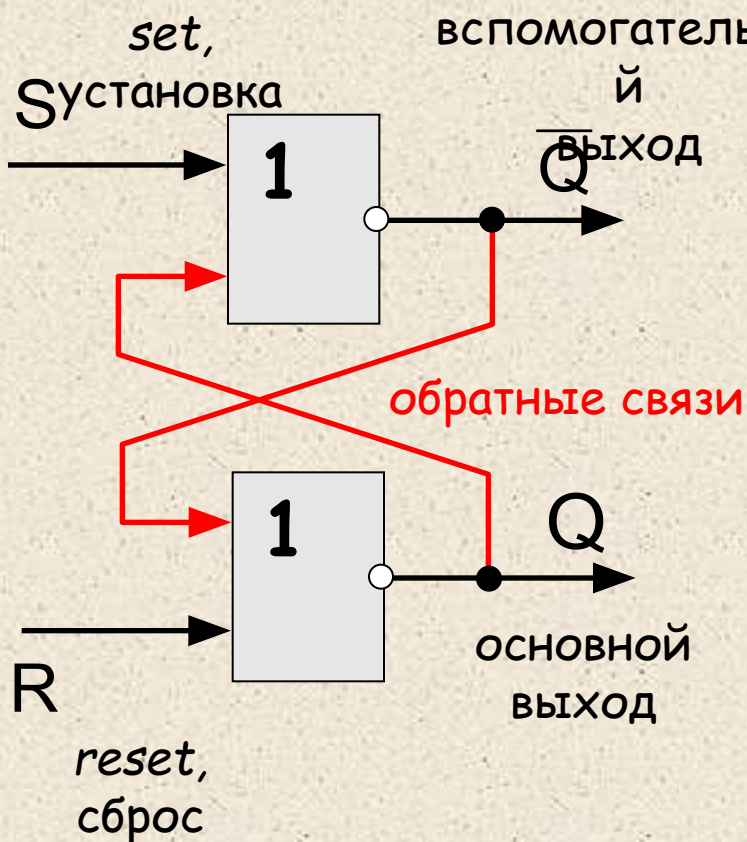
последняя операция - ИЛИ

$$X = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$



Триггер (англ. trigger - защёлка)

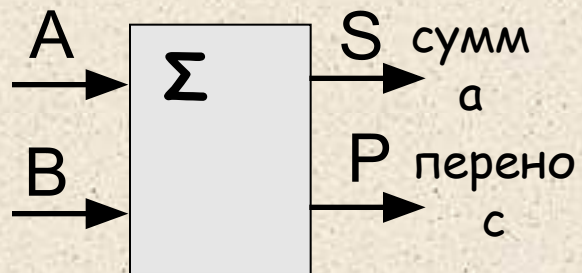
– это логическая схема, способная хранить 1 бит информации (1 или 0). Строится на 2-х элементах ИЛИ-НЕ или на 2-х элементах И-НЕ.



S	R	Q	\bar{Q}	режим
0	0	Q	\bar{Q}	хранение
0	1	0	1	сброс
1	0	1	0	установка 1
1	1	0	0	запрещен

Полусумматор

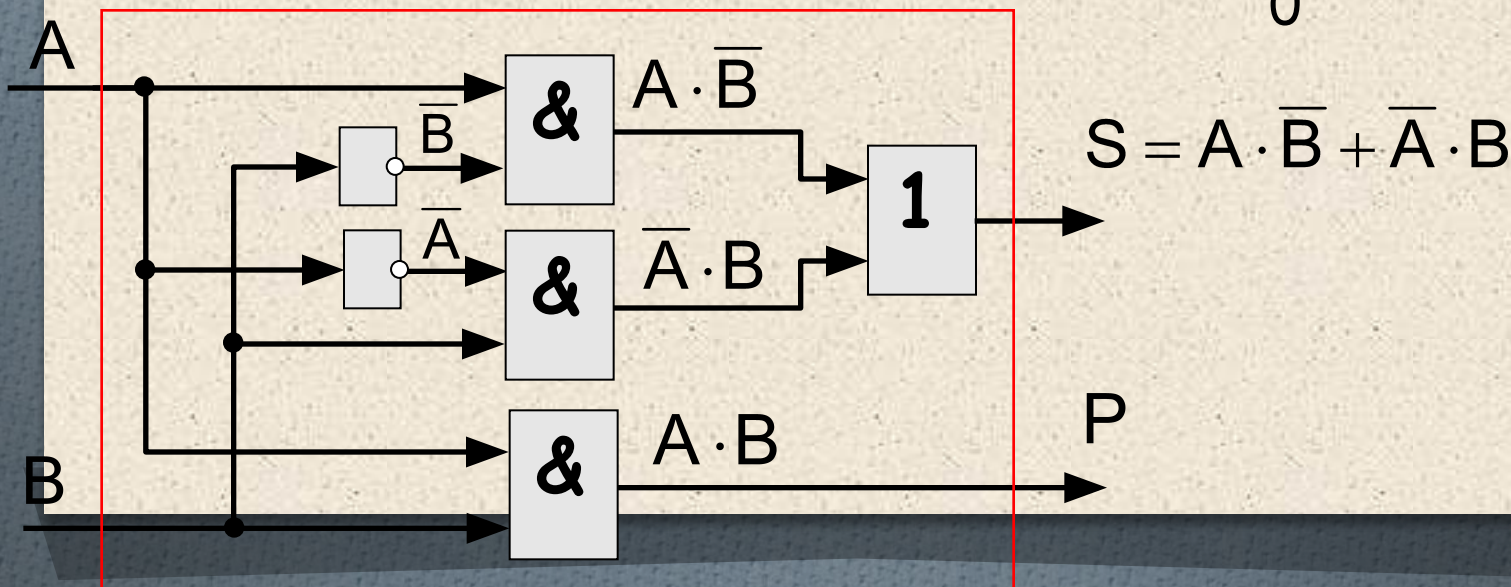
- это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа.



$$P = A \cdot B$$

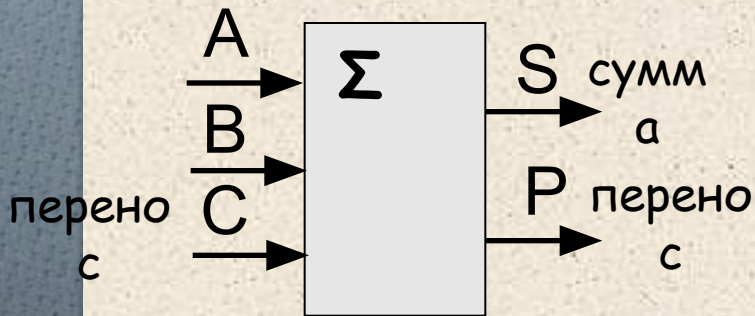
$$S = A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



Сумматор

- это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа с переносом из предыдущего разряда.



A	B	C	P	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1