

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

گروه ریاضی استان ایلام



هندسه دهم

فصل چهارم هندسه فضایی

مبجٹ نقطہ، خط، صفحہ

زہرا صفری پور

مدرس مدارس غیرانتفاعی استان ایلام

Z_safaripour@yahoo.com

1399_1400

تجسم فضایی

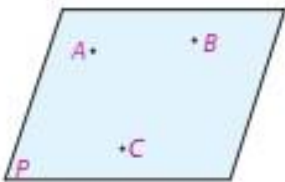


تصویر سمت راست، آرامگاه ابوعلی سینا، واقع در همدان است. در مورد تصویر سمت چپ چه حدسی می‌زنید؟

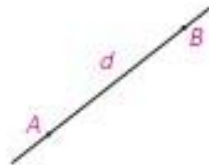
درس اول

خط، نقطه و صفحه

مفاهیم نقطه، خط و صفحه از اساسی‌ترین مفاهیم در هندسه است که معمولاً برای نمایش آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم:



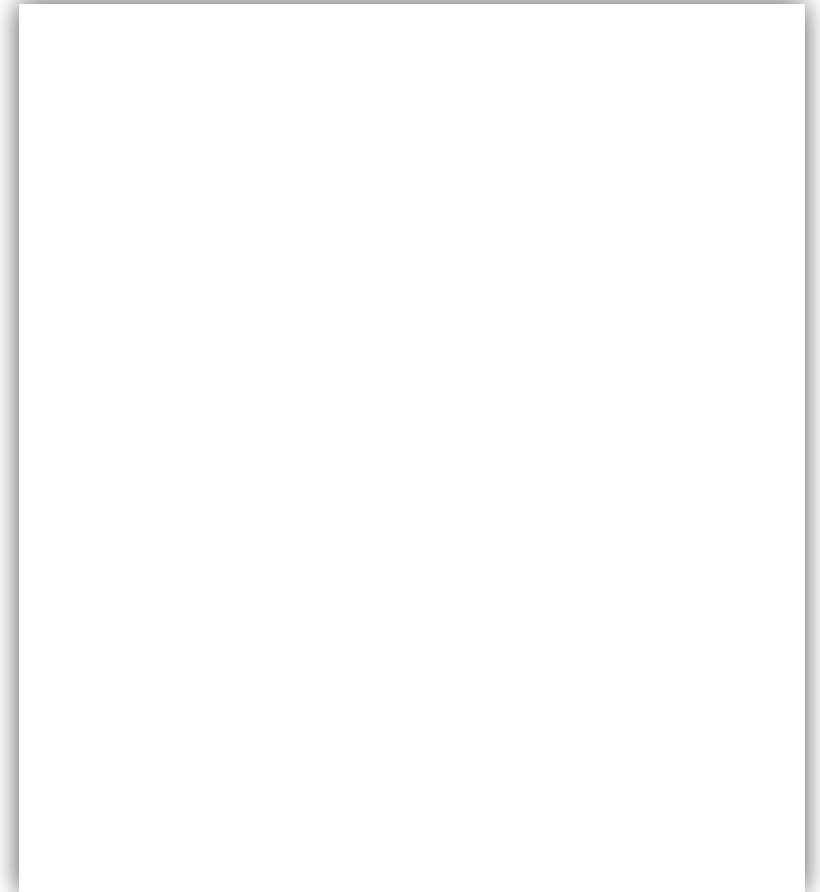
صفحه ABC ، BAC ، ... یا صفحه P



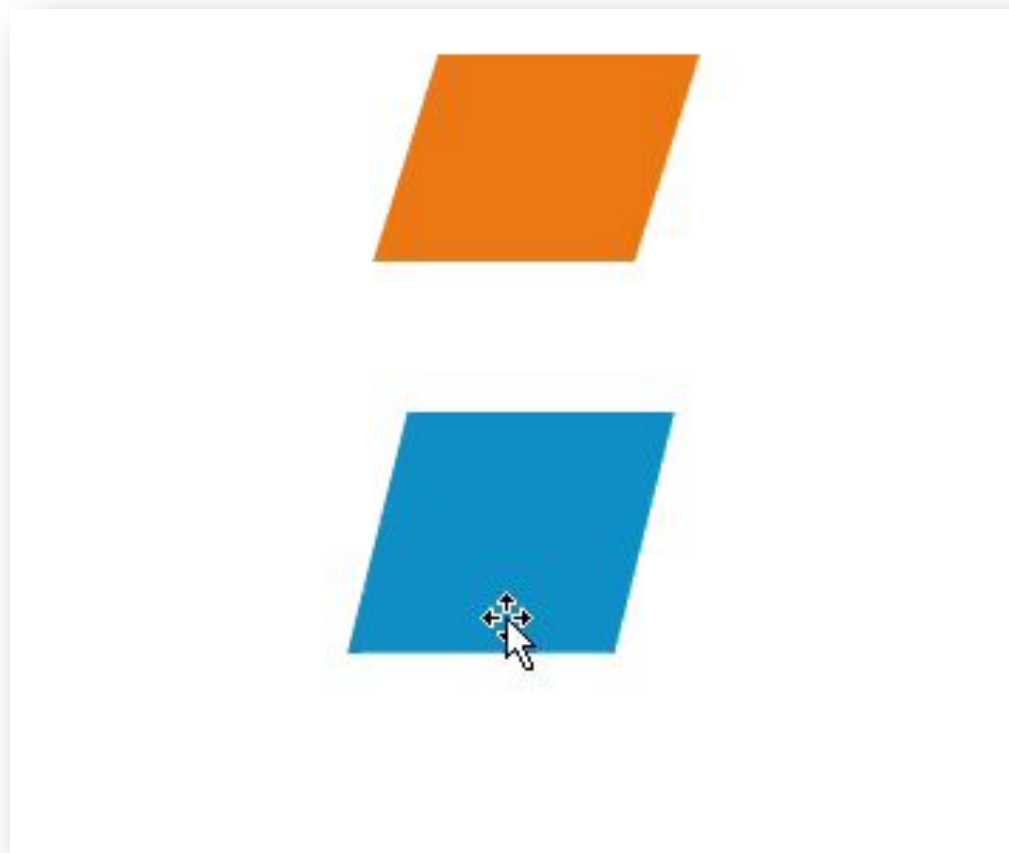
خط AB یا BA ، یا خط d

خط راست از هر دو طرف نامحدود است. صفحه نیز از هر طرف ادامه دارد و ضخامتی ندارد.

برای رسم یک خط به دو نقطه نیاز داریم و خط از دو طرف ادامه دارد.



صفحه از هر چهار طرف ادامه دارد.



کار در کلاس

به این تصویر دقت کنید. توپ A داخل جیب یکی از بازیکنانها و توپ C روی راکت بازیکن دیگر است و بقیه توپ های تنیس روی زمین افتاده اند.

الف) سه توپ نام ببرید که در یک راستا هستند. **F,F,B**

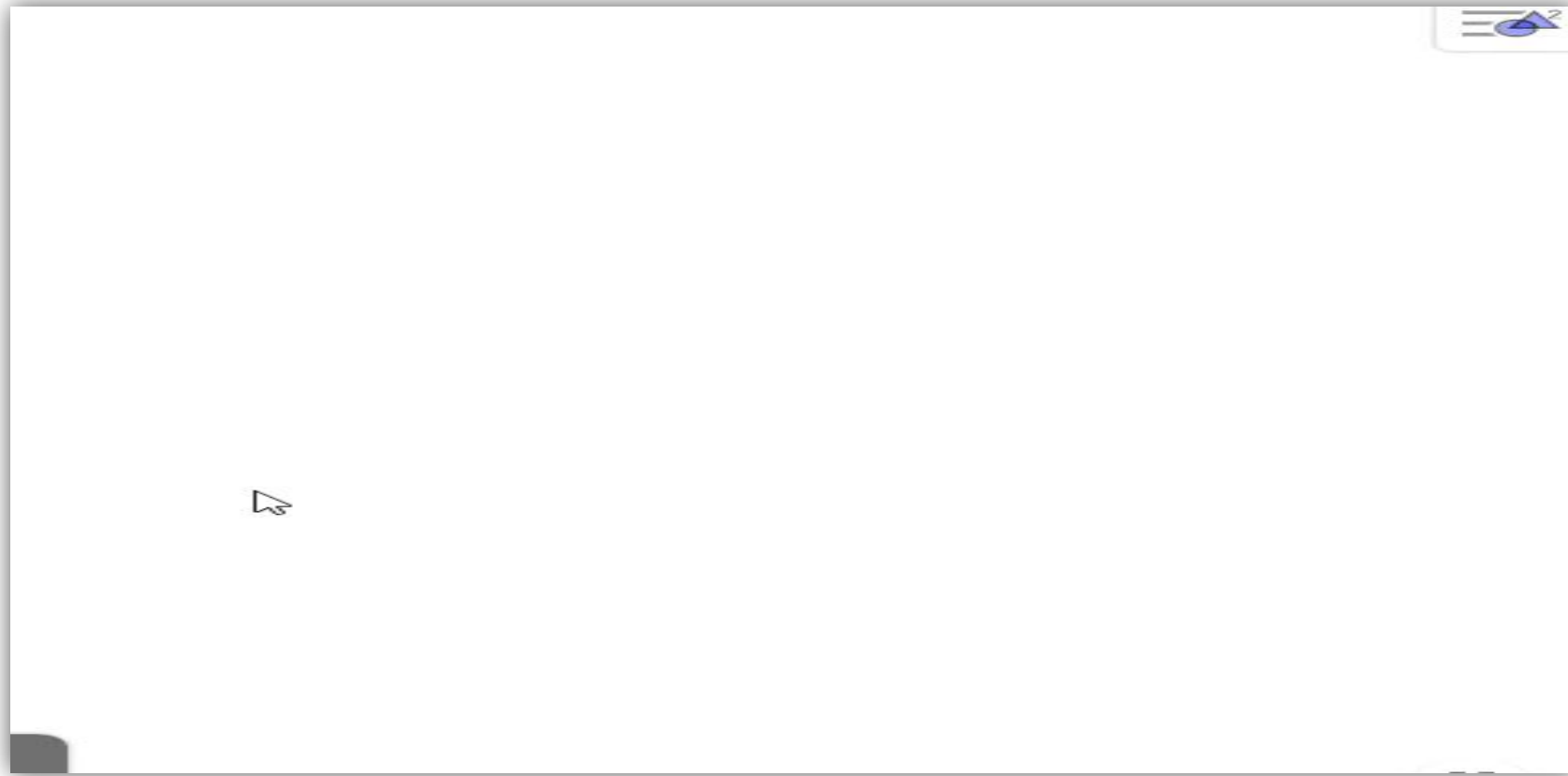
ب) سه توپ نام ببرید که در یک صفحه اند ولی هم راستا نیستند. **D,F,B**

ج) چهار توپ نام ببرید که همگی در یک صفحه نیستند. **A,C,F,H**

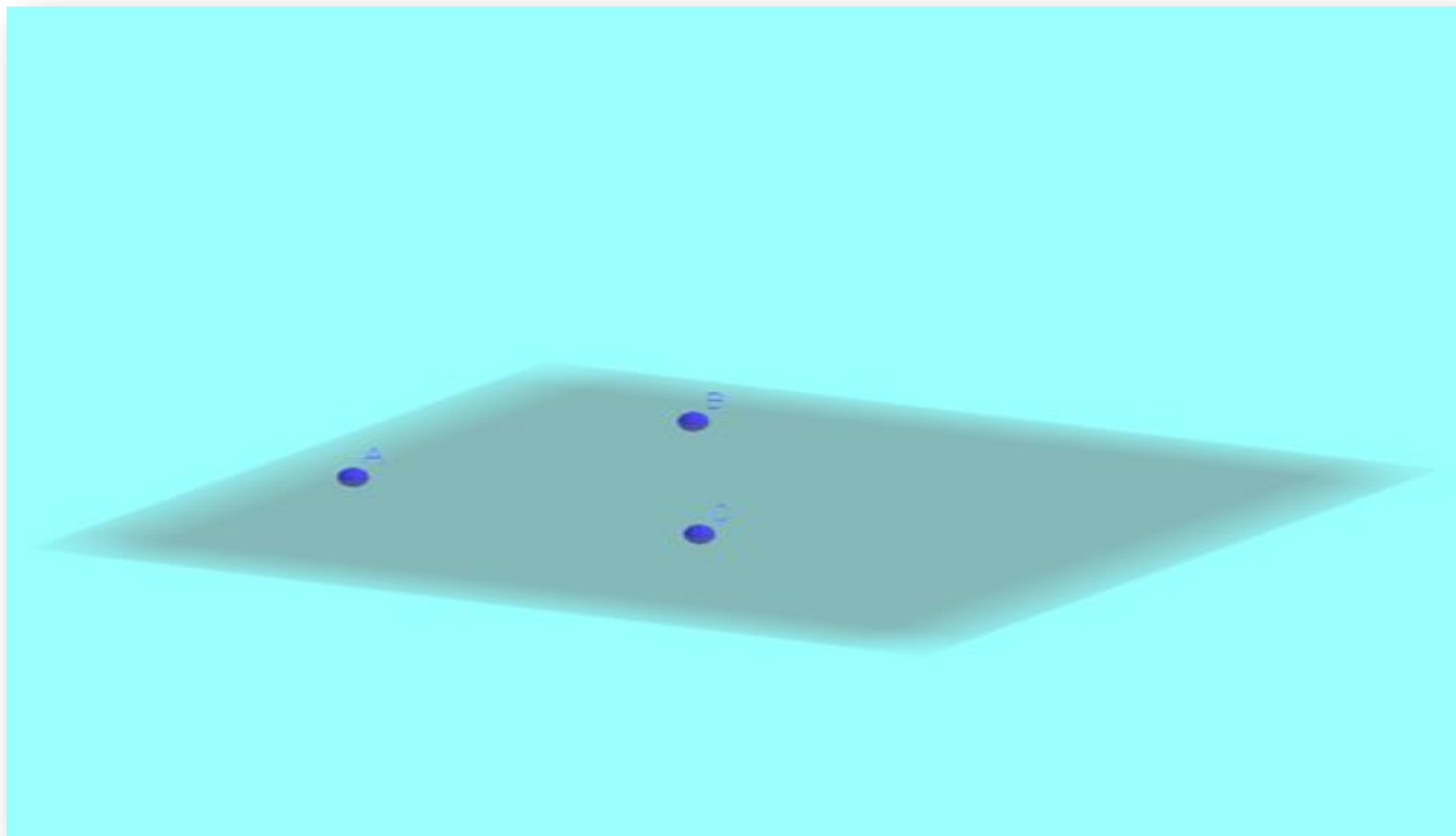


بیان دو اصل مهم

اصل اول: از هر دو نقطه متمایز یک و تنها یک خط می گذرد.



اصل دوم از سه نقطه متمایز که روی خط راست قرار می‌گیرند
یک و تنها یک صفحه عبور می‌کند



تعاريف



C

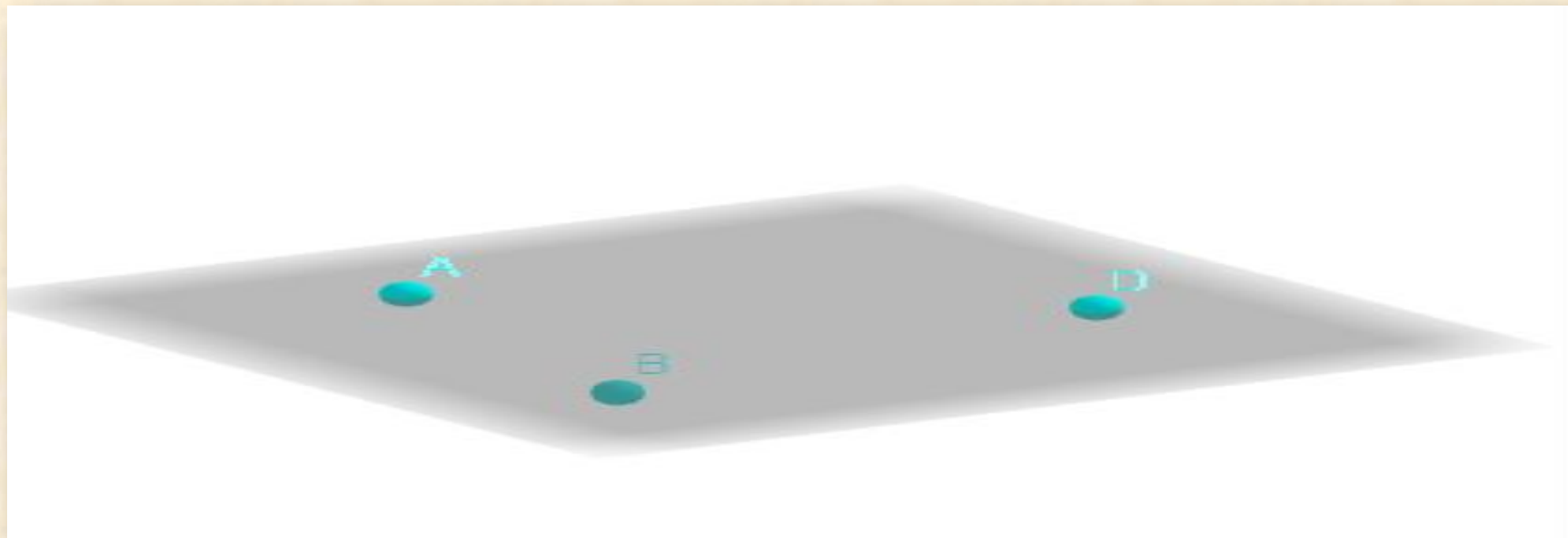
AB

C

AB



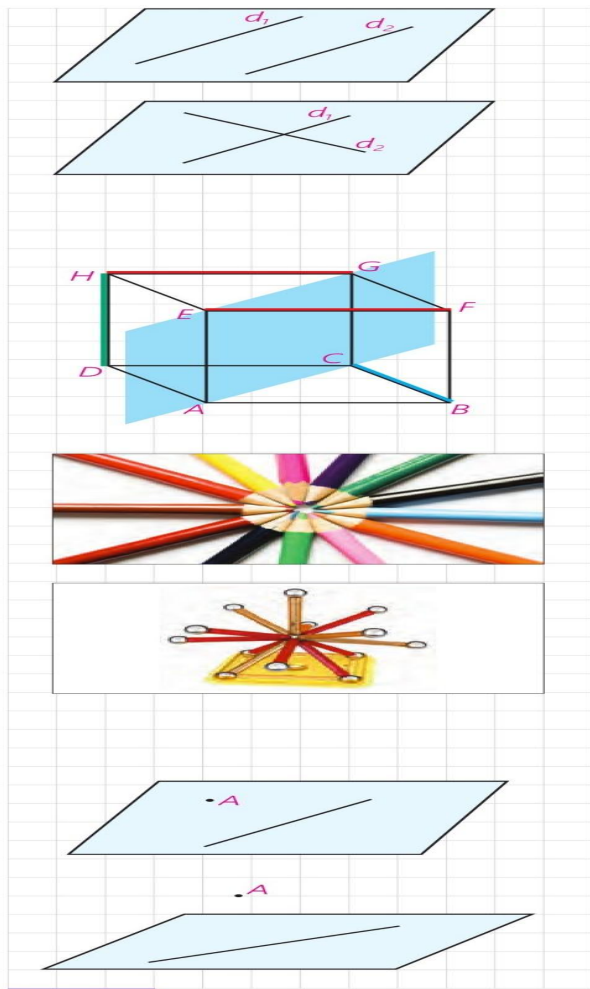
اگر نقطه روی صفحه گذرا از A و B قرار داشته باشد گوییم که این 2. نقاط هم صفحه اند.



حالت‌های مختلف دو خط در صفحه و فضا

به تصاویر روبه‌رو نگاه کنید.

دو خط در یک صفحه نسبت به هم موازی یا متقاطع‌اند. وقتی دو خط برهم منطبق می‌شوند، آنها را یک خط در نظر می‌گیریم.



فعالیت

مکعب روبه‌رو را در نظر بگیرید.

در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا می‌توان صفحه‌ای شامل آن دو در نظر گرفت؟

موازی : EF و HG

موازی : GC و EA

متقاطع : HD و HG

متقاطع : FD و EC

متنافر : AB و GD

متنافر : BC و HD

تعریف: دو خط را که نقطه اشتراکی ندارند، در نظر بگیرید:

۱) اگر صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد، آن دو خط را موازی می‌نامیم.

۲) اگر هیچ صفحه‌ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد، آن دو خط را متنافر می‌نامیم.

دو خط در فضا نسبت به هم موازی یا متقاطع یا متنافر هستند.

کاردکلاس

۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

- در صفحه از هر نقطه چند خط می‌گذرد؟ بی‌شمار

در فضا چطور؟ بی‌شمار

- در صفحه از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، چند خط موازی آن خط می‌توان

رسم کرد؟ یک و تنها یک خط

در فضا چطور؟ یک و تنها یک خط

حالت های مختلف دو خط در صفحه

2. دو خط متقاطع باشند.

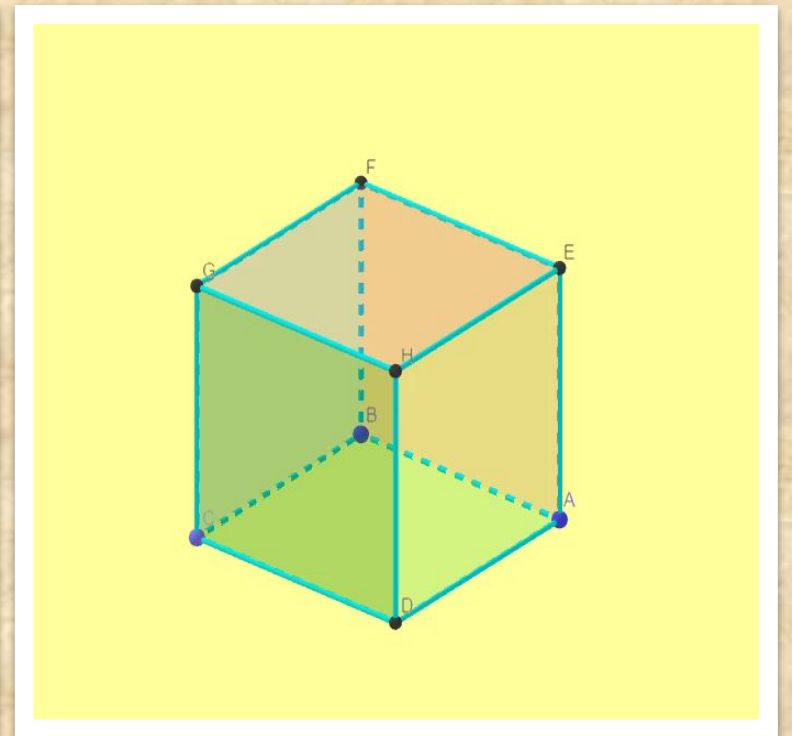


1. دو خط موازی باشند.

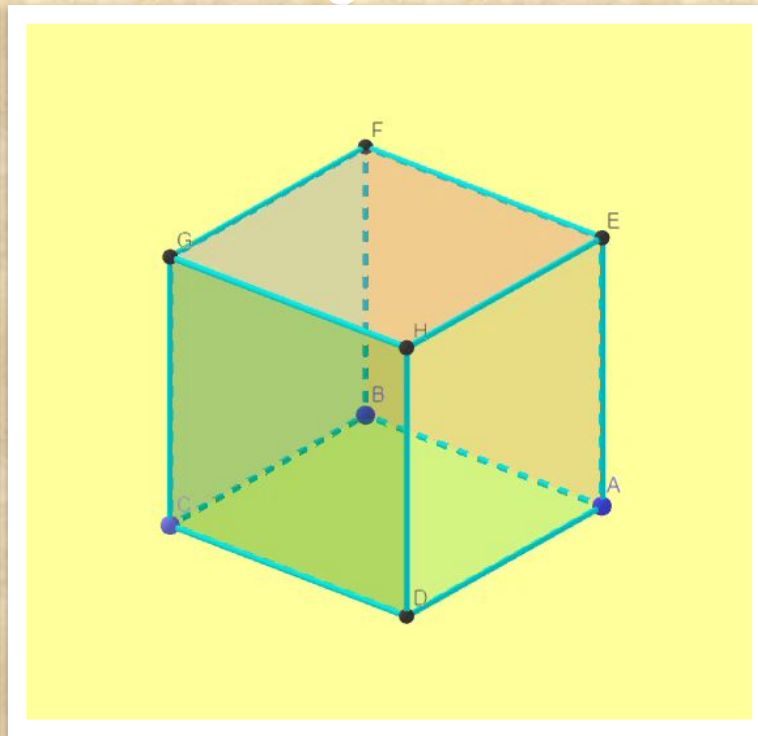


حالت های مختلف دو خط در فضا

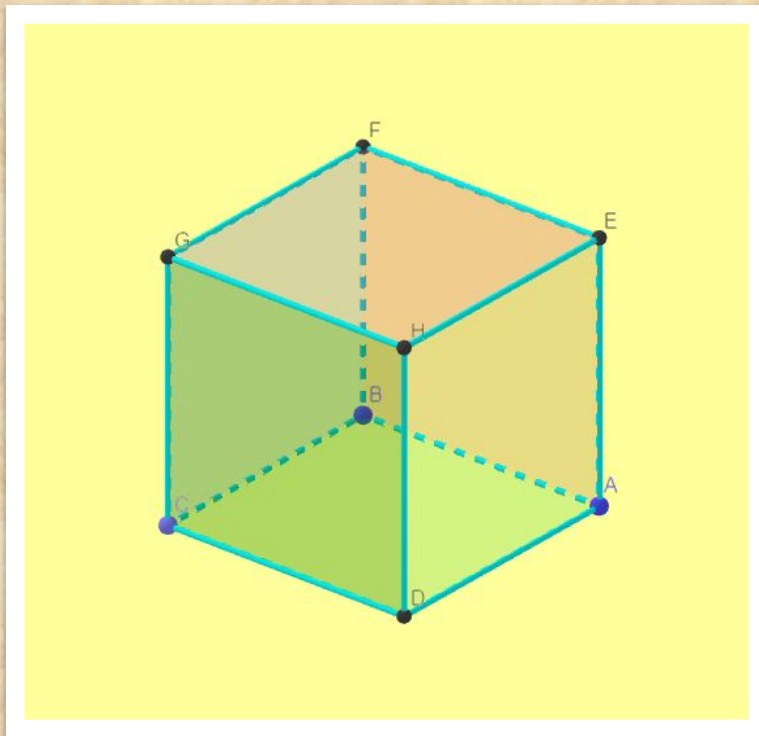
1. دو خط موازی هستند.



2. دو خط متقاطع هستند.



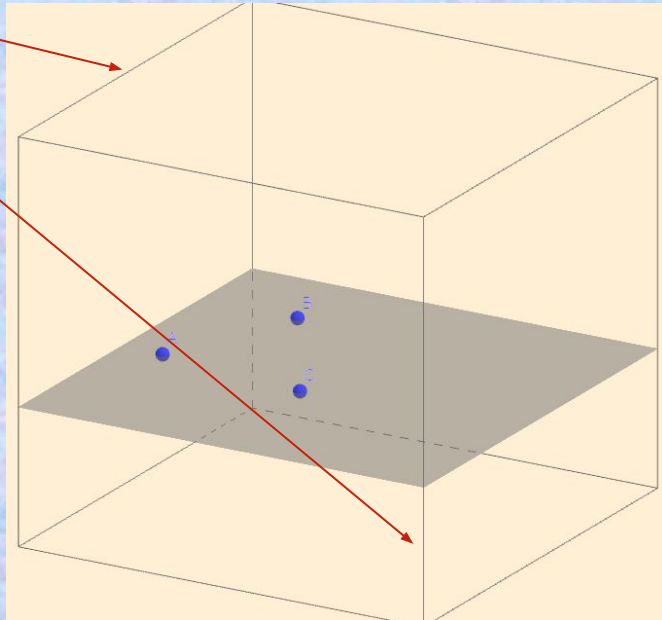
3. دو خط متناظر هستند.



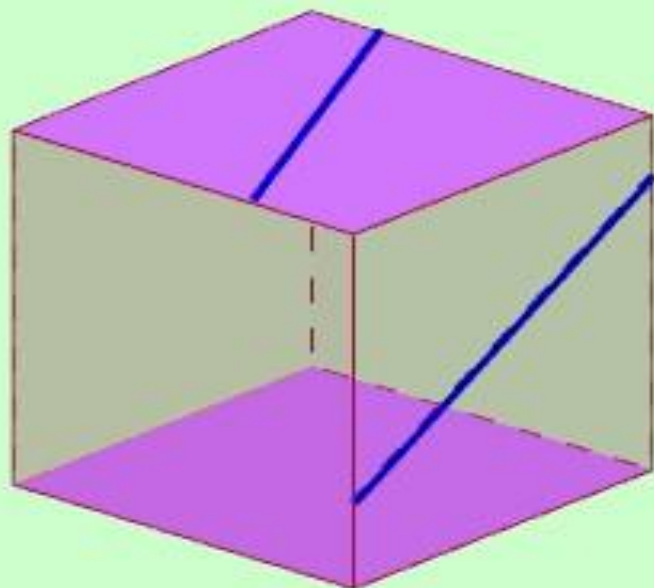
نکته

دو خط متناظر در یک صفحه قرار نمی گیرند . 1

مانند این دو خط



برای درک بهتر دو خط متناظر در مساله ها یکی از خط ها را درون صفحه 2. فرض و دیگری را خارج از صفحه و غیر موازی با آن فرض می کنیم.



۲- در شکل‌های زیر در صورت وجود، به خطوط موازی، متقاطع و متناظر اشاره کنید.



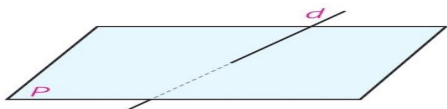
۳- دو خط موازی رسم کنید و آنها را d_1 و d_2 بنامید. حالا خط d_3 را موازی با d_2 رسم کنید. دو خط d_1 و d_3 نسبت به هم چه وضعی دارند؟ موازی اند

نتیجه ۱: در یک صفحه دو خط موازی با یک خط موازی اند.

آیا در فضا نیز این نتیجه برقرار است؟ **بله**

۴- می‌دانیم که در صفحه دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.

آیا در فضا هم این رابطه برقرار است؟ **خیر**



۵- خط d با صفحه P متقاطع است.

خط‌های موجود در صفحه P نسبت به خط d چه

وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟ **متقاطع - متناظر**

حالت‌های مختلف خط و صفحه

▶ **مادادتان را طوری در دست بگیرید که مداد یا امتداد آن، صفحه میز را قطع نکند.**

اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم **موازی** هستند.

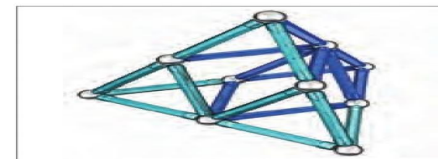
▶ **نوک مداد را روی میز بگذارید. در این حالت مادادتان در یک نقطه با میز اشتراک دارد.**

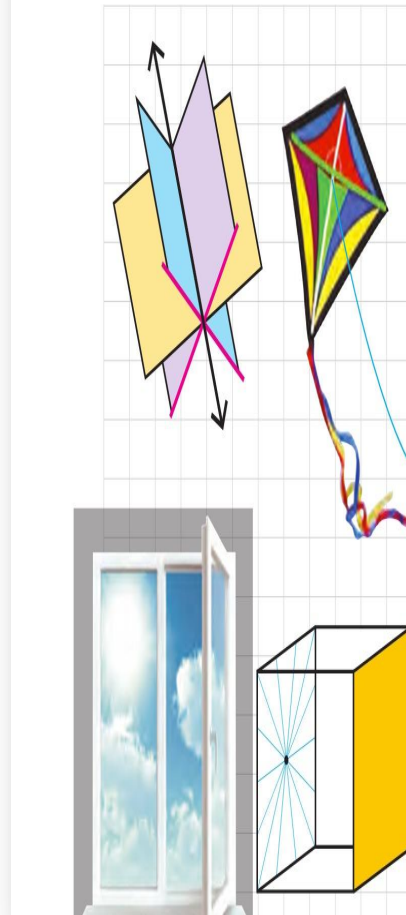
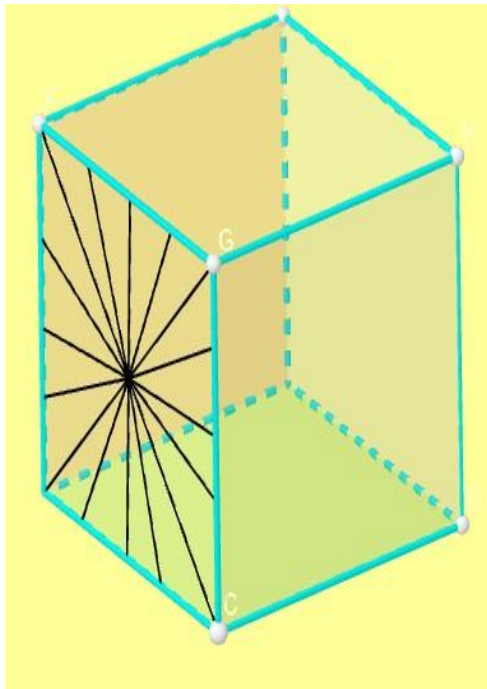
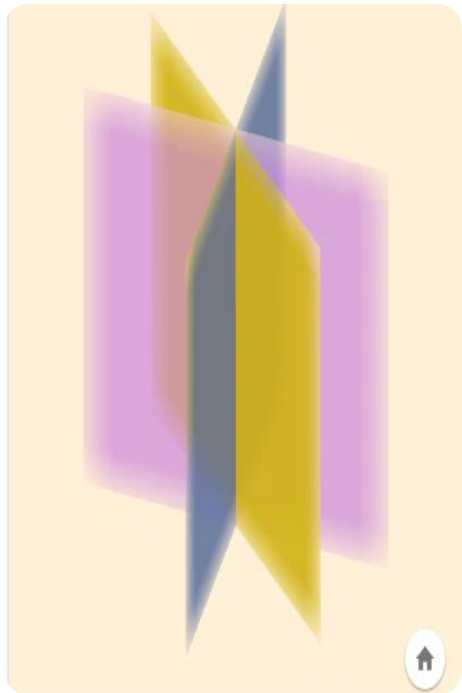
اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم **متقاطع** هستند.

▶ **مادادتان را روی میز قرار دهید.**

اگر خط و صفحه بی‌شمار نقطه اشتراک داشته باشند خط بر صفحه واقع است.

خط و صفحه در فضا نسبت به هم **موازی** یا **متقاطع** هستند یا خط بر صفحه **منطبق** است.

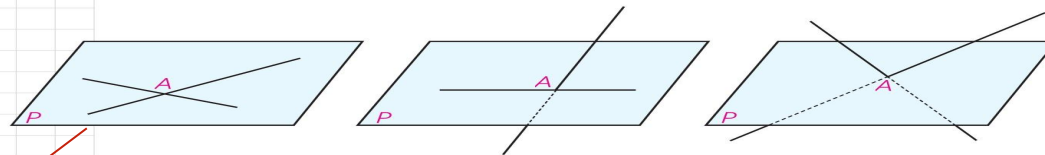




کار در کلاس

- ۱- به سوالات زیر پاسخ دهید. (می توانید از تصاویر کمک بگیرید.)
 - از یک خط در فضا چند صفحه می گذرد؟ **بی شمار**
 - از دو خط متقاطع چند صفحه می گذرد؟ **یک و تنها یک صفحه**
 - از دو خط موازی چطور؟ **یک و تنها یک صفحه**
 - از یک نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط موازی با آن صفحه می توان رسم کرد؟ **بی شمار**

۲- دو خط در نقطه A متقاطع اند و صفحه P شامل نقطه A است. با توجه به شکل های زیر حالت های مختلف خطوط متقاطع و صفحه P را بررسی کنید.



هر دو خط در صفحه قرار دارند.

فقط یکی از دو خط در صفحه قرار دارد.

هیچ یک از دو خط در صفحه قرار ندارد.

۳- دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم موازی اند.

الف) اگر صفحه‌ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟ **یا با خط دوم موازی است یا خط دوم بر آن واقع است**

ب) اگر صفحه P شامل یکی از این دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ **یا با خط دوم موازی است یا خط دوم هم بر آن واقع است**

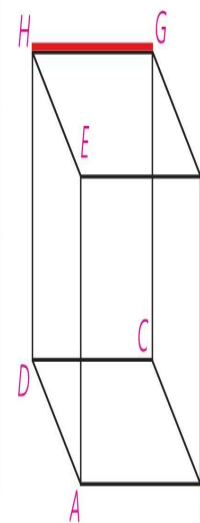
ج) اگر صفحه P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ **متقاطع است**

الف: اگر صفحه ای شامل یکی از خط های متنافر باشد می توان دو حالت را در نظر بگیریم:

با خط دیگر موازی است. مانند صفحه GHD و دو خط BH و GH

با خط متقاطع است مانند صفحه BFG و خط های BH و GH

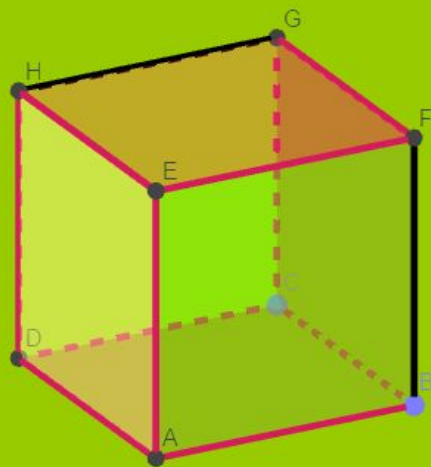
۴- مسئله قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط، متنافرند.



ادامه سوال 4

ب: اگر صفحه ای با یکی از دو خط متناظر موازی باشد می توان سه حالت در نظر بگیریم

با خط دیگر موازی است مانند صفحه P و دو خط BH - GH
با دو خط دیگر متقاطع است مانند صفحه BFG و دو خط GH - AE
خط دیگر بر آن صحنه قرار دارد مانند صفحه BFE و دو خط AE و GH



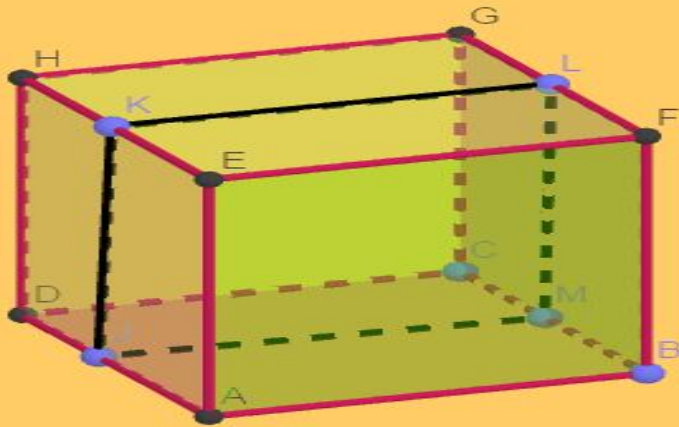
ادامه سوال 4

ج : اگر صفحه ای یکی از دو خط متنافر را قطع کند سه حالت میتوان در نظر بگیریم:

با خط دیگر موازی است مانند صفحه EHD و دو خط BF و GH

با خط دیگر متقاطع است مانند صفحه ای که از وسط یال های EF و GH می گذرد و دو خط BF و GH

خط دیگر بر آن صفحه قرار دارد مانند BFF و خط های BF و EH



حالت‌های مختلف دو صفحه

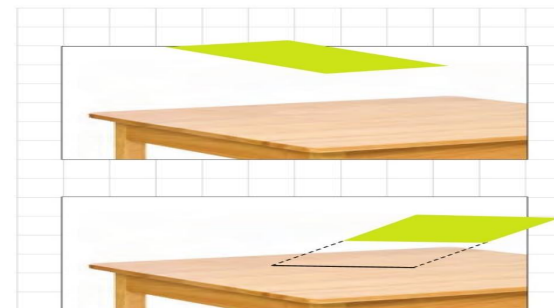
▶ یک برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه میز را قطع نکند.

اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم موازی هستند.

▶ برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه میز را قطع کند. اشتراک صفحه‌ای که برگه قسمتی از آن است، با سطح میز به چه شکلی است؟

اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم متقاطع هستند. خط راستی که اشتراک دو صفحه متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

دو صفحه در فضا نسبت به هم موازی یا متقاطع هستند. وقتی دو صفحه برهم منطبق می‌شوند، آنها را یک صفحه در نظر می‌گیریم.



کاردرکلاس

به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های DA و GF نسبت به هم چه وضعی دارند؟ موازی

DC و HG چطور؟ موازی

GC و EF چطور؟ متنافر

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟ چهار خط

با چند خط موازی است؟ سه خط

با چند خط متنافر است؟ چهار خط

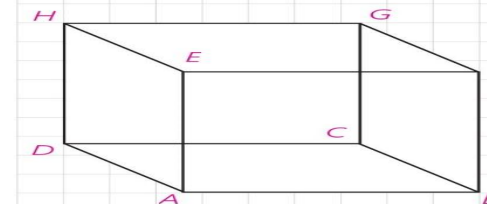
ج) HD با کدام صفحه موازی است؟ BFG

با کدام متقاطع است؟ EFG , ABC

بر کدام واقع است؟ HAD , HDC

د) دو صفحه موازی و دو صفحه متقاطع نام ببرید. موازی: EFG , ABC

متقاطع: ABC , ABF



نوک مداد خود را مطابق شکل به صورت قائم بر صفحه کتاب نگه دارید. در این حالت مدادتان با بقیه خطهای موجود در صفحه که از نقطه تقاطع مداد و سطح میز میگذرد عمود است. **عمود است**

تعریف: فرض کنید خط l در نقطه A صفحه P را قطع می‌کند. خط l بر صفحه P عمود است؛ هرگاه بر تمام خطهای صفحه P که از نقطه A می‌گذرند، عمود باشد.

آیا اگر خطی فقط بر یکی از خطوط صفحه‌های عمود باشد، می‌توانیم بگوییم آن خط به آن صفحه عمود است؟
خیر

می‌توان نشان داد که:

اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای، در محل تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

تعریف: دو صفحه بر هم عمودند؛ هر گاه هر کدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.

کاردرکلاس

(۱)



(۲)



می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

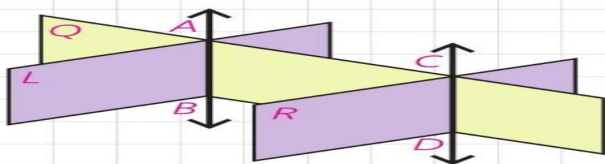
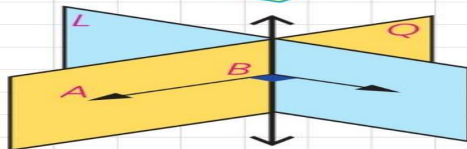
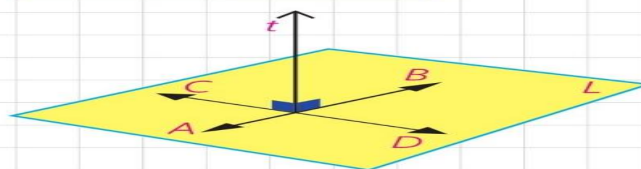
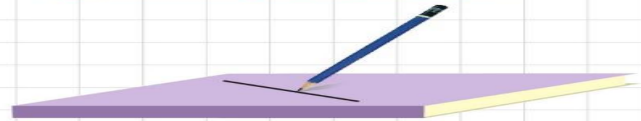
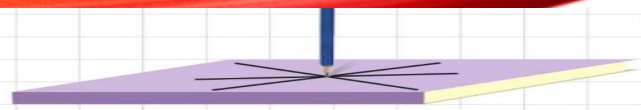
الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟ **بله**

ب) آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟ **بله**

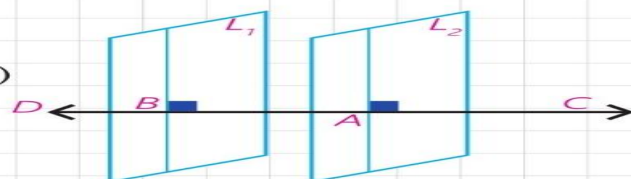
ج) دو صفحه عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟ **موازی‌اند**

د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ **عمود است**

ه) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید. **آن نیز عمود است**

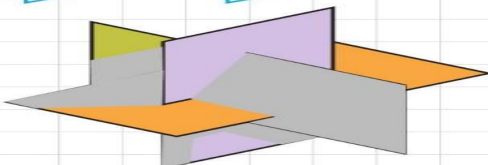


(۳)



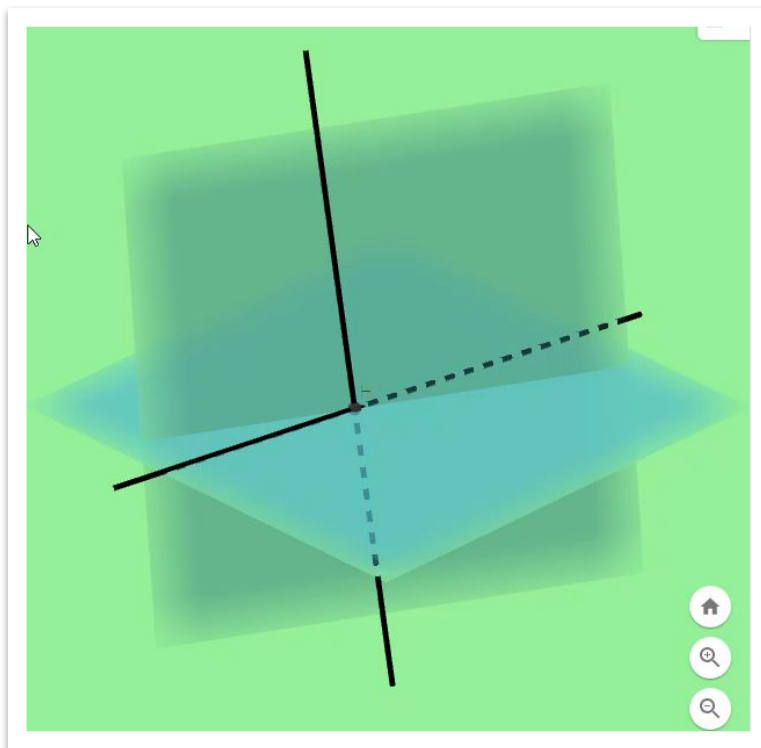
(۴)

(۵)

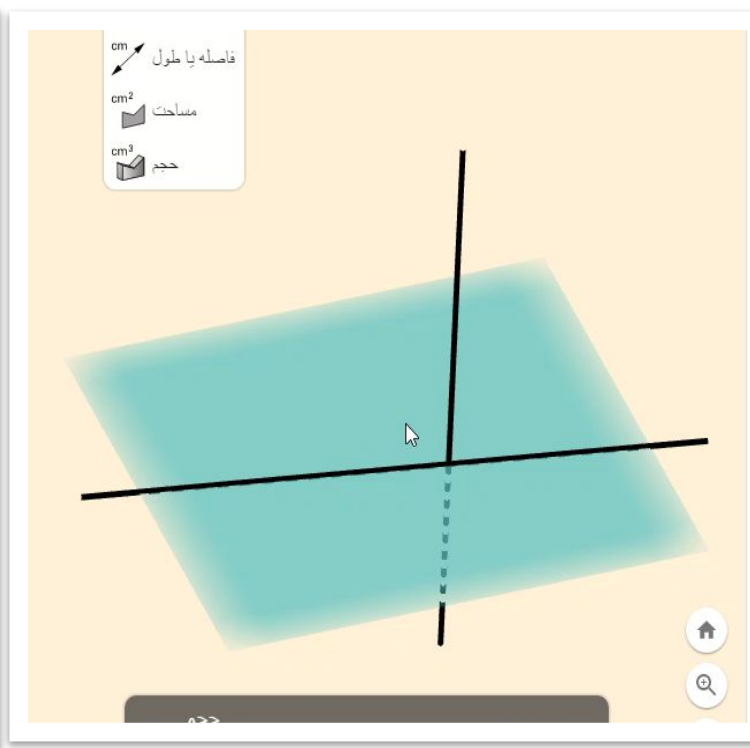


حالت های تعامد

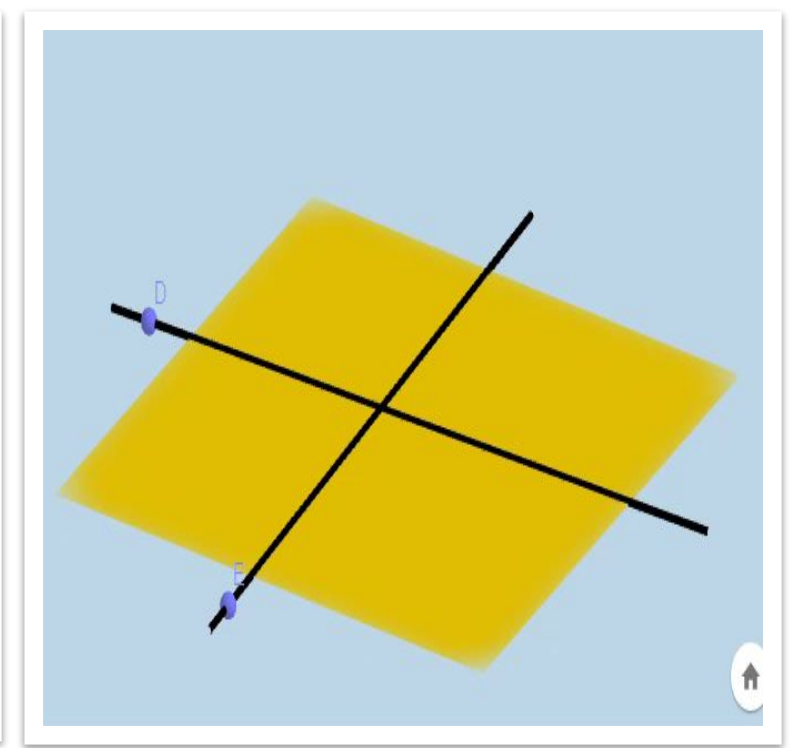
عمود بودن دو صفحه



عمود بودن خط بر صفحه

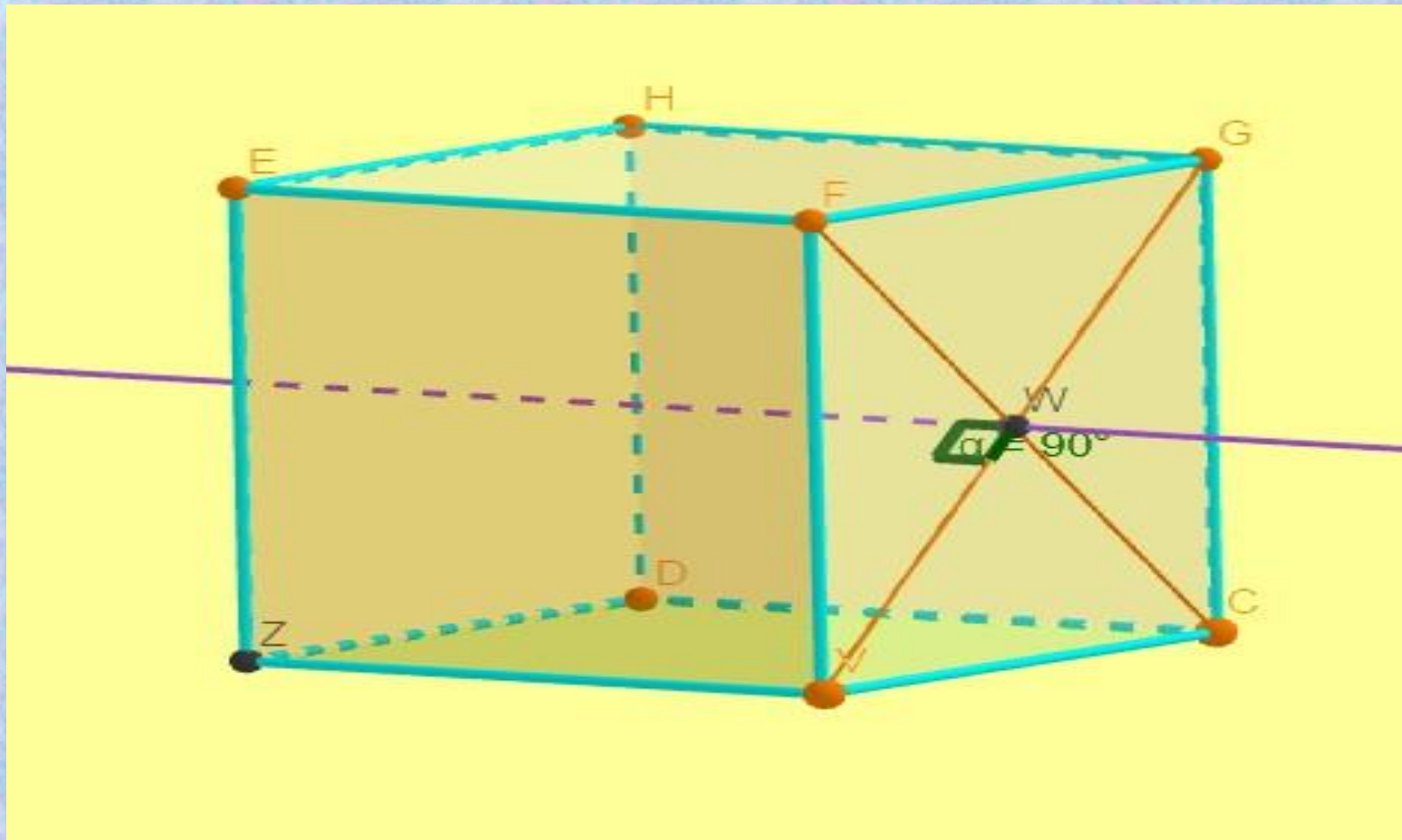


عمود بودن دو خط

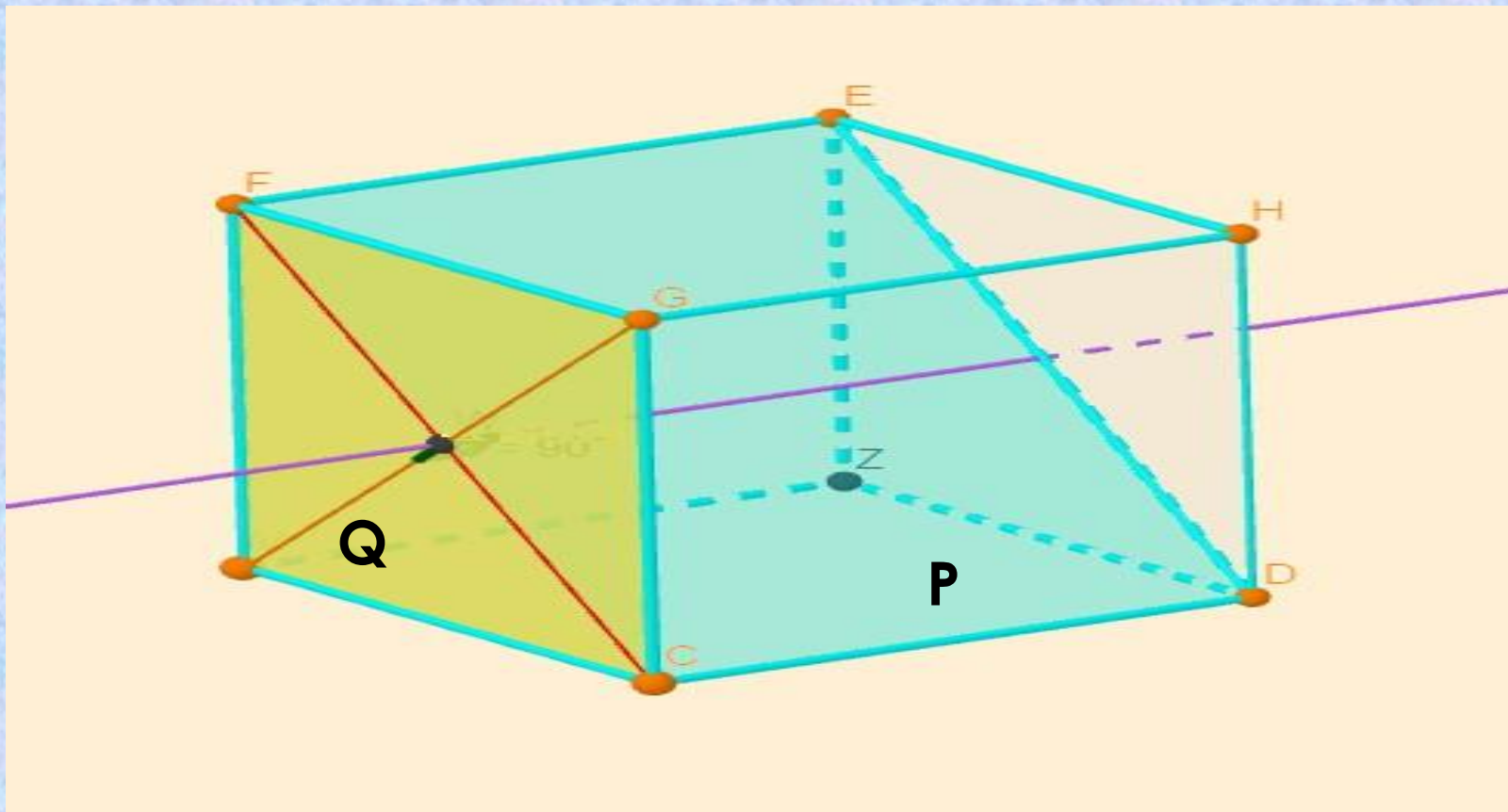


نکته

اگر خطی بر دو خط غیر موازی از صفحه ای عمود است.
باشد بر آن صفحه عمود است.



اگر خطی از صفحه P بر دو خط متقاطع از صفحه Q عمود باشد،
آنگاه صفحه P بر صفحه Q عمود است.





تمرین

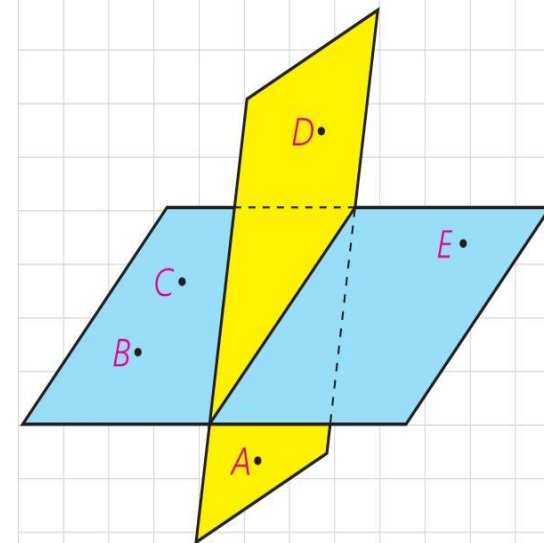
۱- با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید :

الف) چند صفحه در شکل می بینید، نام ببرید. **دو صفحه**
BCE و **صفحه ای که از AD و فصل مشترک می گذرد**
ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه اند. **B,C,E**

ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند. **B,C,E,D**

د) دو خط **AB** و **CE** نسبت به هم چه وضعی دارند؟ **AC** و **CE** چطور؟

متنافر - متنافر

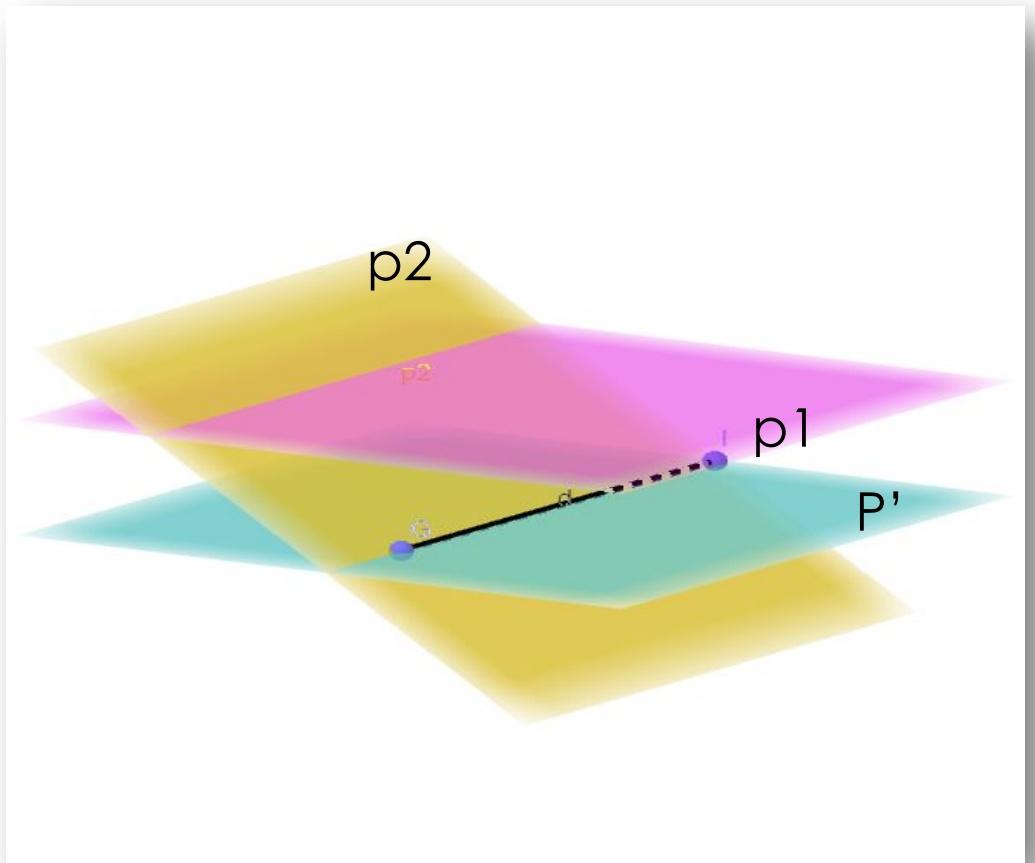


سوال 2 صفحه 84 قسمت الف:

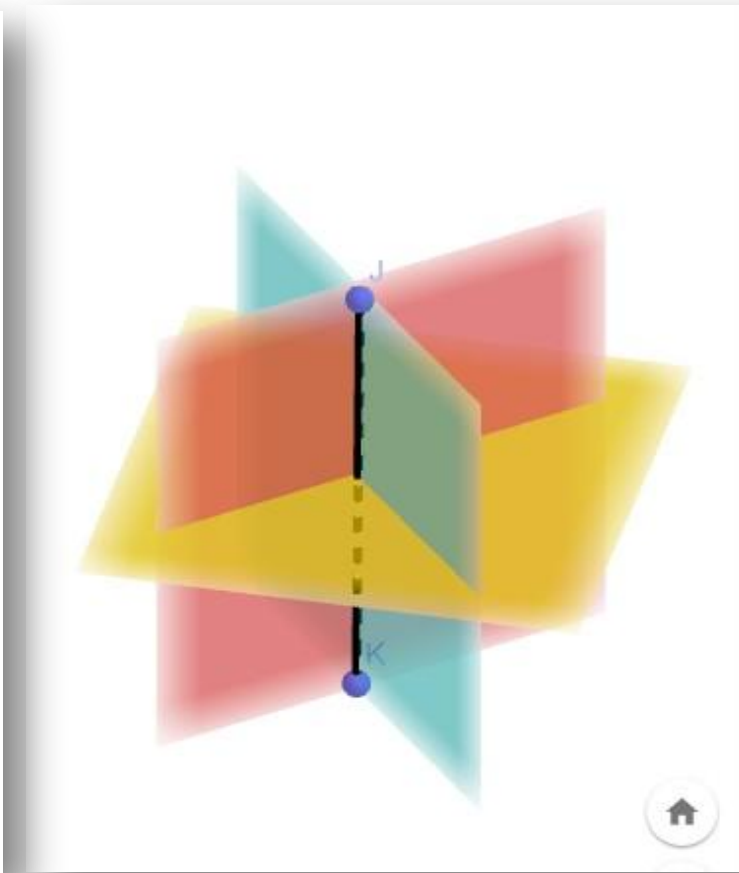
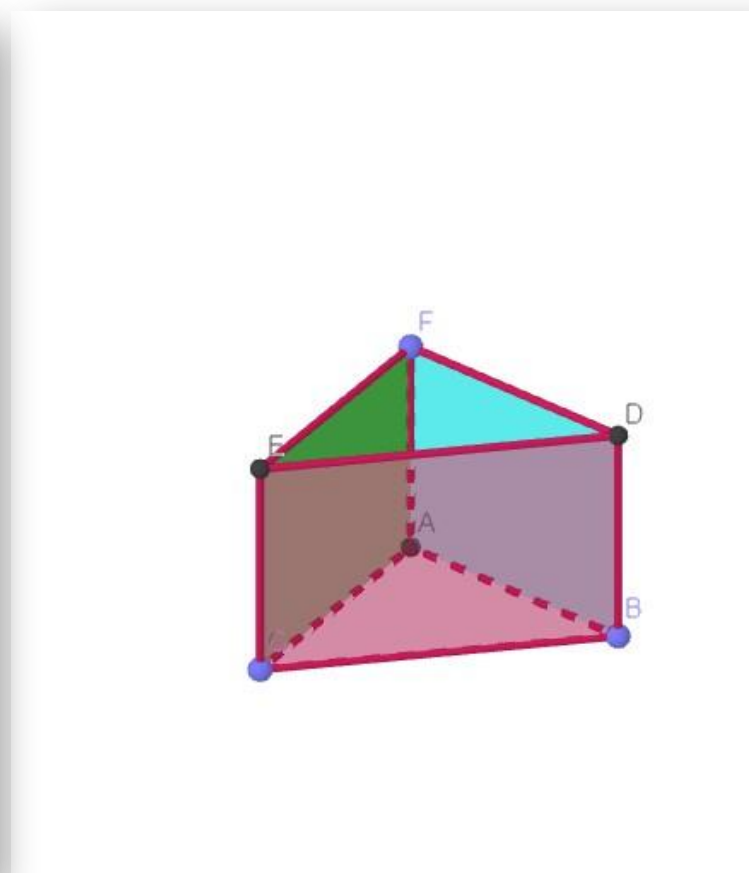
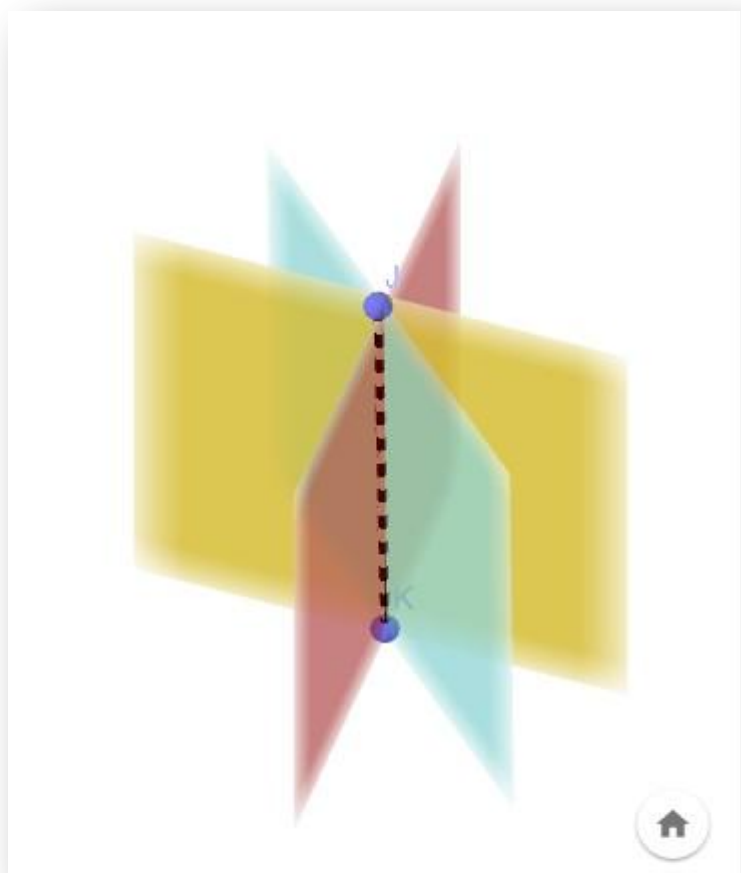
۲- دو صفحه P_1 و P_2 را به گونه ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).

الف) اگر P' صفحه ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت.

ب) اگر P' صفحه ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می تواند داشته باشد.



سوال 2 صفحه 84 حالت های مختلف قسمت ب



۳- شکل زیر یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

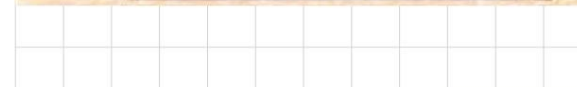
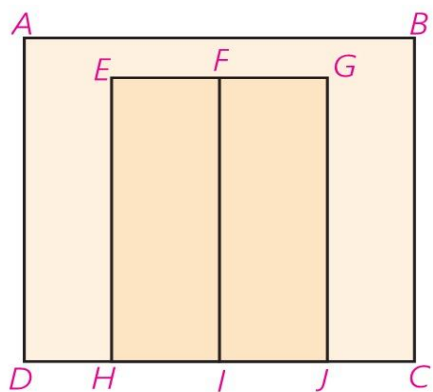
الف) وضعیت صفحات $EFIH$ و $ABCD$ و $FGJI$ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید. $P1, P3$: منطبق - $P2$ با $P3, P1$ موازی

ب) خطوط BC و FI موازی

ج) خطوط AB و FI متناظر

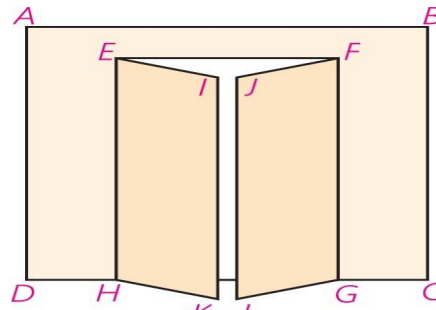
د) خطوط EF و FG منطبق

هـ) خطوط HI و FG موازی





۴- تجسم کنید دو لنگه در هر کدام 30° باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



الف: دو به دو متقاطع

الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و

JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH متقاطع

ج) خط JL و صفحه EIKH موازی

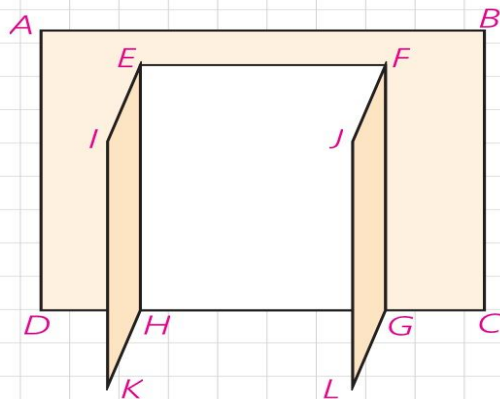
د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

ه) خطوط EI و JF متقاطع

و) خطوط EI و FG متناظر

ز) خطوط BC و FJ متناظر

د: خط EH روی دو صفحه EIKH, ABCD قرار دارد و با صفحه JFGL موازی است



۵- تصور کنید دو لنگه در هر کدام 90° باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی

کنید.

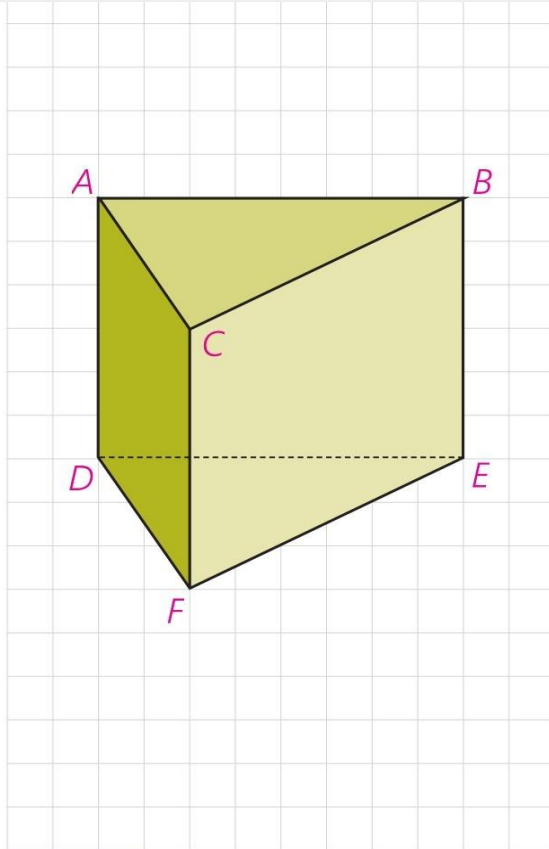
ABCD و IEHK متقاطع
ABCD و JFGL متقاطع
IEHK و JFGL موازی

ب) خط FJ و صفحه EIKH موازی

ج) خط JL و صفحه EIKH موازی

د) خطوط EI و FJ موازی

ه) خطوط HK و FJ موازی



۶- منشور سه پهلوی روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

الف) سه جفت خط متمایز دو به دو موازی نام ببرید. AD, BE, CF

ب) سه جفت خط متمایز دو به دو متناظر نام ببرید. EF, AB, CD

ج) سه جفت خط دو به دو متقاطع نام ببرید. AC, BC, AB

د) سه خط هم‌رس نام ببرید. AC, AB, AD

ه) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید.

و) دو صفحه موازی نام ببرید. DEF, ABC

ز) سه صفحه دو به دو متقاطع نام ببرید. $ACFD, BCFE, ABC$

خط‌های AB, AC, BC و صفحه DEF

۷- از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط می توان به آن صفحه عمود کرد؟
 یک و تنها یک خط می توان عمود کرد

۸- از هر خط غیر واقع بر یک صفحه، چند صفحه می توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

الف) خط بر صفحه عمود باشد. بی شمار صفحه
 ب) خط بر صفحه عمود نباشد. فقط یک صفحه

۹- دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد موازی است

۱۰- دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه R چه وضعیتی دارد؟ عمود است

