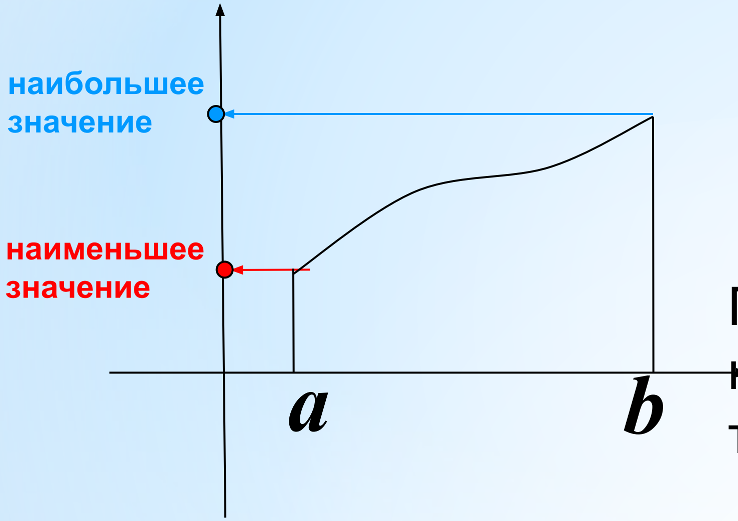
Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке с помощью производной

10.11.2021

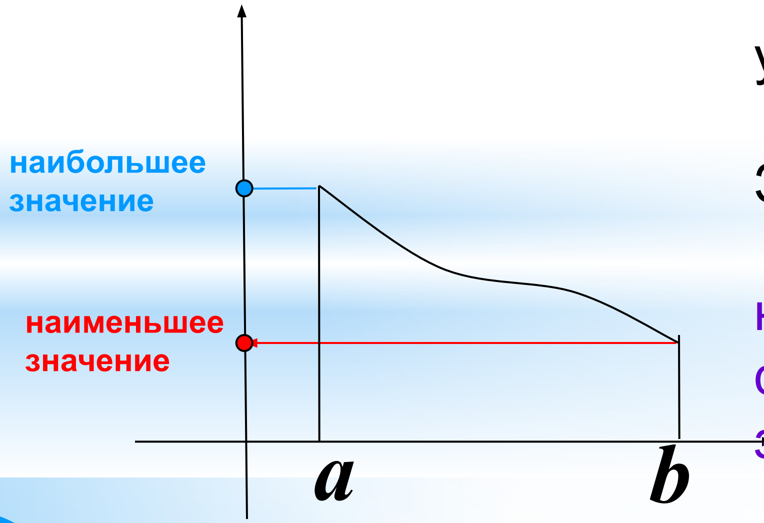
Пусть функция y=f(x) непрерывна на промежутке [a; b] .

Если функция непрерывна на отрезке,то она достигает на нем и своего наибольшего и своего наименьшего значений..



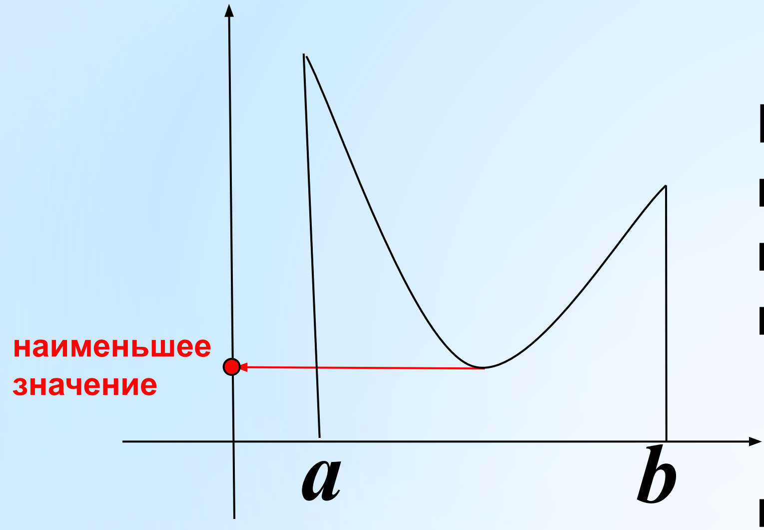
Предположим, что функция f не имеет на отрезке [a; b] критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.



Значит,

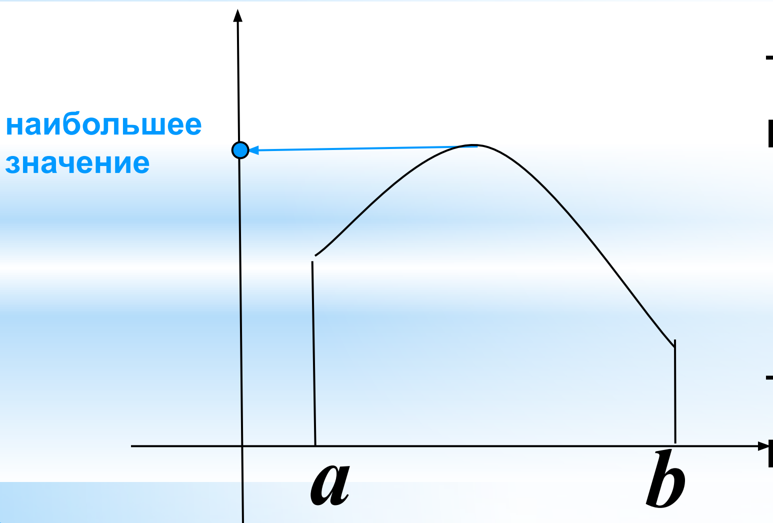
наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [a; b] — это значения в концах a и b.



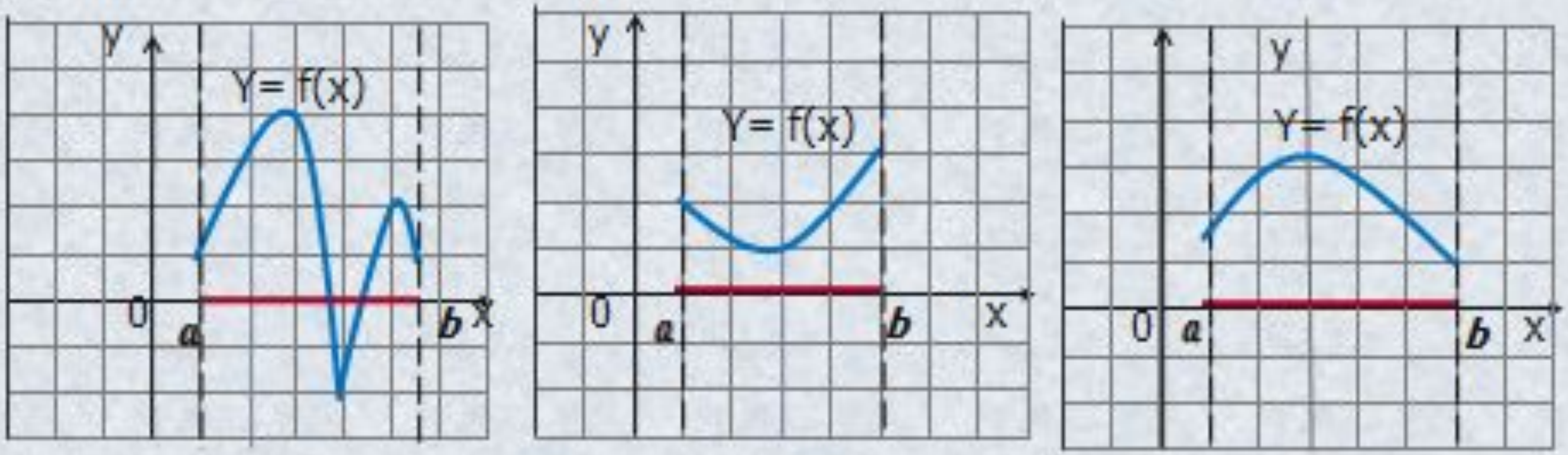
Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.

Предположим, что функция f имеет на отрезке [a; b] **одну** точку экстремума.

Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.



Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.



- **_Функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a;b]. Найти наибольшее и наименьшее значение функций, графики которых предоставлены на рисунках._**
- **_Сделать вывод о расположении точек, в которых функция достигает наибольшего(наименьшего) значений_**

Среди критических точек есть точки экстремума

Необходимое условие экстремума

Теорема Ферма

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f', то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Но, если $f'(x_0) = 0$, то необязательно, что точка x_0 будет точкой экстремума. Примеры

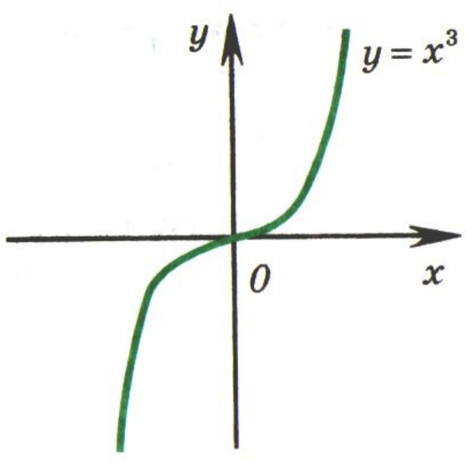


Рис. 105

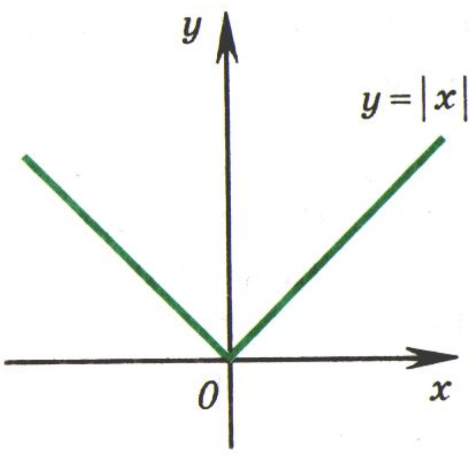


Рис. 106

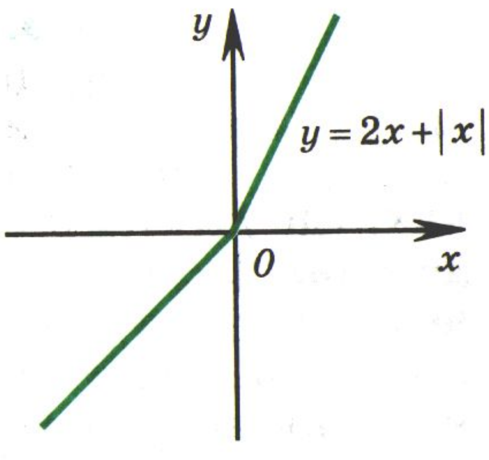
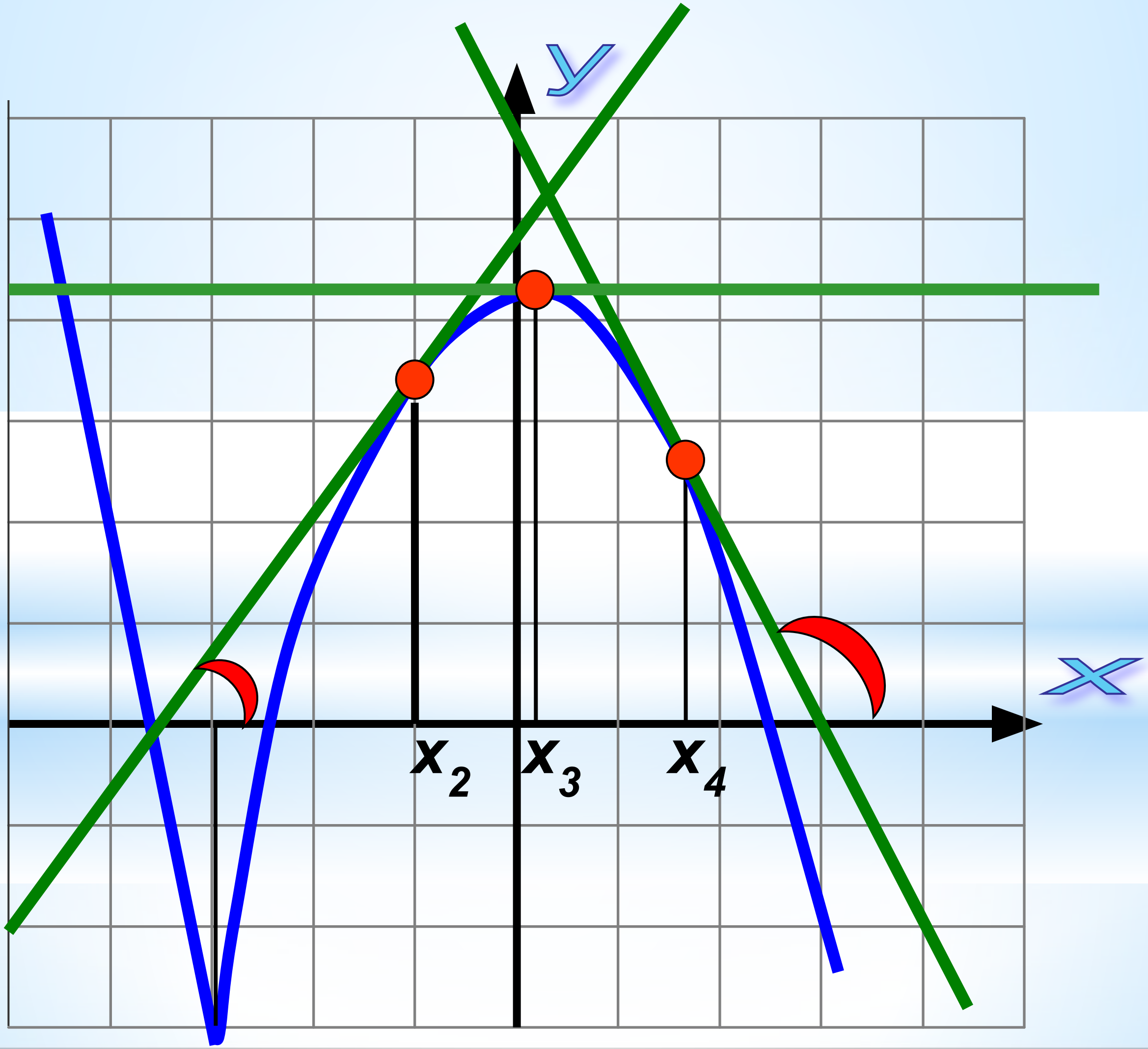


Рис. 107

$$\alpha > 90^o \Rightarrow k < 0 \qquad \alpha < 90^o \Rightarrow k > 0$$

$$\alpha = 0^o \Rightarrow k = 0, \textit{ касательная параллельна } OX$$

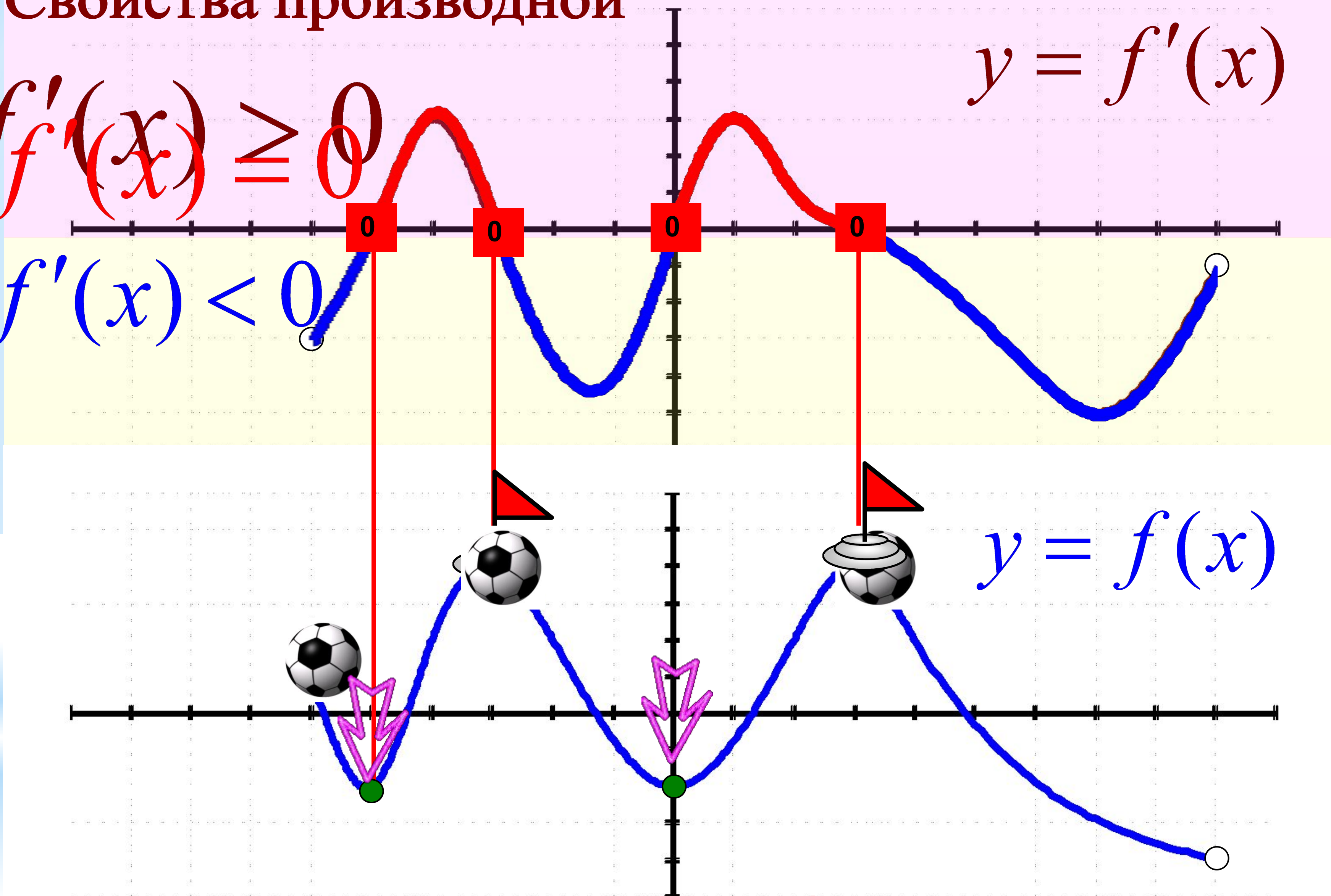


Свойства производной

$f'(x) \geq 0$

$f'(x) = 0$

$f'(x) < 0$



Поведение функции: экстремумы

Показать (6)

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$

1. Найти производную $f'(x)$

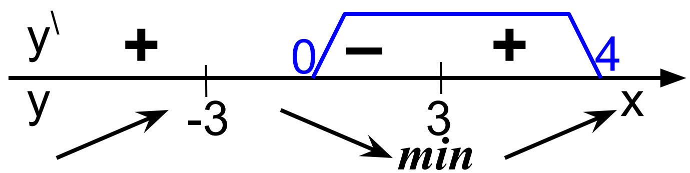
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a;b]$

3. Вычислить значение функции $y= f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b. Выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$)и наибольшее (это будет $y_{наиб}$)

Алгоритм решения задач

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f^{/}(x)$	1) $y^{/} = 3x^2 - 27$
2. Найти стационарные точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	3 -3 2) $y^{/} = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в стационарных точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	- 5 4

Другой способ решения

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти стационарные точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ 3, -3 
3. Вычислить значения функции в стационарных точках ~~и на концах отрезка.~~	3) $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее~~	**Этот способ будет удобно вспомнить, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным.**

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

2. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}$

D(y): $5-4x-x^2 \geq 0$

$$f'(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

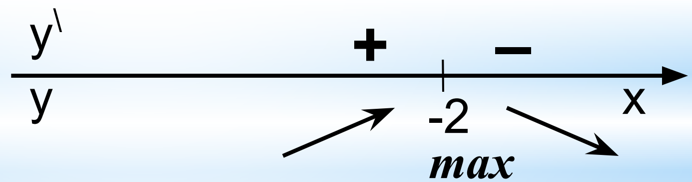
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{5-4x-x^2}}\cdot\left(5-4x-x^2\right)' =$$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

$$= \frac{1}{2\sqrt{5-4x-x^2}}\cancel{(-4-2x)}\ \frac{-2(2+x)}{2\sqrt{5-4x-x^2}}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат D(y).

$x=-2 \in$ D(y)



Наибольшее значение функция примет в точке максимума.

$$y(-2)=\sqrt{5-4\cdot(-2)-(-2)^2} = \sqrt{5+8-4} = \sqrt{9} = 3$$

Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$

Решим задание без вычисления производной

Функция наименьшее значение будет иметь тогда , когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $-x^2 - 4x + 5$ будет иметь наименьшее значение.

Старший коэффициент квадратного трехчлена равен -1 меньше 0, значит, ветви параболы направлены вниз. И наибольшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Наибольшее значение функция примет в точке максимума.

X=4/(-2)=-2

$$y(-2) = \sqrt{5 - 4\cdot(-2) - (-2)^2} = \sqrt{5 + 8 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + 5 + |1-x|$ на отрезке [0;4].

Решение: Раскроем модуль и преобразуем нашу функцию:

$y = x^2 - 3x + 5 + 1 - x$, при $x \le 1$.

$y = x^2 - 3x + 5 - 1 + x$, при $x \ge 1$.

Тогда наша функция примет вид:

f(x)={ x2−4x+6,прих≤1
x2−2x+4,прих≥1

f(x)={ x2−4x+6,прих≤1
x2−2x+4,прих≥1

Найдем критические точки:

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции, для этого вычислим значения функции в стационарных точках и на концах отрезка:

Ответ: Функция достигает наименьшего значения в стационарной точке x= 1, $y_{наим.} = 3$. Функция достигает наибольшего значения на конце отрезка в точке x= 4, $y_{наиб.} = 12$.

x	0	1	2	4
y	6	3	4	12

7. **Найдите точку максимума функции**

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = -\frac{x^2+289}{x} \qquad D(y): x \neq 0$$

$$y = -x - 289\cdot\frac{1}{x}$$

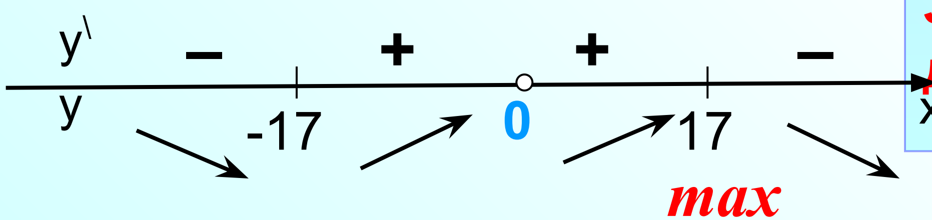
$$y' = -1 - 289\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1 + \frac{289}{x^2} = \frac{-x^2+289}{x^2} =$$

$$= \frac{289-x^2}{x^2} = \frac{(17-x)(17+x)}{x^2}$$

$$y = -\frac{x^2}{x} - \frac{289}{x}$$

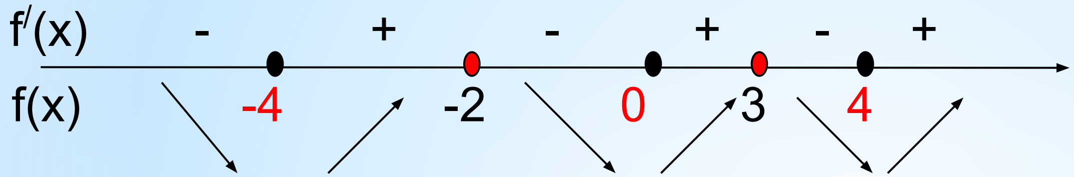
$$y = -x - 289\cdot\frac{1}{x}$$

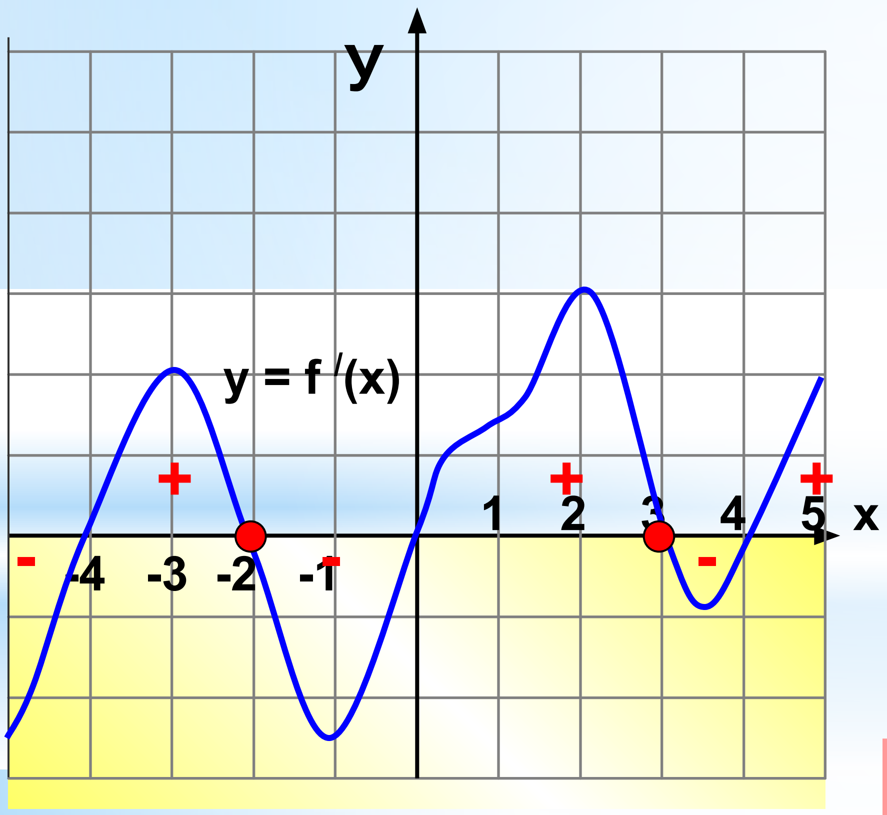
Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде



17

Задание : По графику производной функции указать наибольшую точку максимума функции $y = f(x)$.





Ответ:

3

$$f'(x) = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой (**касательной**)

Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

НАПИСАТЬ КОНСПЕКТ И ЗАДАЧИ, ВЫПОЛНЯЯ ЧЕРТЕЖИ.

ВЫСЫЛАТЬ В ЛИЧНОМ СООБЩЕНИИ В ВК ИЛИ НА ПОЧТУ SHPAK.IRINA.S@YANDEX.RU ПЕРЕД КАЖДЫМ ЗАДАНИЕМ В ТЕТРАДИ ПИШЕМ ФИО, ДАТА, ТЕМА УРОКА