

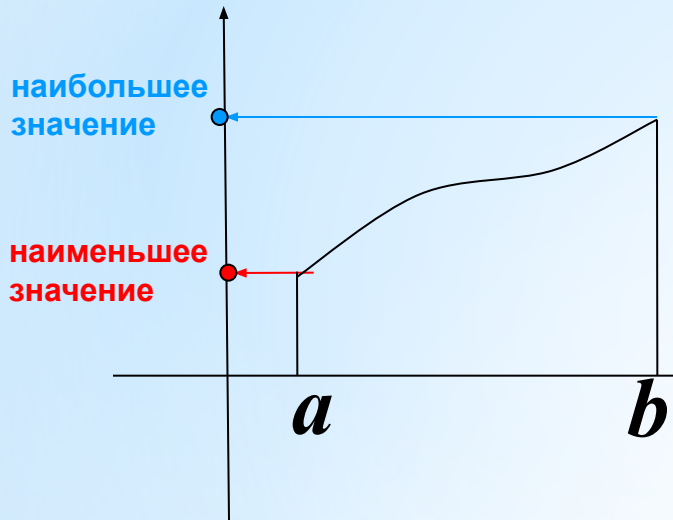


*Нахождение наибольшего и
наименьшего значений
функции на отрезке с
помощью производной*

10.11.2021

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$.

Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего и своего наименьшего значений..

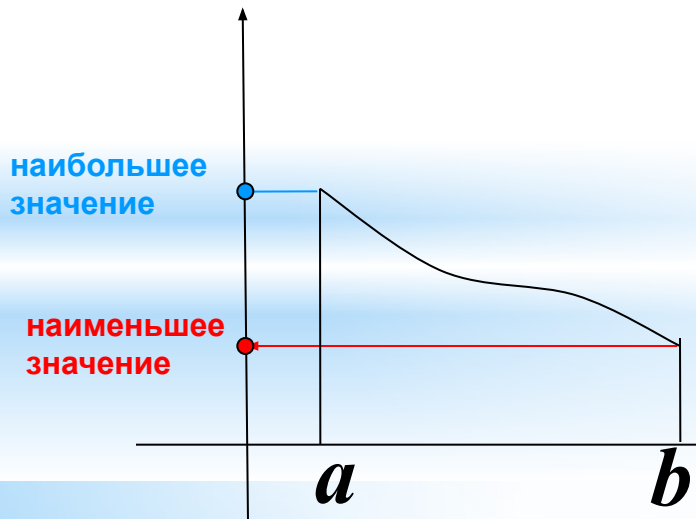


Предположим, что функция f не имеет на отрезке $[a; b]$ критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

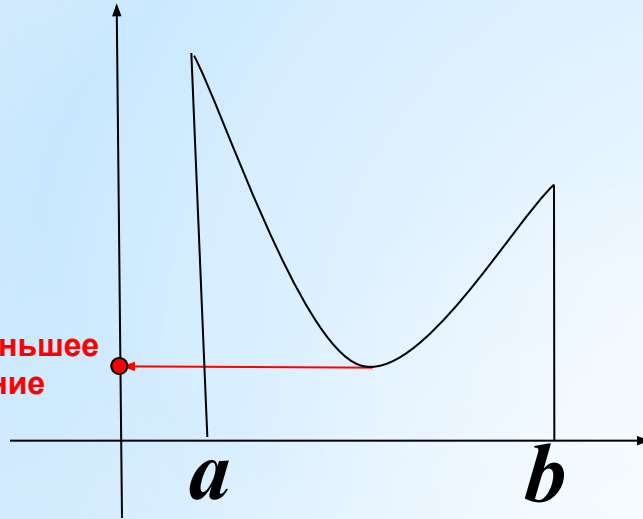
Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[a; b]$ — это значения в концах a и b .



Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.

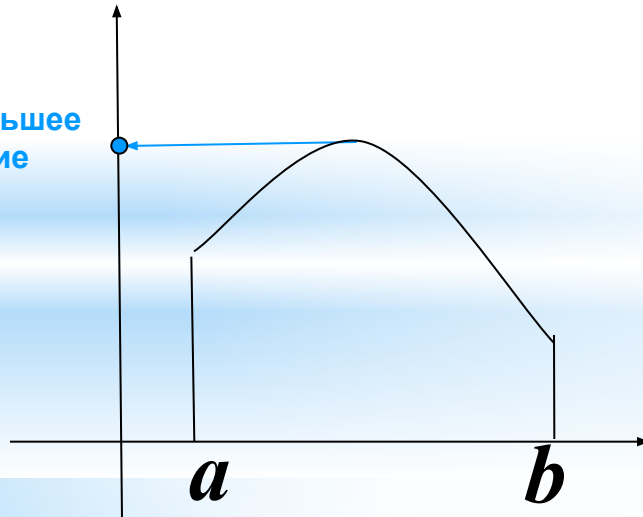
наименьшее значение



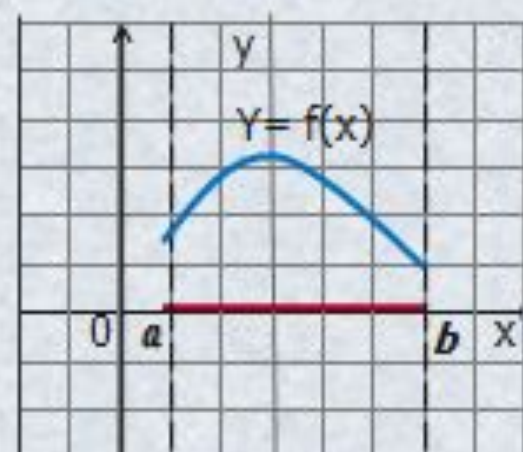
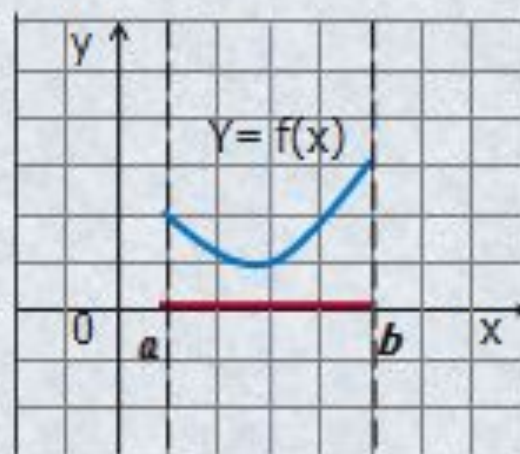
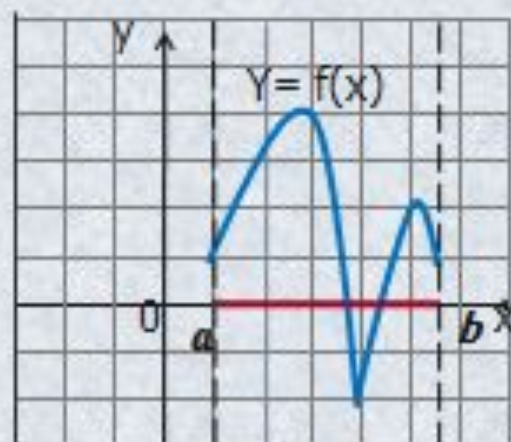
Предположим, что функция f имеет на отрезке $[a; b]$ **одну** точку экстремума.

Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.

наибольшее значение



Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.



➤ **Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.
Найти наибольшее и наименьшее значение функций, графики которых предоставлены на рисунках.**

➤ **Сделать вывод о расположении точек, в которых функция достигает наибольшего(наименьшего) значений**

Среди критических точек есть точки экстремума

Необходимое условие экстремума

Теорема Ферма

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f' , то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Но, если $f'(x_0) = 0$, то не обязательно, что точка x_0 будет точкой экстремума. Примеры

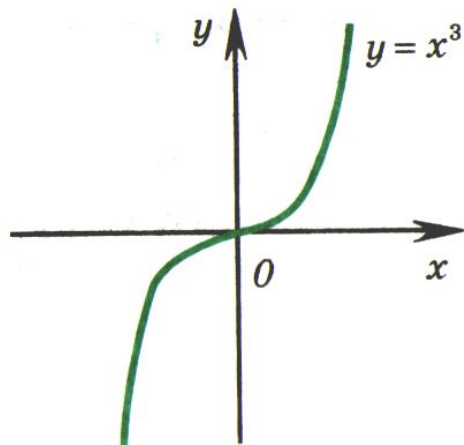


Рис. 105

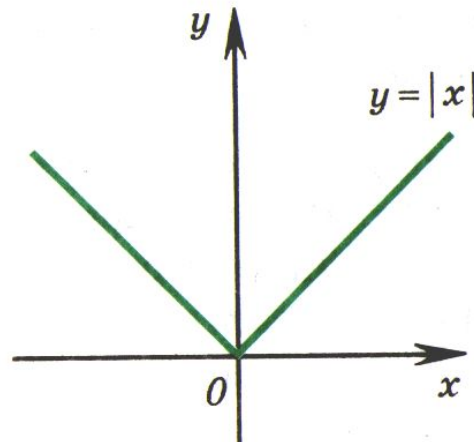


Рис. 106

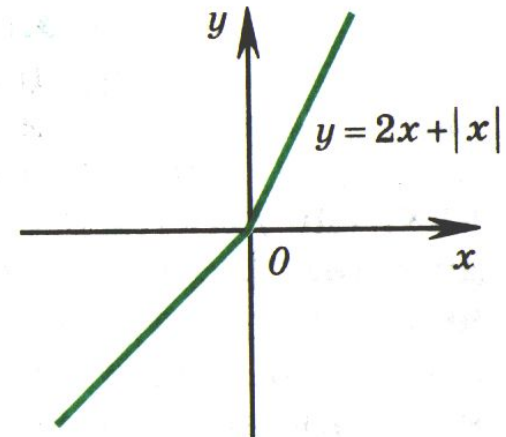
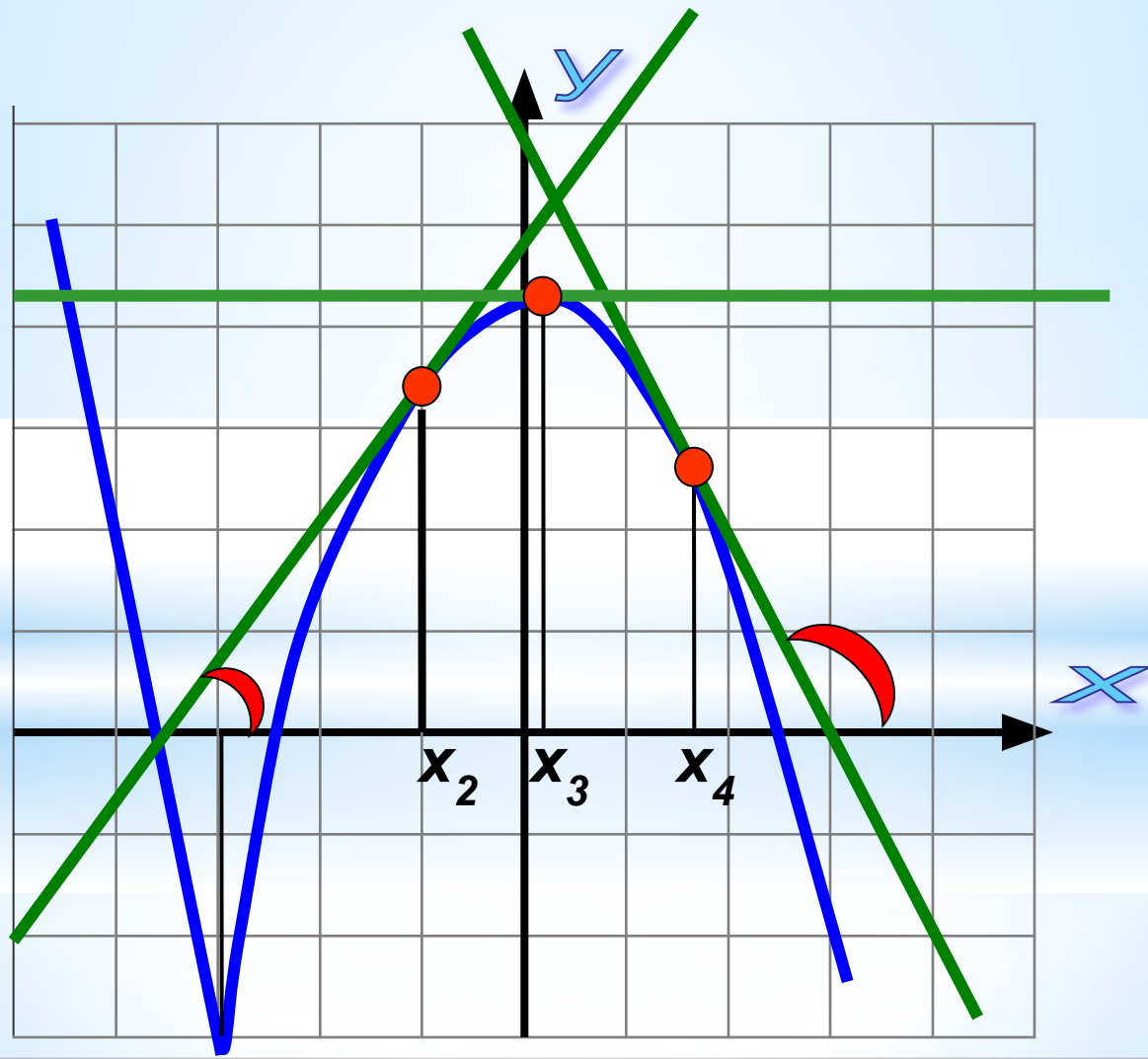


Рис. 107

$$\alpha > 90^\circ \Rightarrow k < 0 \qquad \alpha < 90^\circ \Rightarrow k > 0$$

$\alpha = 0^\circ \Rightarrow k = 0$, касательная параллельна Ox

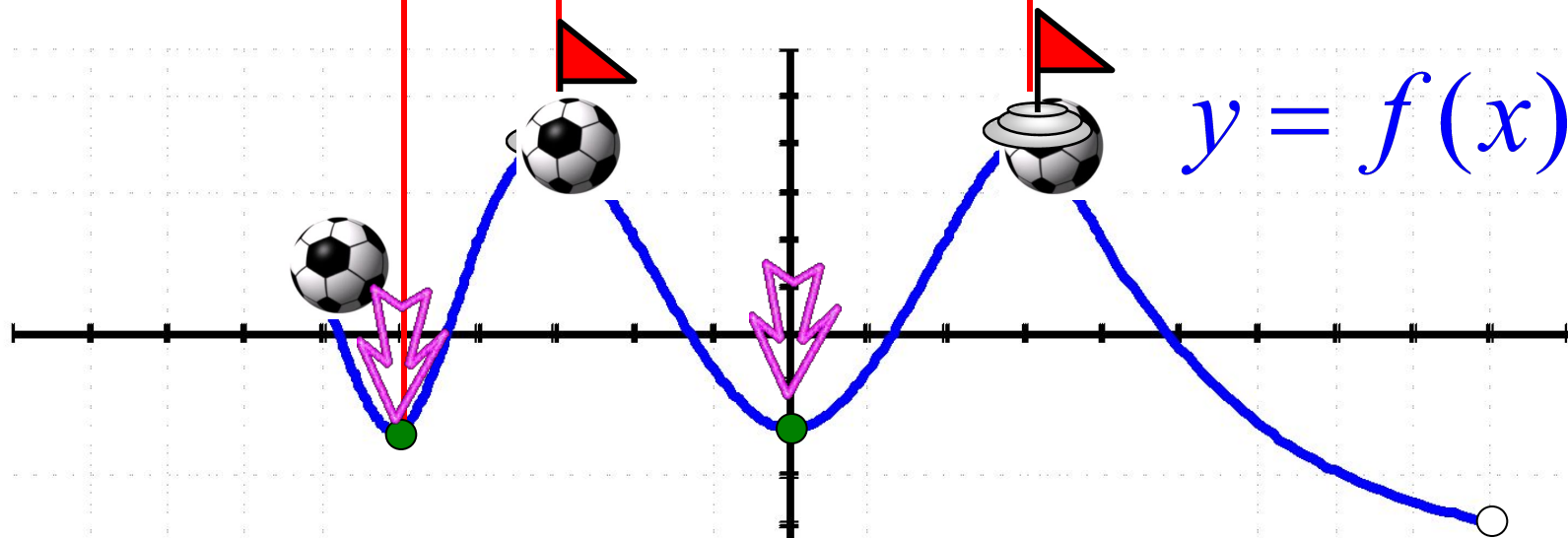
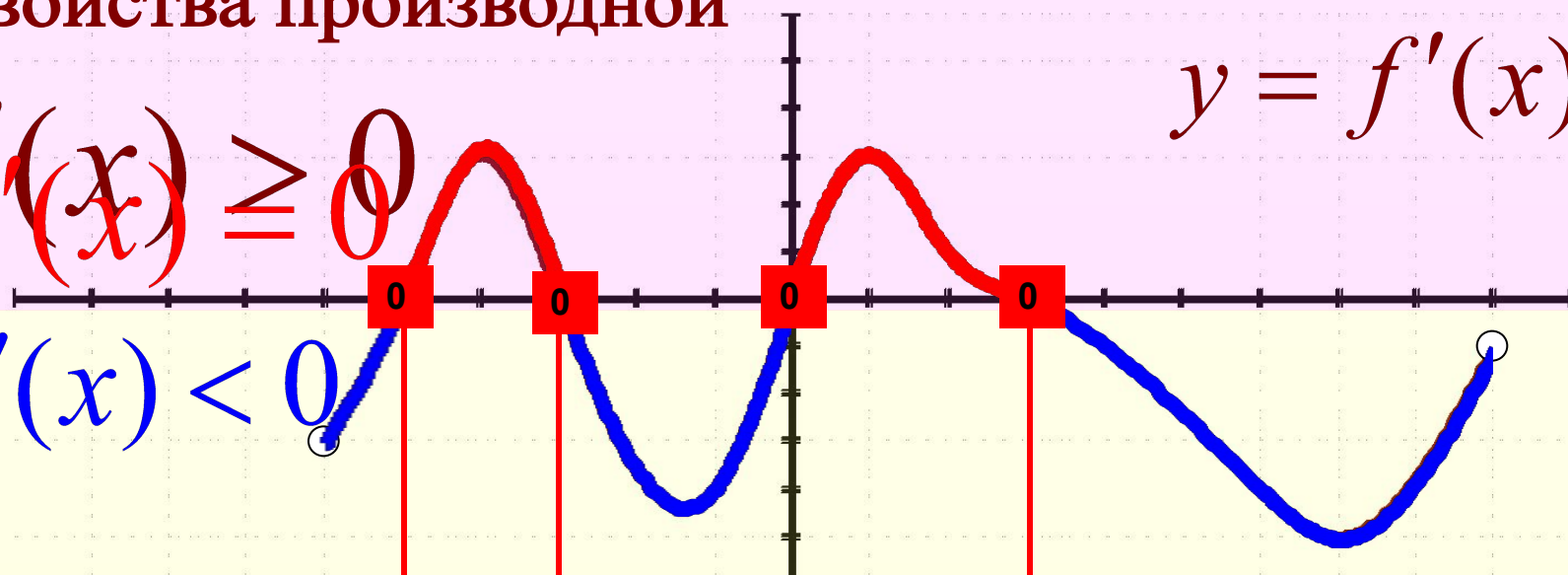


Свойства производной

$$y = f'(x)$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$f'(x) < 0$$




Поведение функции: ~~экстремумы~~

Показать (6)

**Алгоритм нахождения наибольшего и
наименьшего значений непрерывной функции
 $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$**

1. Найти производную $f'(x)$
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a;b]$
3. Вычислить значение функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b . Выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{\text{наим}}$) и наибольшее (это будет $y_{\text{наиб}}$)


Алгоритм решения задач

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти стационарные точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в стационарных точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	

Другой способ решения

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти стационарные точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ 
3. Вычислить значения функции в стационарных точках и на концах отрезка.	3) $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$ <div data-bbox="1335 743 1852 1032" style="border: 1px solid lightblue; padding: 5px; color: red;">Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить</div>
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее	Этот способ будет удобно вспомнить, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным. <div data-bbox="1335 1032 1852 1229" style="border: 1px solid lightblue; padding: 5px; color: red;">на вычислениях значений функции в концах отрезка.</div>

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$

 $f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$D(y): 5 - 4x - x^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

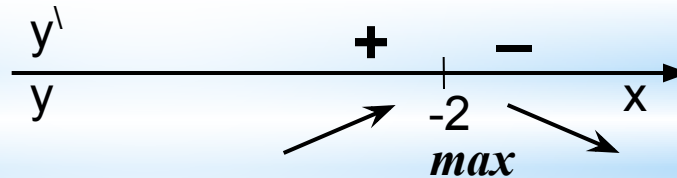
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{5 - 4x - x^2}} \cdot (5 - 4x - x^2)' =$$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

$$= \frac{1}{2\sqrt{5 - 4x - x^2}} \left(-4 - 2(2 + x) \right)$$

Найдем критические точки, которые принадлежат $D(y)$.

$$x = -2 \in D(y)$$



Наибольшее значение функция примет в точке максимума.

$$y(-2) = \sqrt{5 - 4 \cdot (-2) - (-2)^2} = \sqrt{5 + 8 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$$

Найдите наибольшее значение функции

Решим задание без вычисления производной

Функция наименьшее значение будет иметь тогда, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $-x^2 - 4x + 5$ будет иметь наименьшее значение.

Старший коэффициент квадратного трехчлена равен -1 меньше 0 , значит, ветви параболы направлены вниз. И наибольшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.



$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x = 4 / (-2) = -2$$

Наибольшее значение функция примет в точке максимума.

$$y(-2) = \sqrt{5 - 4 \cdot (-2) - (-2)^2} = \sqrt{5 + 8 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + 5 + |1-x|$ на отрезке $[0;4]$.

Решение: Раскроем модуль и преобразуем нашу функцию:

$$y = x^2 - 3x + 5 + 1 - x, \text{ при } x \leq 1.$$

$$y = x^2 - 3x + 5 - 1 + x, \text{ при } x \geq 1.$$

Тогда наша функция примет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{при } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4, & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{при } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4, & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

Найдем критические точки:

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции, для этого вычислим значения функции в стационарных точках и на концах отрезка:

Ответ: Функция достигает наименьшего значения в стационарной точке $x = 1$, $y_{\text{наим.}} = 3$. Функция достигает наибольшего значения на конце отрезка в точке $x = 4$, $y_{\text{наиб.}} = 12$.

x	0	1	2	4
y	6	3	4	12

7. Найдите точку максимума функции



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = -\frac{x^2 + 289}{x}$$

$$D(y) : x \neq 0$$

$$y = -x - 289 \cdot \frac{1}{x}$$

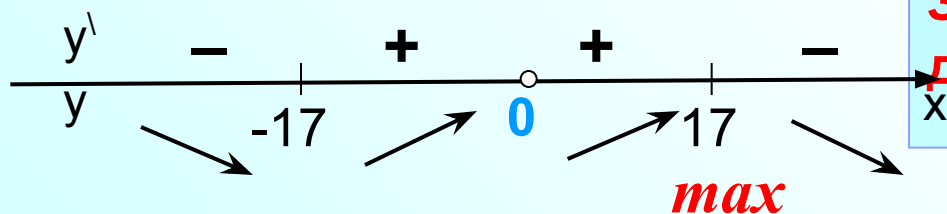
$$y' = -1 - 289 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1 + \frac{289}{x^2} = \frac{-x^2 + 289}{x^2} =$$

$$= \frac{289 - x^2}{x^2} = \frac{(17 - x)(17 + x)}{x^2}$$

$$y = -\frac{x^2}{x} - \frac{289}{x}$$

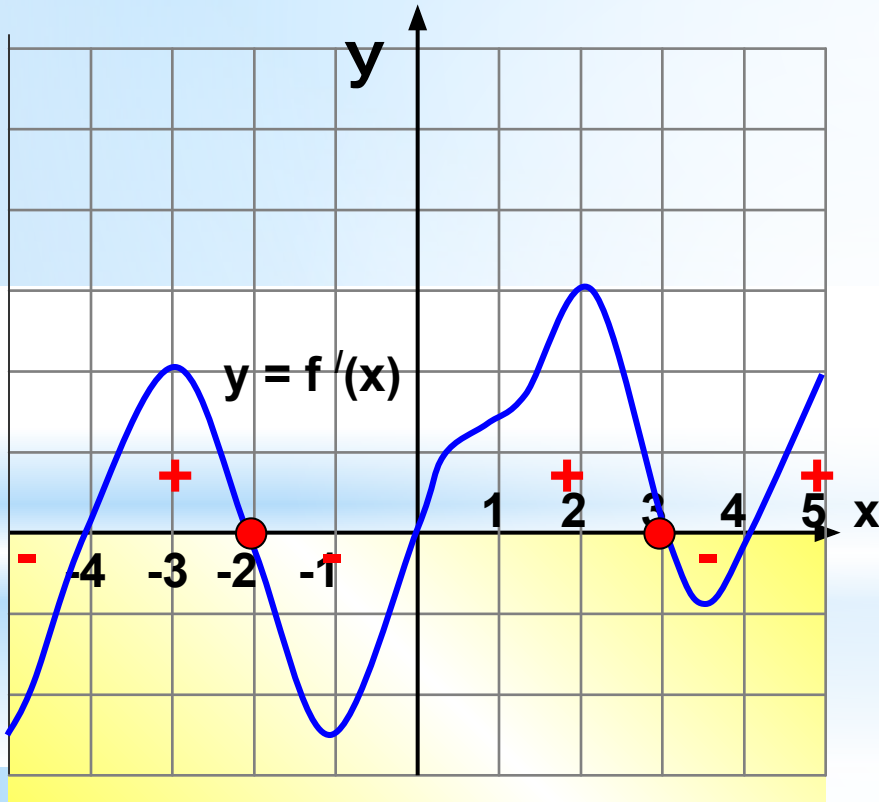
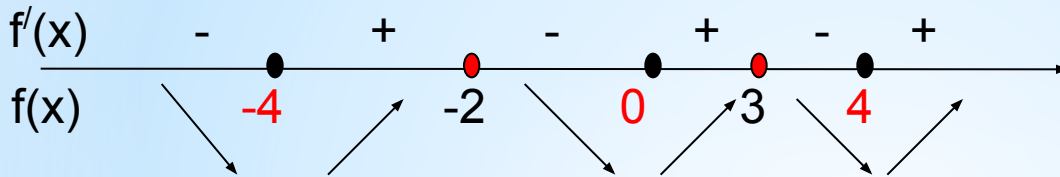
$$y = -x - 289 \cdot \frac{1}{x}$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде



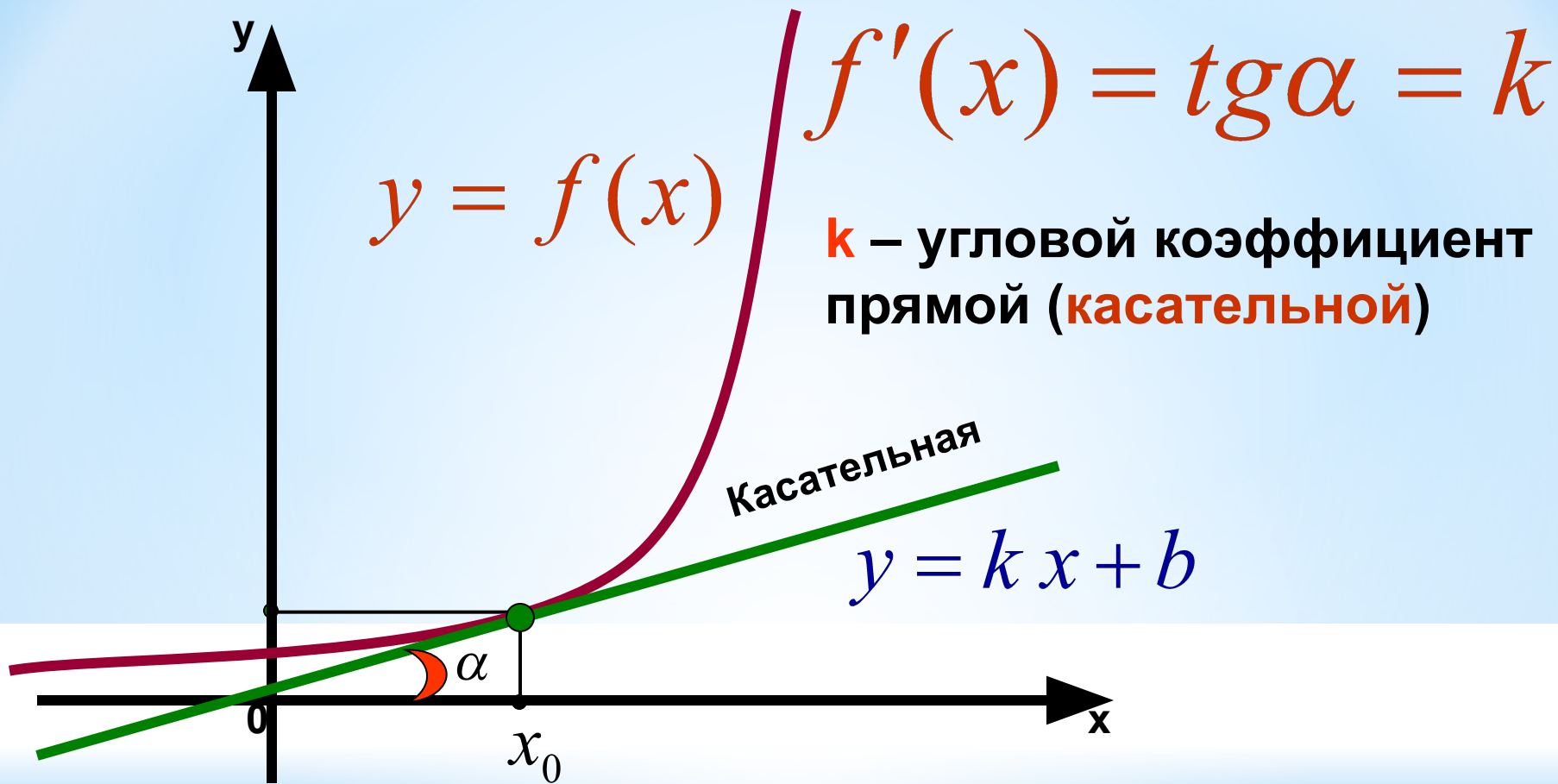
		1	7				
--	--	---	---	--	--	--	--

Задание : По графику производной функции
указать наибольшую точку максимума функции $y = f(x)$.



Ответ:

<input type="text" value="3"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
--------------------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------



Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

НАПИСАТЬ КОНСПЕКТ И ЗАДАЧИ,
ВЫПОЛНЯЯ ЧЕРТЕЖИ.

ВЫСЫЛАТЬ В ЛИЧНОМ
СООБЩЕНИИ В ВК ИЛИ НА ПОЧТУ
SHRAK.IRINA.S@YANDEX.RU

ПЕРЕД КАЖДЫМ ЗАДАНИЕМ В
ТЕТРАДИ ПИШЕМ ФИО, ДАТА, ТЕМА
УРОКА