Замечательны

СОДЕРЖАНИЕ

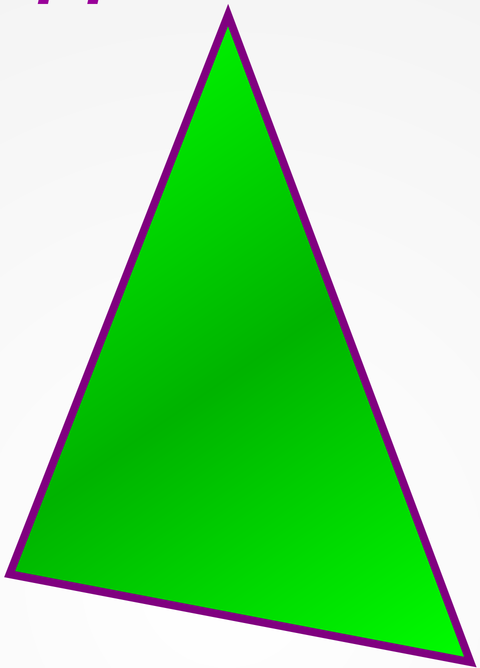
Ортоцен
тр

Точка пересечения медиан

Точка пересечения биссектрис

Точка пересечения серединных перпендикуляров

Точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника



Точка Торричелли

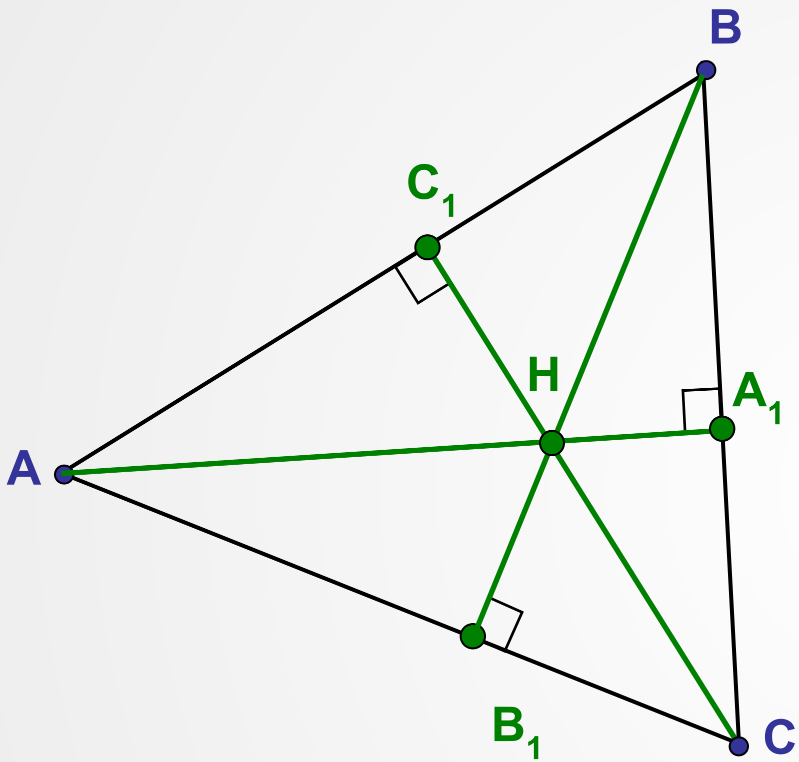
Прямая Симпсона

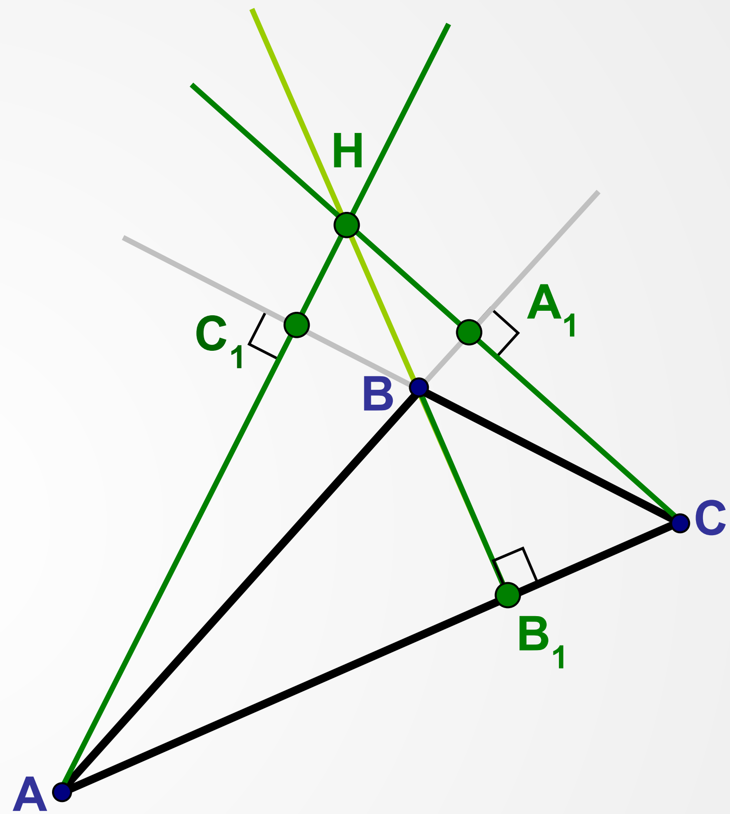
Окружность Эйлера

Прямая Эйлера

Точки Фейербаха

Ортоцентр треугольника

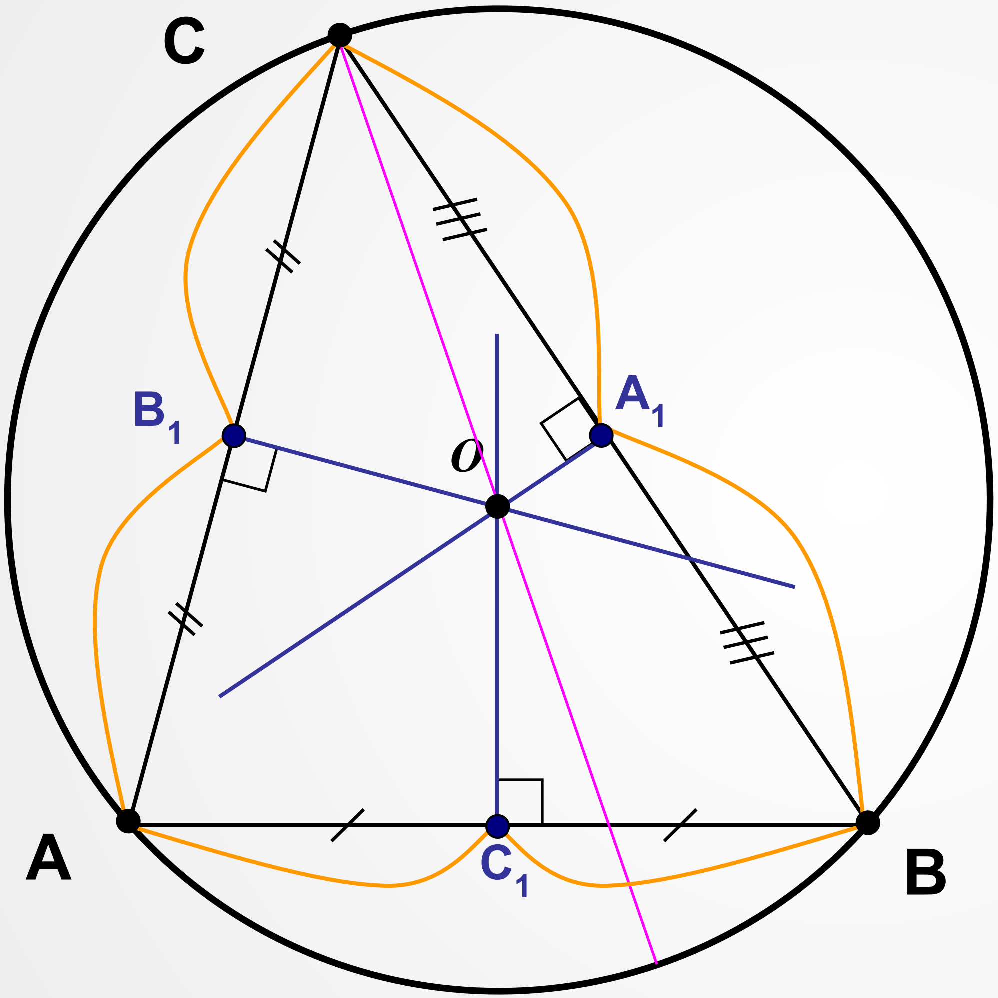


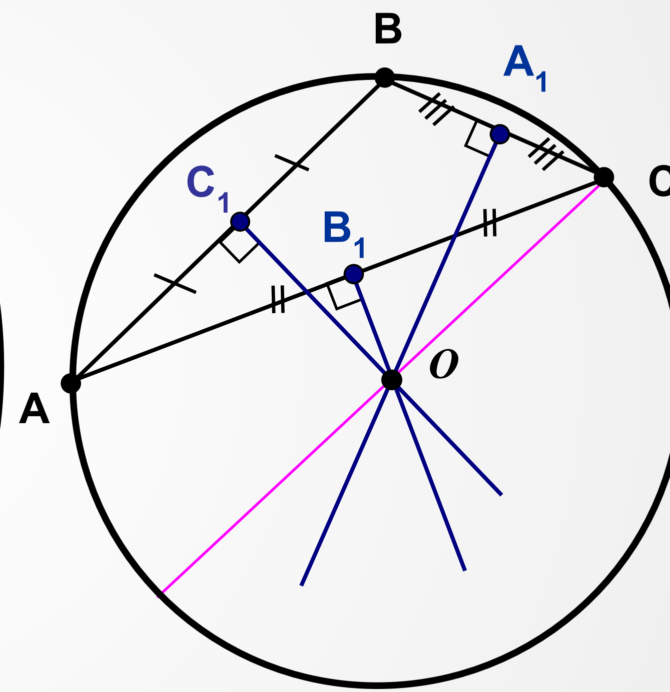


A_1, B_1, C_1 – основания высот ΔABC;

H – ортоцентр ΔABC

Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника

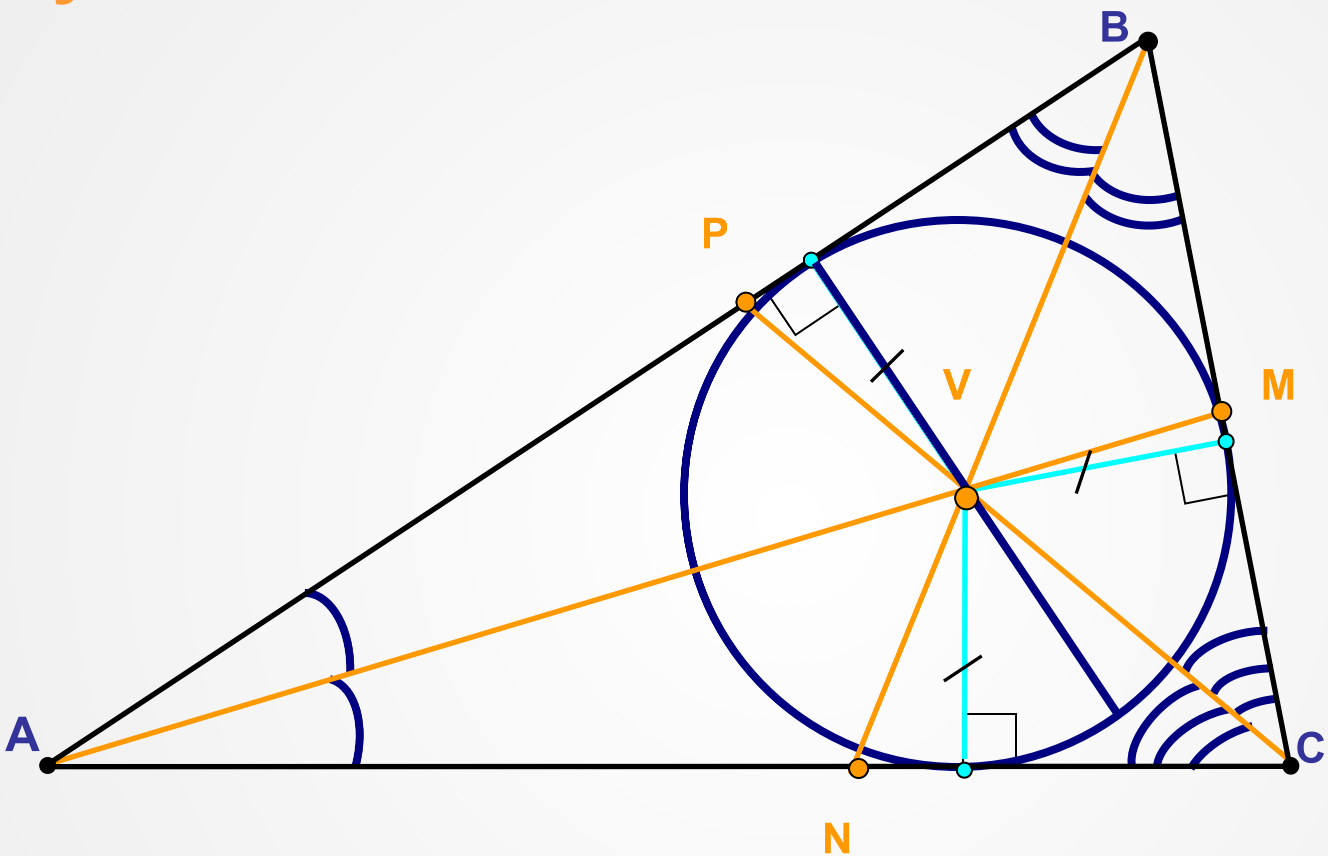




A_1, B_1, C_1 – основания серединных перпендикуляров к сторонам ΔABC;

O – центр окружности, описанной около ΔABC

Точка пересечения биссектрис треугольника



M, N, P – основания биссектрис ∆ABC;

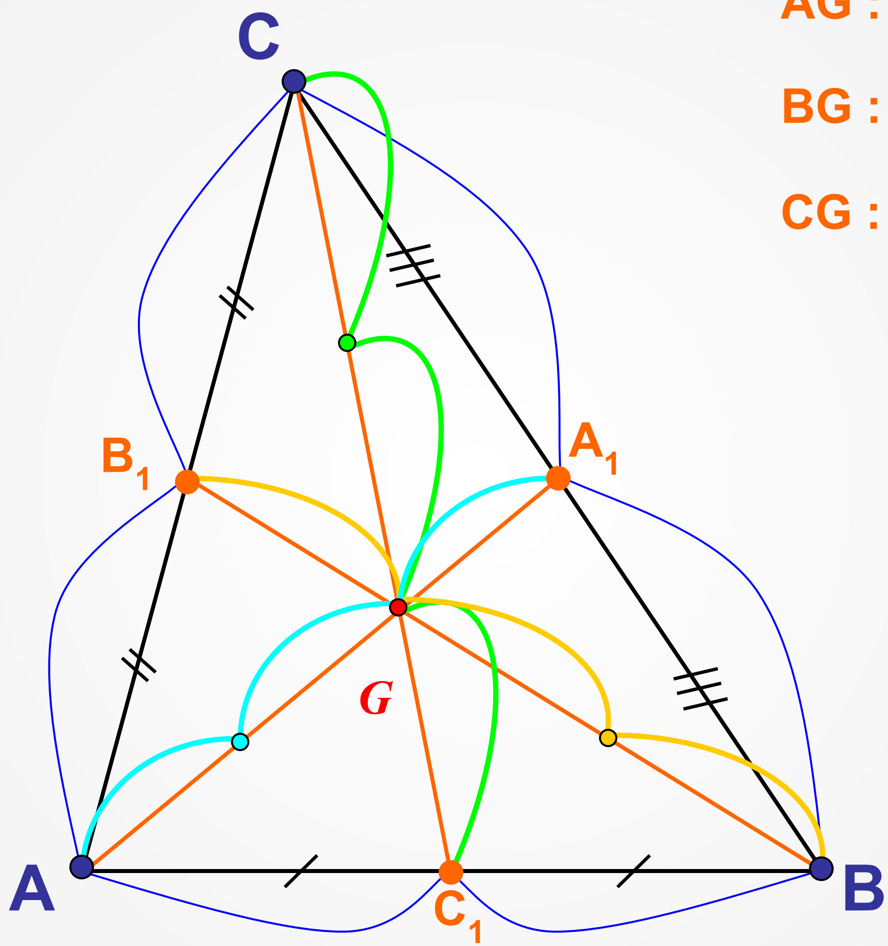
V – центр окружности, вписанной в ∆ABC

Точка пересечения медиан треугольника

$AG : GA_1 = 2 : 1$

$BG : GB_1 = 2 : 1$

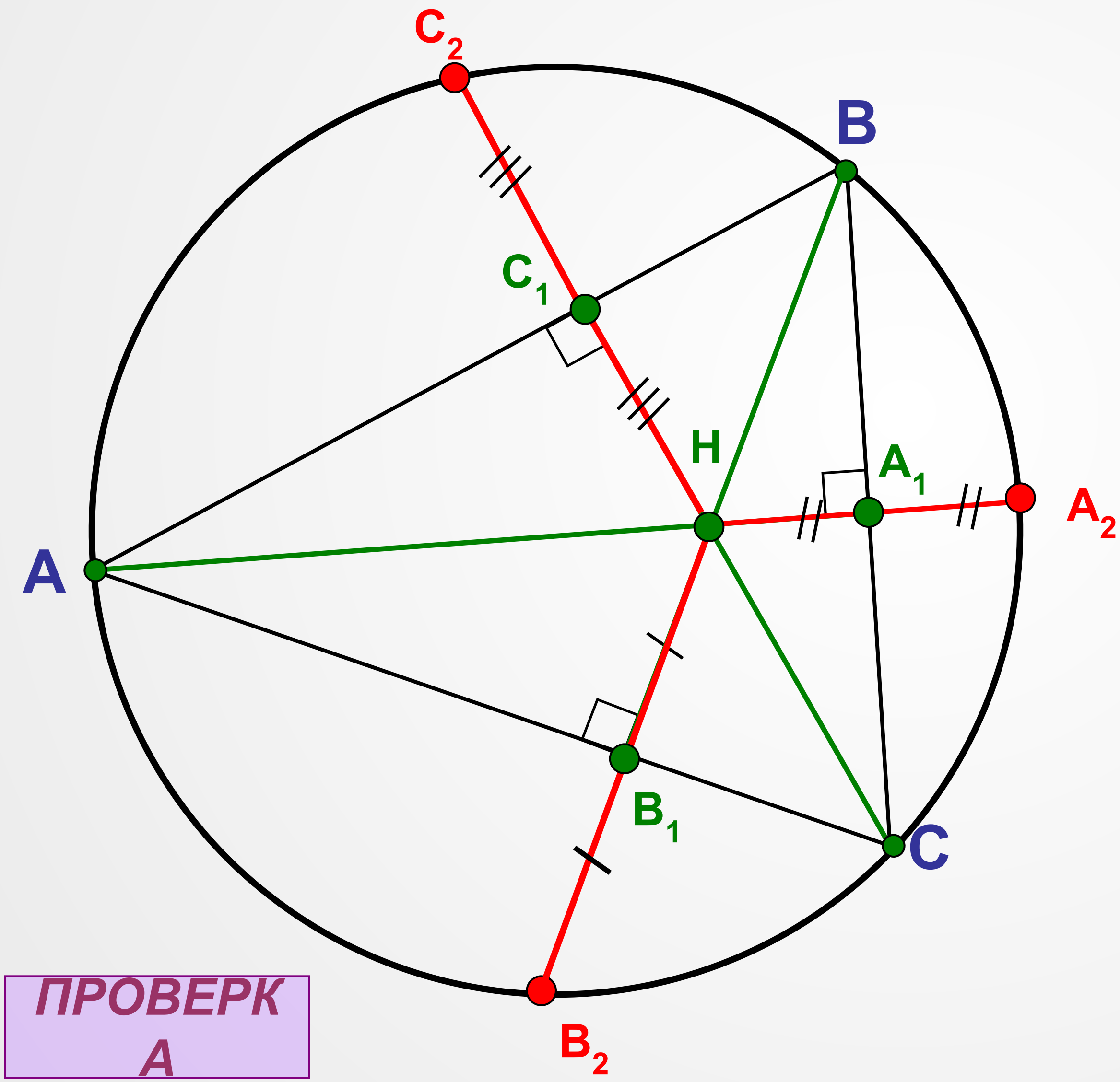
$CG : GC_1 = 2 : 1$



A_1, B_1, C_1 – основания медиан ΔABC;

т.G – точка пересечения медиан треугольника ΔABC.

Точки, симметричные ортоцентру относительно сторон остроугольного треугольника



A_1, B_1, C_1 – основания высот;

H – ортоцентр ΔABC

A_2, B_2, C_2– точки, симметричные т.H относительно сторон ΔABC

Лежат ли точки

A, A_2, B, B_2, C, C_2

на одной окружности?

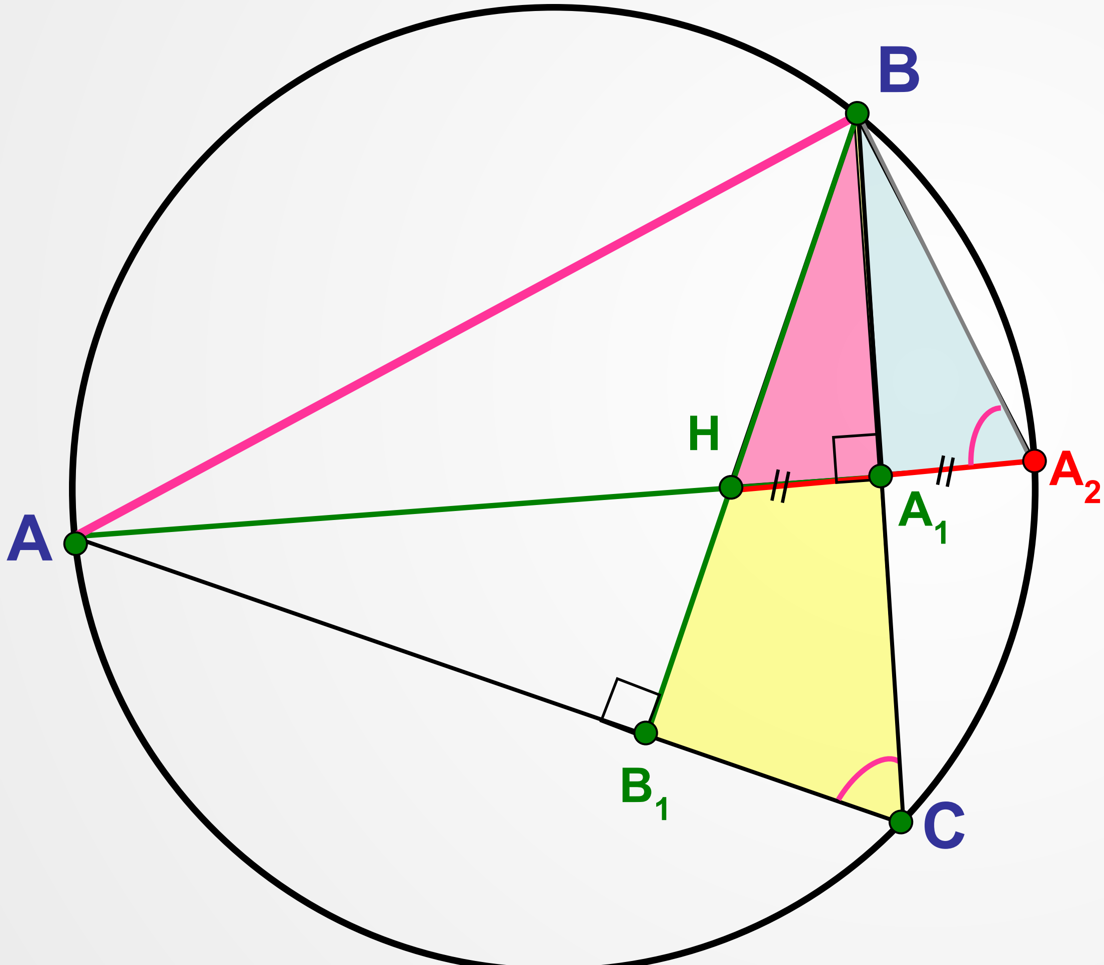
ПРОВЕРКА

Доказательство

Точки, симметричные ортоцентру относительно сторон остроугольного треугольника

Доказательство:

Докажем, что т.A_2 лежит на окружности, описанной около остроугольного ΔABC



1. Проведем отрезок BA_2.
2. $\Delta A_1HB = \Delta A_1A_2B$;
3. $\Delta A_1HB \sim \Delta B_1CB$;
4. Из 2. и 3.: $\Delta A_1A_2B \sim \Delta B_1CB$;
5. Из 4. : $\angle A_1A_2B = \angle B_1CB$;
6. Эти углы равны и опираются на отрезок AB;
7. Сл-но, $\angle A_1A_2B$ и $\angle B_1CB$ вписаны в одну окружность с хордой AB, а значит т.A_2 принадлежит окружности, описанной около Δ**ABC.**

H – ортоцентр ΔABC

A_2 – точка, симметричная т.H относительно стороны BC

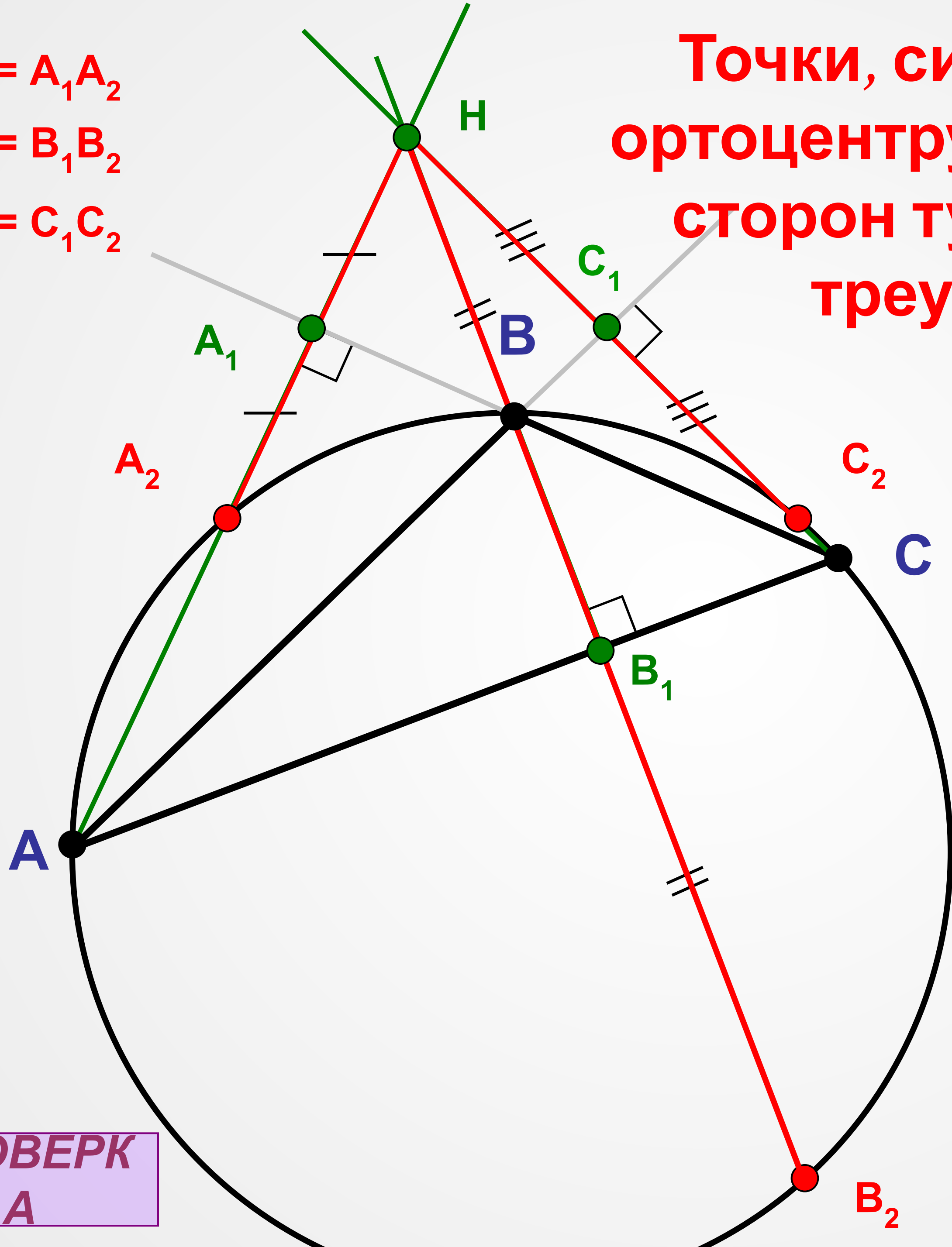
Ч.Т.Д.

Точки, симметричные ортоцентру относительно сторон тупоугольного треугольника

$HA_1 = A_1A_2$

$HB_1 = B_1B_2$

$HC_1 = C_1C_2$



Лежат ли точки

A, A2, B, B2, C, C2

на одной окружности?

ПРОВЕРКА

Доказательство

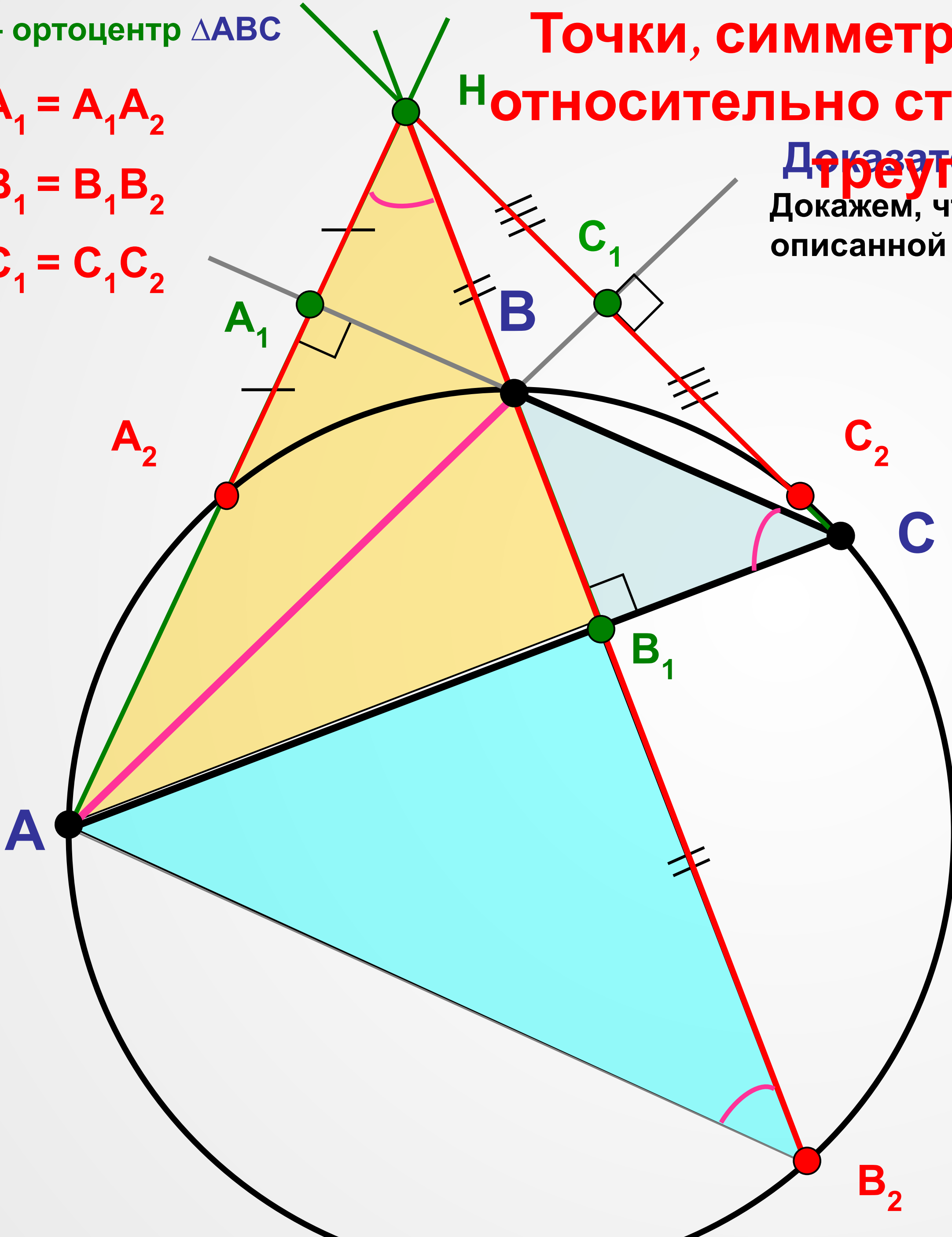
Точки, симметричные ортоцентру относительно сторон тупоугольного треугольника

H – ортоцентр ΔABC

$HA_1 = A_1A_2$

$HB_1 = B_1B_2$

$HC_1 = C_1C_2$



Доказательство:

Докажем, что т. B_2 лежит на окружности, описанной около тупоугольного ΔABC.

1. Проведем отрезок AB_2.

2. $\Delta AHB_! = \Delta AB_2B_1$;

3. $\Delta AHB_1 \sim \Delta BCB_1$ (т.к. $\Delta BHA_1 \sim \Delta BCB_1$, а следовательно, $LA_1HB = LBCB_1$);

4. Из 2. и 3. следует: $\Delta AB_2B_1 \sim \Delta BCB_1$;

5. Из 4. следует: $L\ AB_2B = L\ ACB$;

6. Эти углы равны и опираются на AB;

7. Сл-но, LAB_2B и $LACB$ вписаны в одну окружность с хордой AB, а значит, т. B_2 принадлежит окружности, описанной около ΔABC.

Ч.Т.Д.

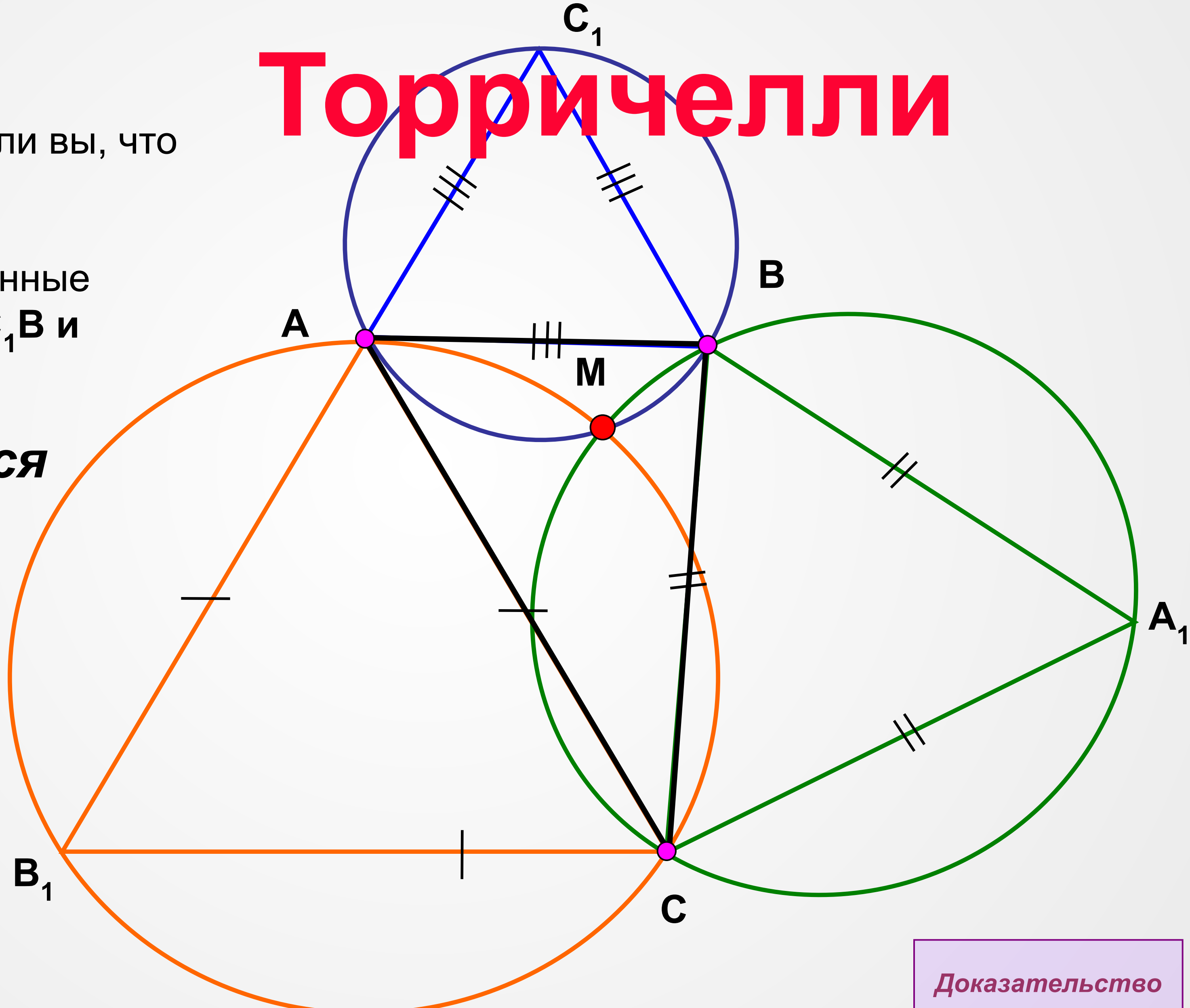
Точка Торричелли

Построим на сторонах ΔABC равносторонние треугольники.

Верите ли вы, что

окружности, описанные около ΔAB_1C, ΔAC_1B и ΔBA_1C,

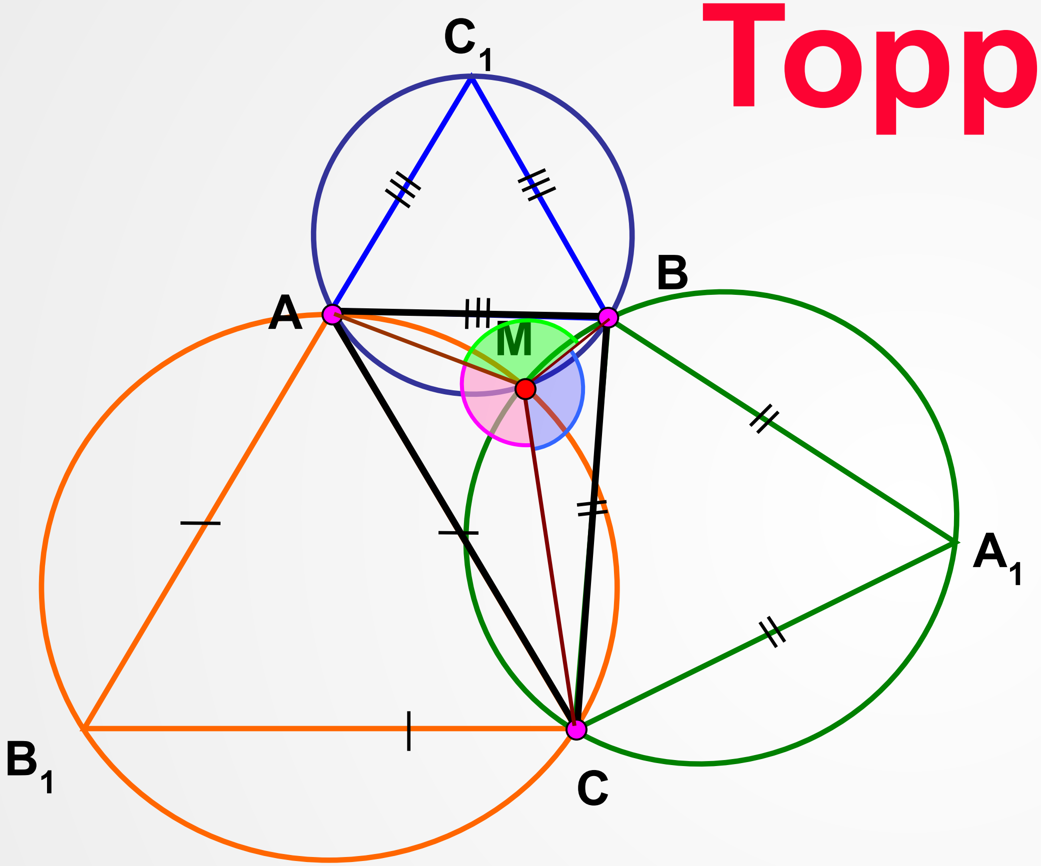
пересекаются в одной точке?



ПРОВЕРКА

Доказательство

Точка Торричелли



Доказательство:

1. Построим окружности описанные около ΔAB_1C и ΔA_1BC.

2. L AMC=120^0

?

3 L BMC=120^0.

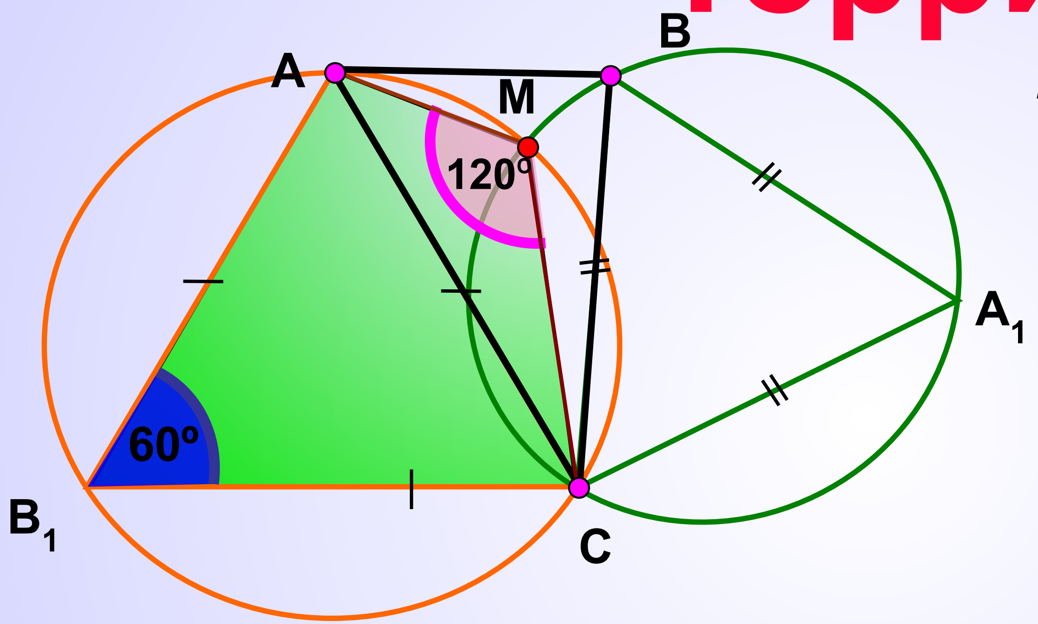
4. Следовательно, L AMB=120^0.

5. LAMB + LACB =180^0.Значит, т. M лежит на окружности, описанной около ΔC_1AB.

ч.т.д.

Точка Торричелли

Доказательство:



L AMC=120^0

?

1. Четырехугольник АМСВ$_1$ – вписан в окружность. Следовательно, сумма его противоположных углов равна 180º.

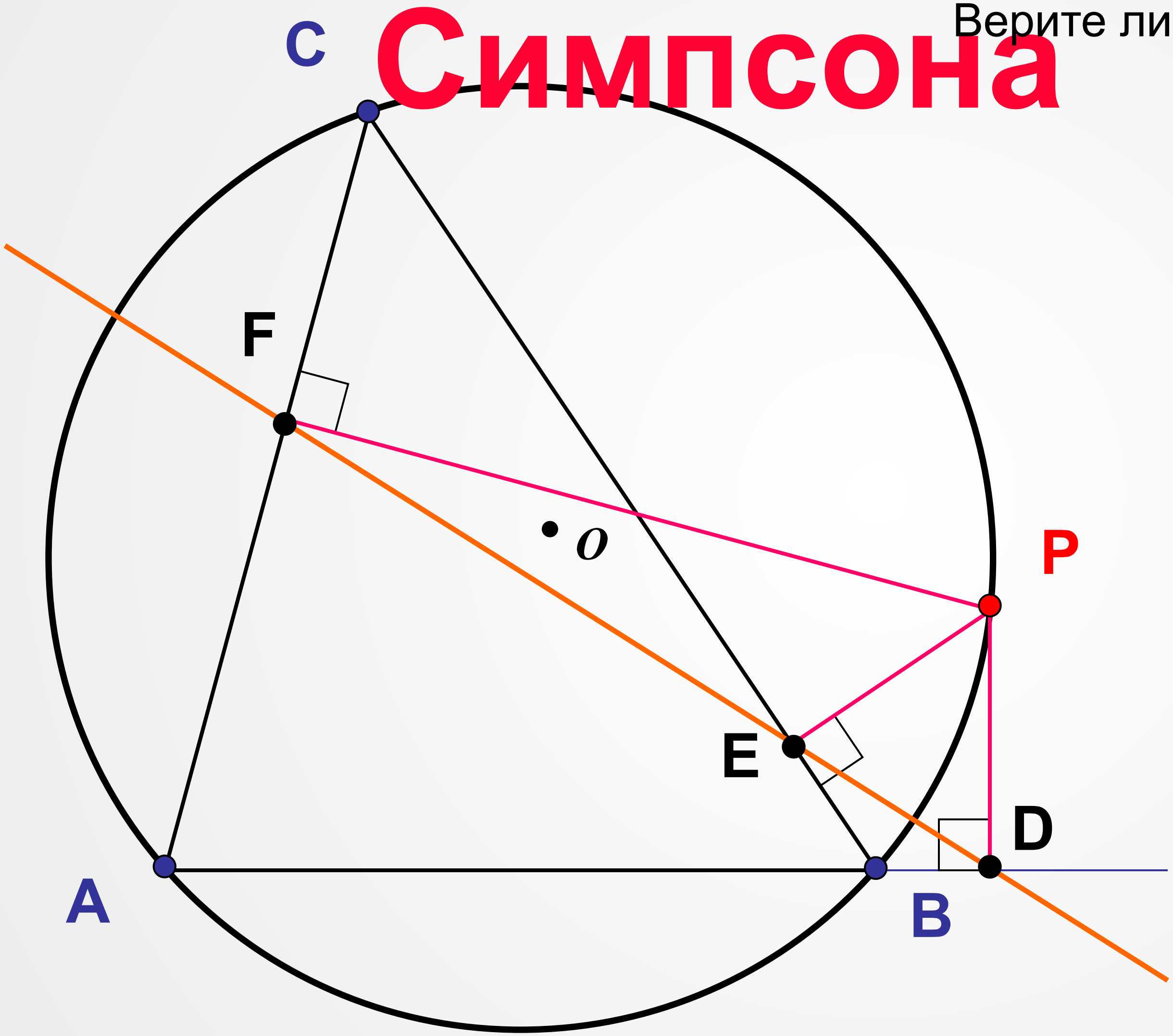
2. Т.е. *LAB_1C + LAB_1C = 180º*

3. LAB_1C = 60º

4. Сл-но, LAB_1C = 180º - 60º = 120º.

Прямая Симпсона

Верите ли вы, что



В произвольном ΔABC

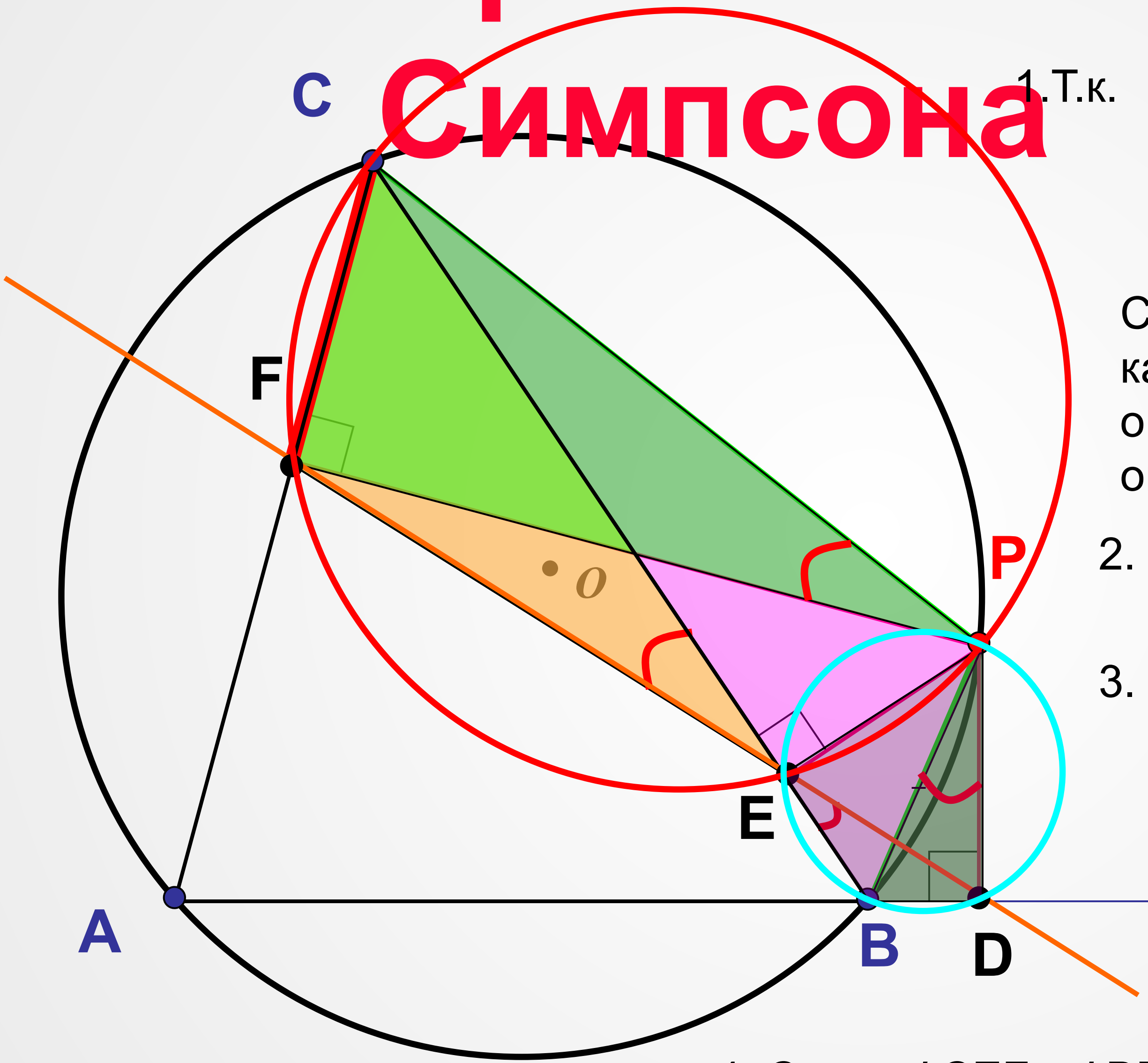
основания перпендикуляров, опущенных из любой точки описанной около него окружности на три стороны треугольника

лежат на одной прямой?

ПРОВЕРКА

Доказательство

Прямая Симпсона



Доказательство:

1.Т.к. ∠CFP = ∠CEP = 90º,

то около четырехугольника CFEP можно описать окружность.

Следовательно, ∠CEF = ∠CPF как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности.

2. ∠CPF =90º - ∠PCF=
=90º - ∠DBP = ∠BPD.

?

3. Т.к. ∠BEP = ∠BDP = 90º,

То около четырехугольника BEPD можно описать окружность.

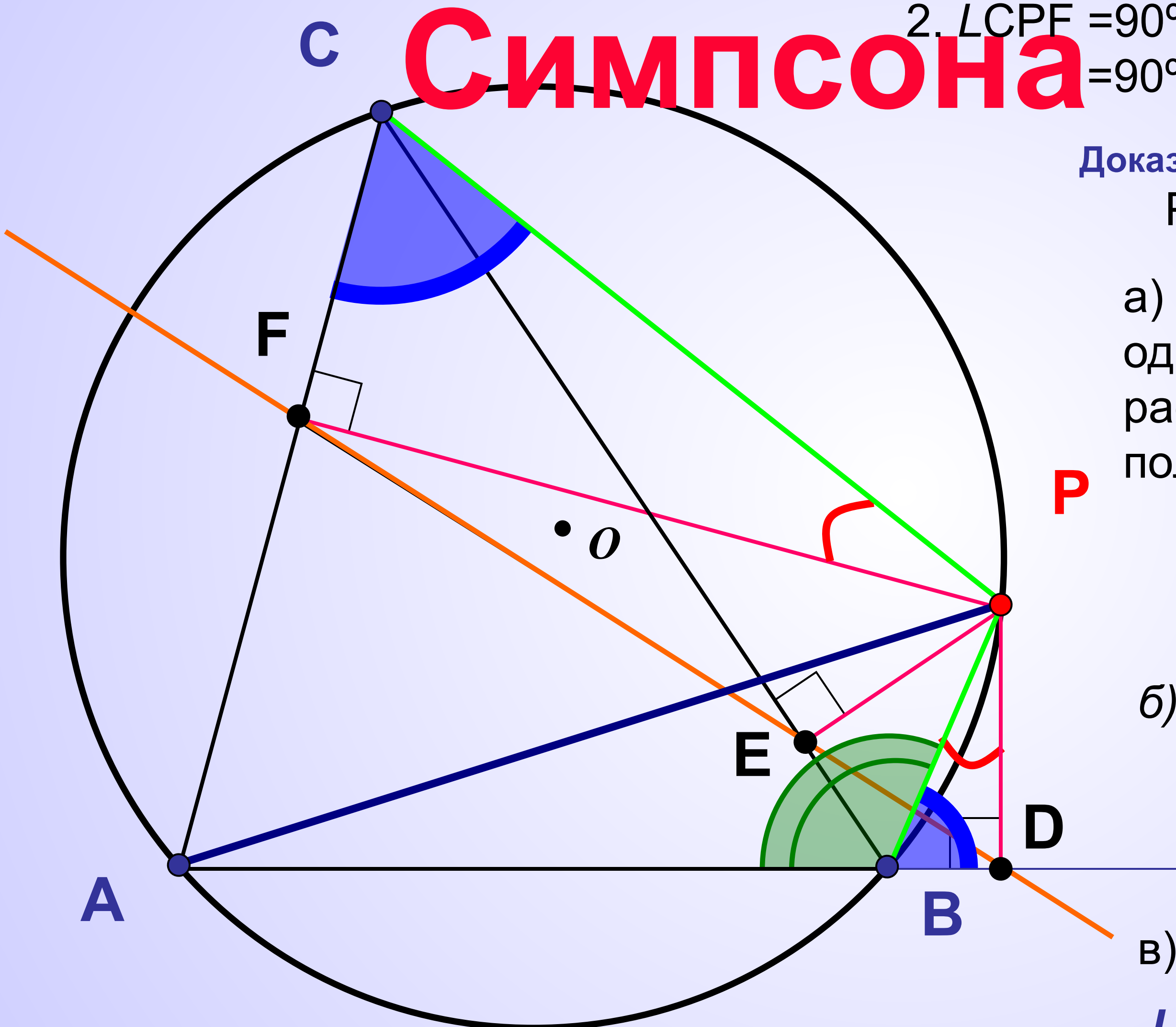
Поэтому ∠BPD = ∠BED.

4. Сл-но, ∠CEF = ∠BED.

5. Значит, точки D, E, F – лежат на одной прямой. Ч.Т.Д.

Прямая Симпсона

2. *L*CPF =90º - *L*PCF=
=90º - *L*DBP = *L*BPD.



Доказательство:

Рассмотрим *L*PCA и *L*ABP.

а) Эти углы опираются на одну хорду AP, их вершины расположены в разных полуплоскостях от AP.

Следовательно,

*L*PCA =**180º - *L*ABP.**

*б) L*ABP и *L*DBP – смежные.

Следовательно,

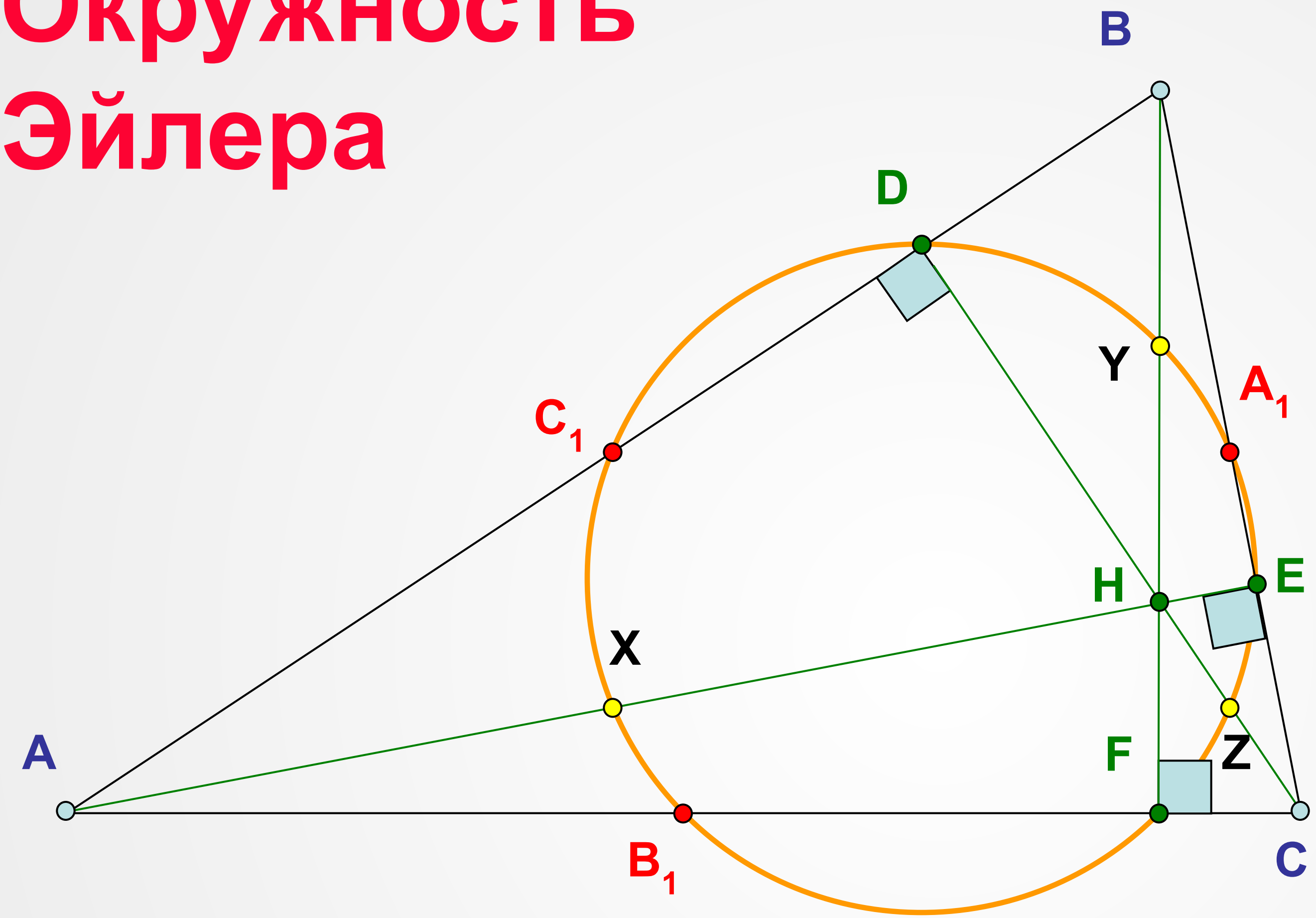
*L*DBP = **180º - *L*ABP**

в) Значит, *L*PCA = *L*DBP, т.е.

***L*PCF = *L*DBP**

Следовательно, *L*CPF =90º - ***L*PCF**=90º - ***L*DBP** = *L*BPD.

Окружность Эйлера



Верите ли вы, что

В произвольном ΔABC:

- середины его сторон A_1, B_1 , C_1;

- основания его высот **D**, **E**, **F**;

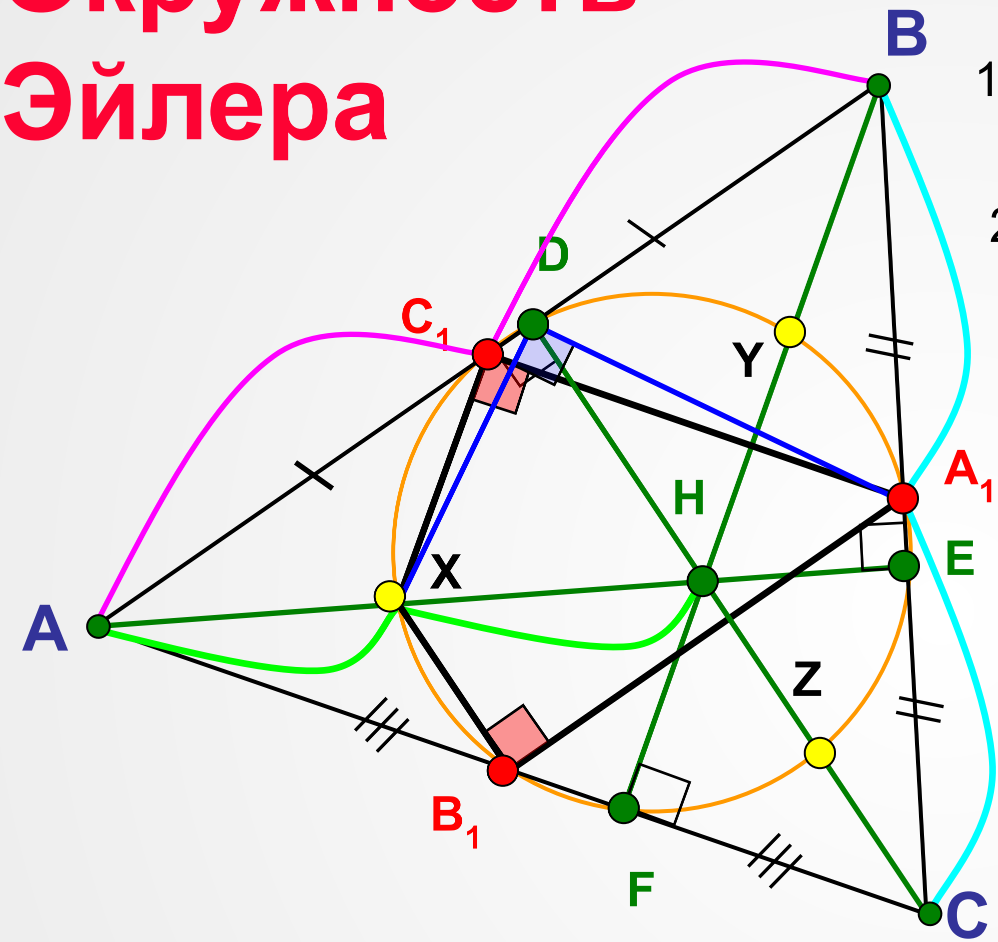
- середины отрезков AH,BH,CH – точки **X,Y,Z**

лежат на одной окружности?

ПРОВЕРКА

Доказательство

Окружность Эйлера



Доказательство:

1. Т.к. $AC_1=C_1B$ и $AX=XH$, то $C_1X \parallel BF$.

2. Т.к. $BA_1=A_1C$ и $A_1C=C_1B$, то $A_1C_1 \parallel AC$.

3. Т.к. $BF \perp AC$, то $C_1X \perp A_1C_1$.

4. Аналогично, $B_1X \perp A_1B_1$.

5. Следовательно точки C_1, A_1, B_1, X – лежат на одной окружности.

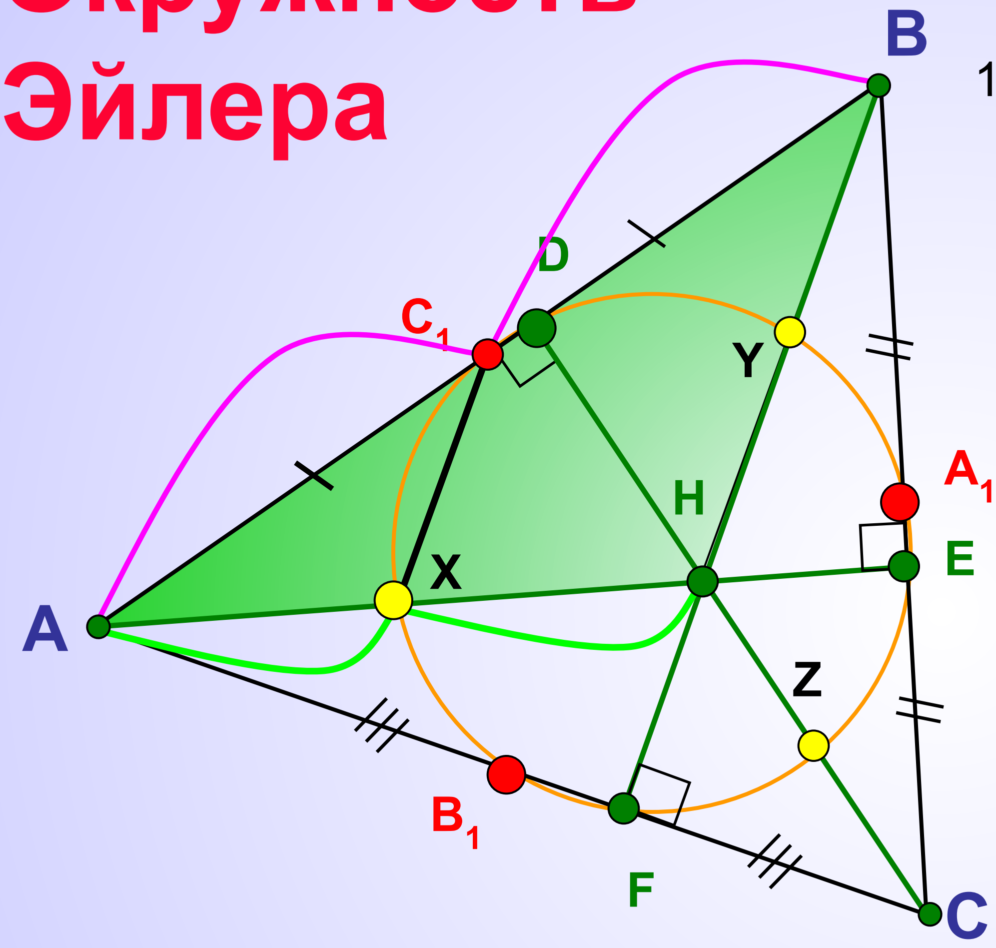
6. Т.К. $XD \perp DA_1$, то X, D, A_1, B_1 лежат на одной окружности.

7. Следовательно, точки X и D лежат на одной окружности, описанной около $\Delta A_1B_1C_1$.

8. Аналогично доказывается, что точки Y, E и Z, F лежат на этой окружности.

Ч.Т.Д.

Окружность Эйлера

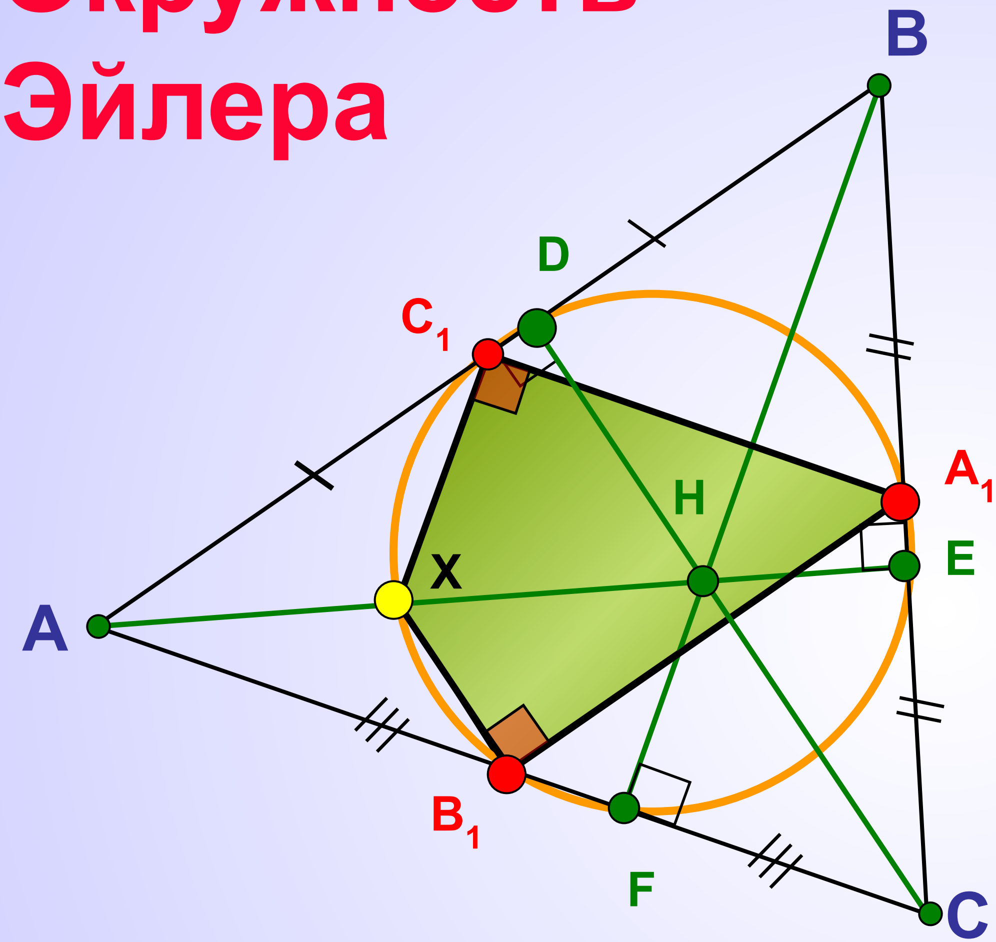


1. Т.к. $AC_1=C_1B$ и $AX=XH$, то $C_1X \parallel BF$

В ΔABH XC_1.- средняя линия.

Следовательно, $C_1X \parallel BF$.

Окружность Эйлера



Точки C_1, A_1, B_1, X – лежат на одной окружности.

Доказано, что

$C_1X \perp A_1C_1$ и $B_1X \perp A_1B_1$

Следовательно, в четырехугольнике $A_1B_1XC_1$.сумма противоположных углов равна *180º*

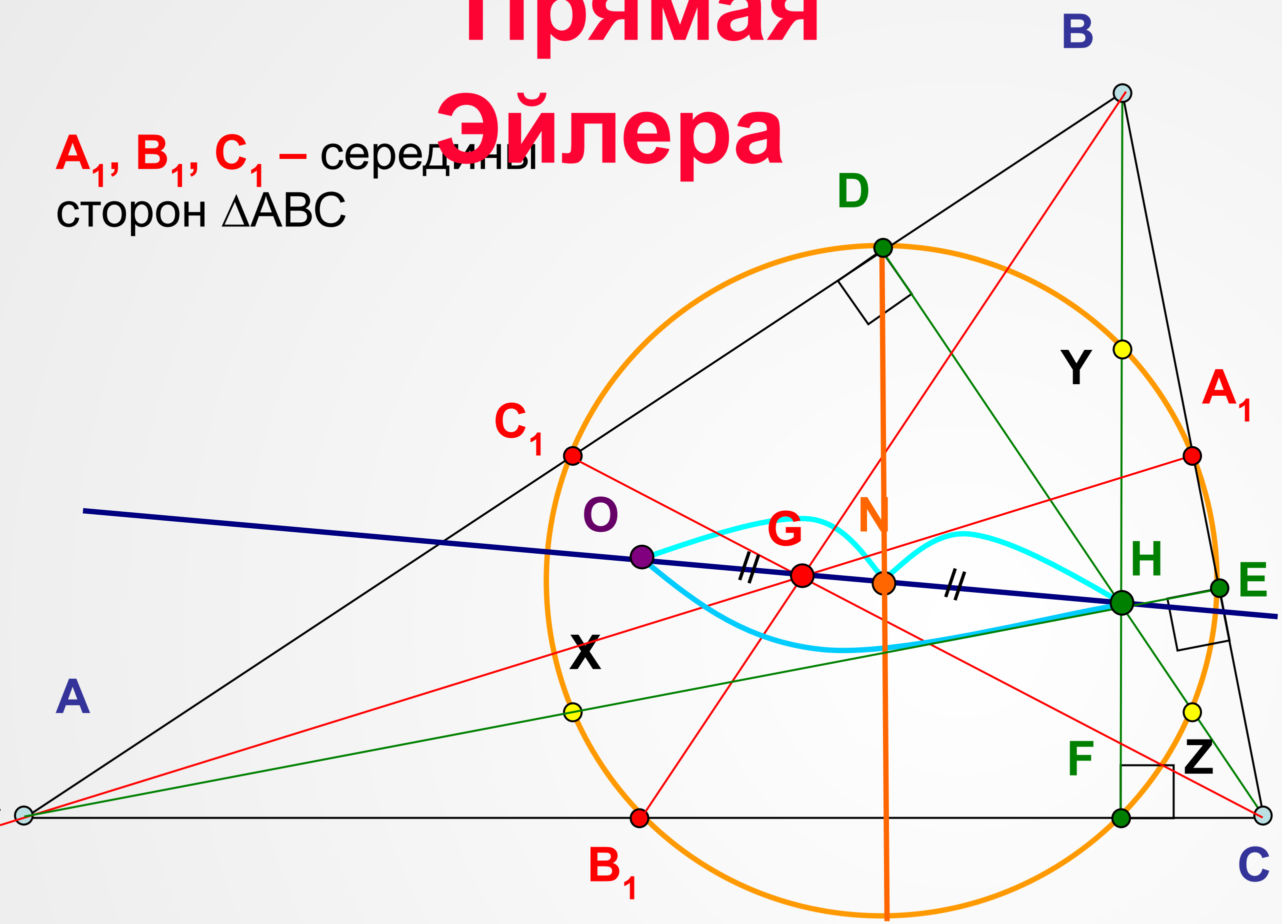
Т.е. $LA_1C_1X + LA_1B_1X = 180^o$

Следовательно, вокруг четырехугольника $A_1B_1XC_1$.можно описать окружность.

Следовательно точки C_1, A_1, B_1, X – лежат на этой окружности.

Прямая Эйлера

A_1, B_1, C_1 – середины сторон ΔABC



Верите ли вы, что

В произвольном ΔABC:

- ортоцентр **H**,
- центр тяжести **G**,
- центр описанной около ΔABC окружности т.**O**

лежат на одной прямой?

ПРОВЕРКА

Доказательство

Прямая Эйлера

Дано:

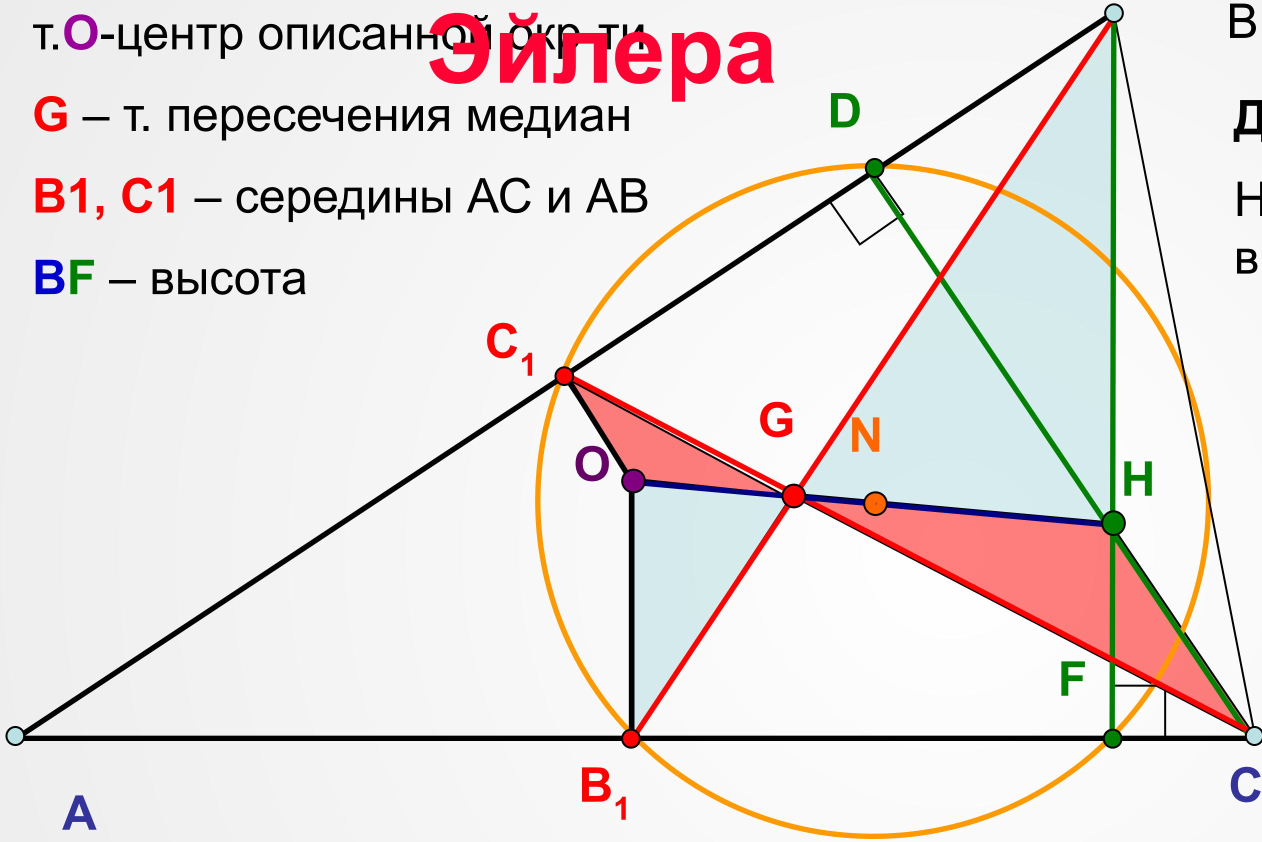
Пусть в Δ**ABC**

т.**O**-центр описанной окр-ти

G – т. пересечения медиан

B1, C1 – середины АС и АВ

BF – высота



Пусть т.**H** - т.пресечения прямой OG с высотой BF.

Докажем, что

H – точка пересечения высот.

Доказательство:

1.Т.к. BF II OB_1,

то $\Delta BGH \sim \Delta B_1GO$.

?

2. **Сл-но HG:GO=BG:GB_1=2:1,**

?

3. **$CG:GC_1$= 2:1. Значит, $CG:GC_1$=HG:GO.** Сл-но, $\Delta CGH \sim \Delta C_1GO$.

4. Поэтому *L*GHC = *L*GOC_1, а значит CHIIOC_1, а $OC_1 \perp$ AB.

5. Сл-но CH $\perp$ AB, т.е. CD – высота ΔABC.

6. Значит т.Н – точка пересечения высот.

Ч.Т.Д.

Прямая Эйлера

Дано:

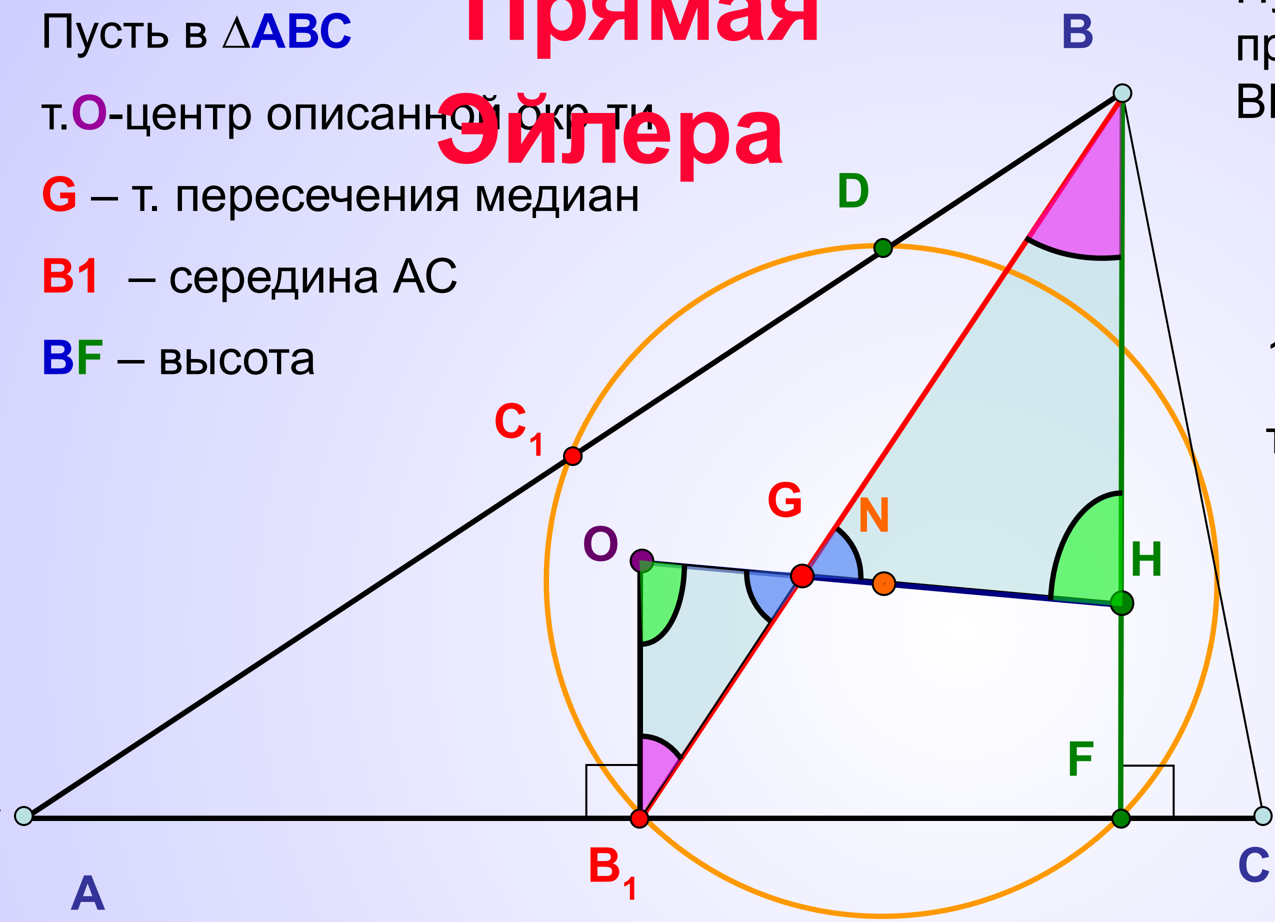
Пусть в ΔABC

т.O-центр описанной окр-ти

G – т. пересечения медиан

B1 – середина AC

BF – высота



Пусть т.H - т.пресечения прямой OG с высотой BF.

Доказательство:

1.Т.к. BF II OB_1,

то $\Delta BGH \sim \Delta B_1GO$.

1. O –центр описанной окружности, B_1 – середина AC.

   Сл-но, $OB_1 \perp AC$.

2. $OB_1 \perp AC$,

   $BF \perp AC$.

   Сл-но, BF II OB_1

3. Т.к. BF II OB_1, а $\angle BGH$ и $\angle B_1GO$ – вертикальные, то соответственные углы ΔBGH и ΔB_1GO равны.

Сл-но треугольники $\Delta BGH \sim \Delta B_1GO$.

Дано:

Пусть в Δ**ABC**

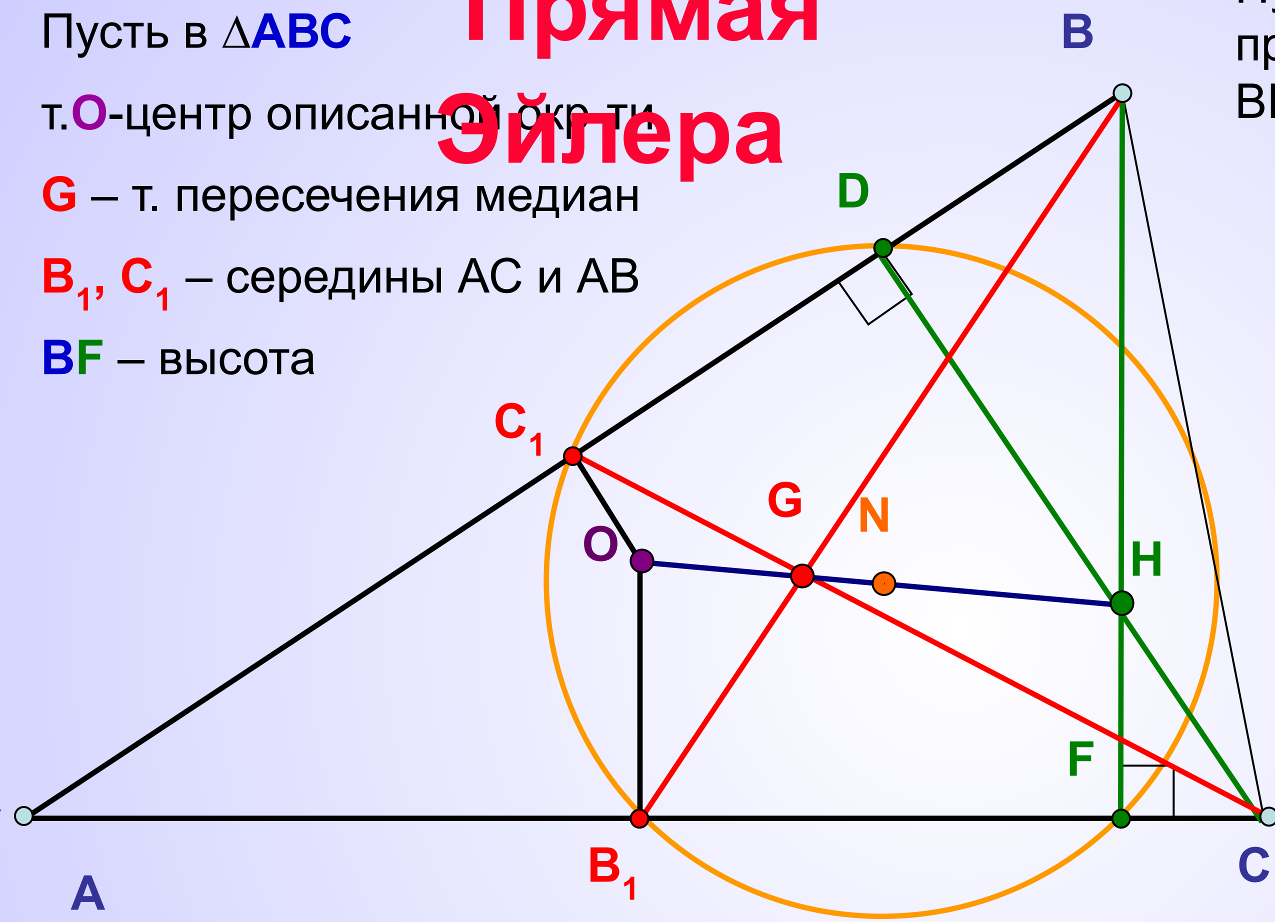
т.**O**-центр описанной окр-ти

G – т. пересечения медиан

B$_1$, C$_1$ – середины AC и AB

BF – высота

Прямая Эйлера



Пусть т.**H** - т.пресечения прямой OG с высотой BF.

2. **HG:GO=BG:GB$_1$=2:1, CG:GC$_1$=HG:GO.**

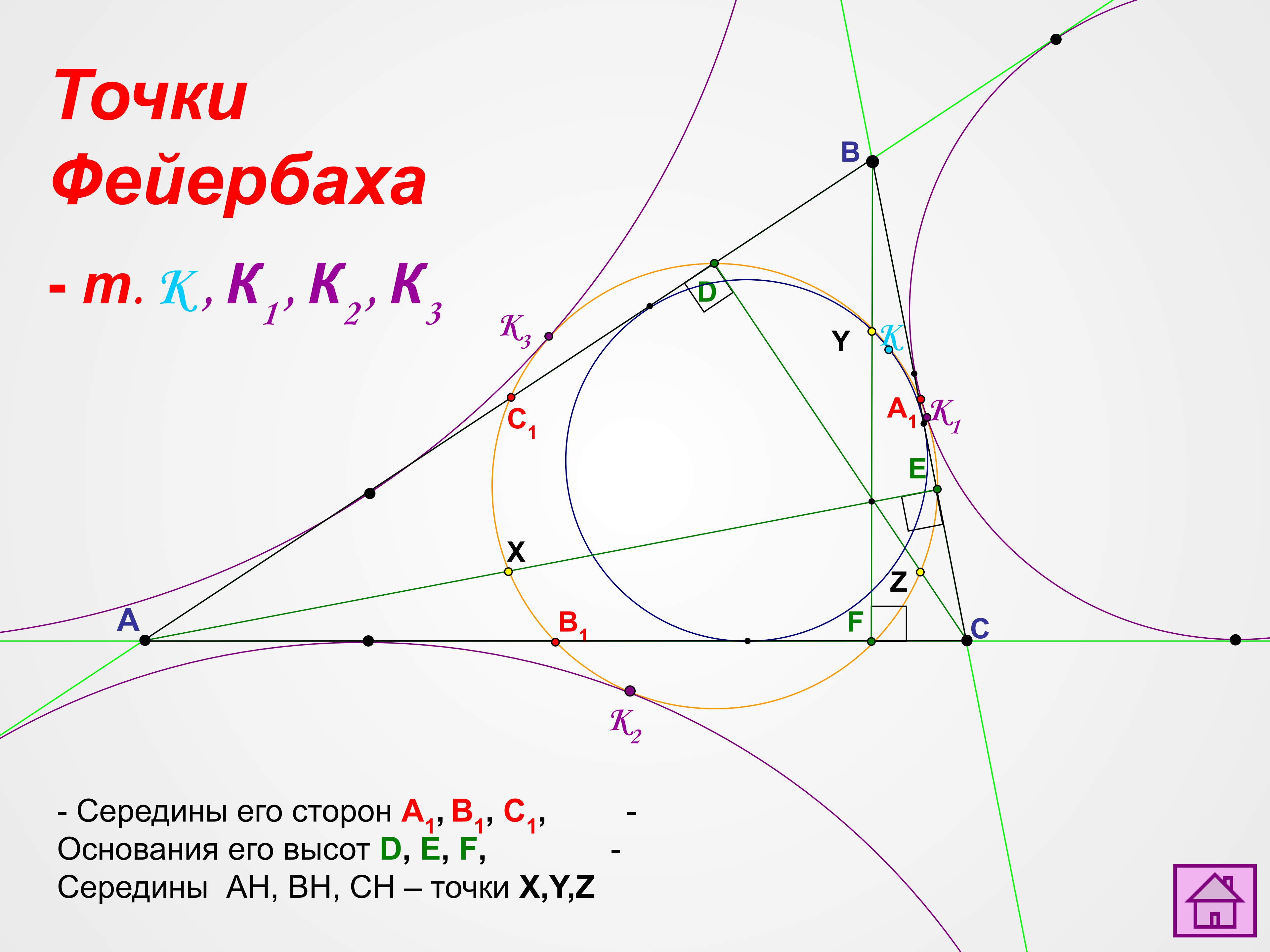
?

BG:GB$_1$=1:2, т.к.

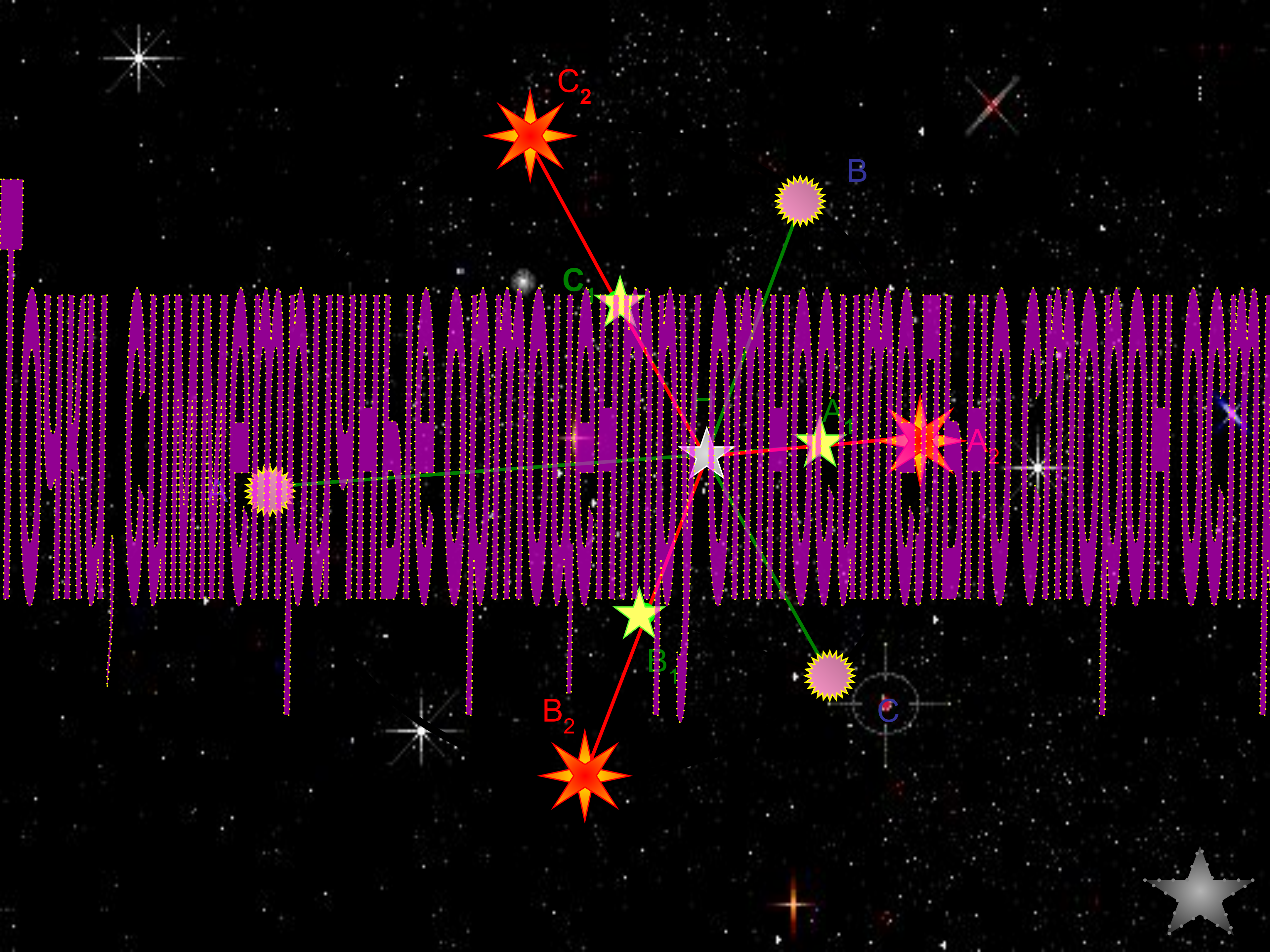
т. G – точка пересечения медиан BB$_1$ и CC$_1$ ΔABC , а значит делит медианы треугольника в отношении 2:1, считая от вершины.

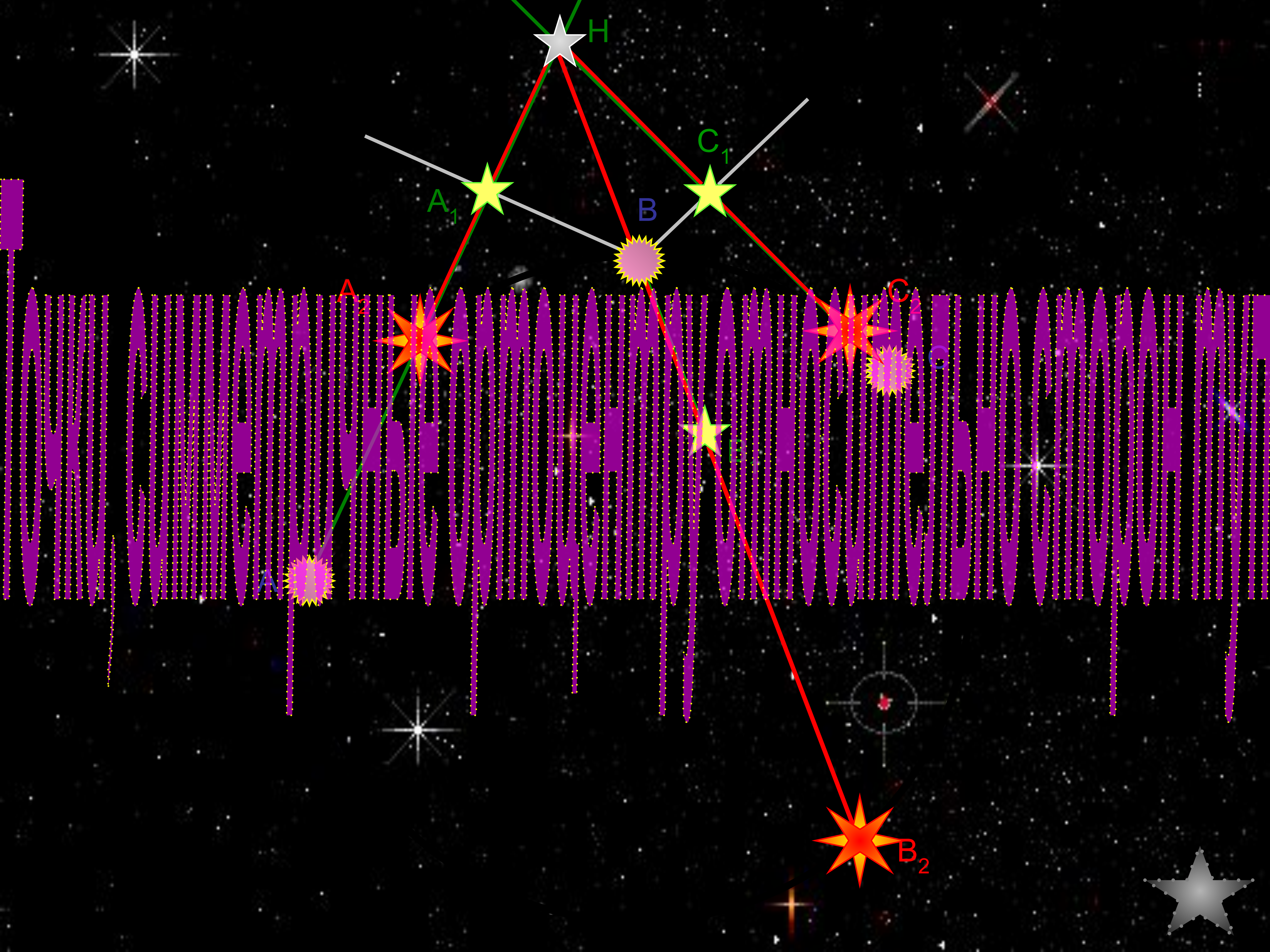
Точки Фейербаха

- т. $\mathcal{K}$, K_1, K_2, K_3

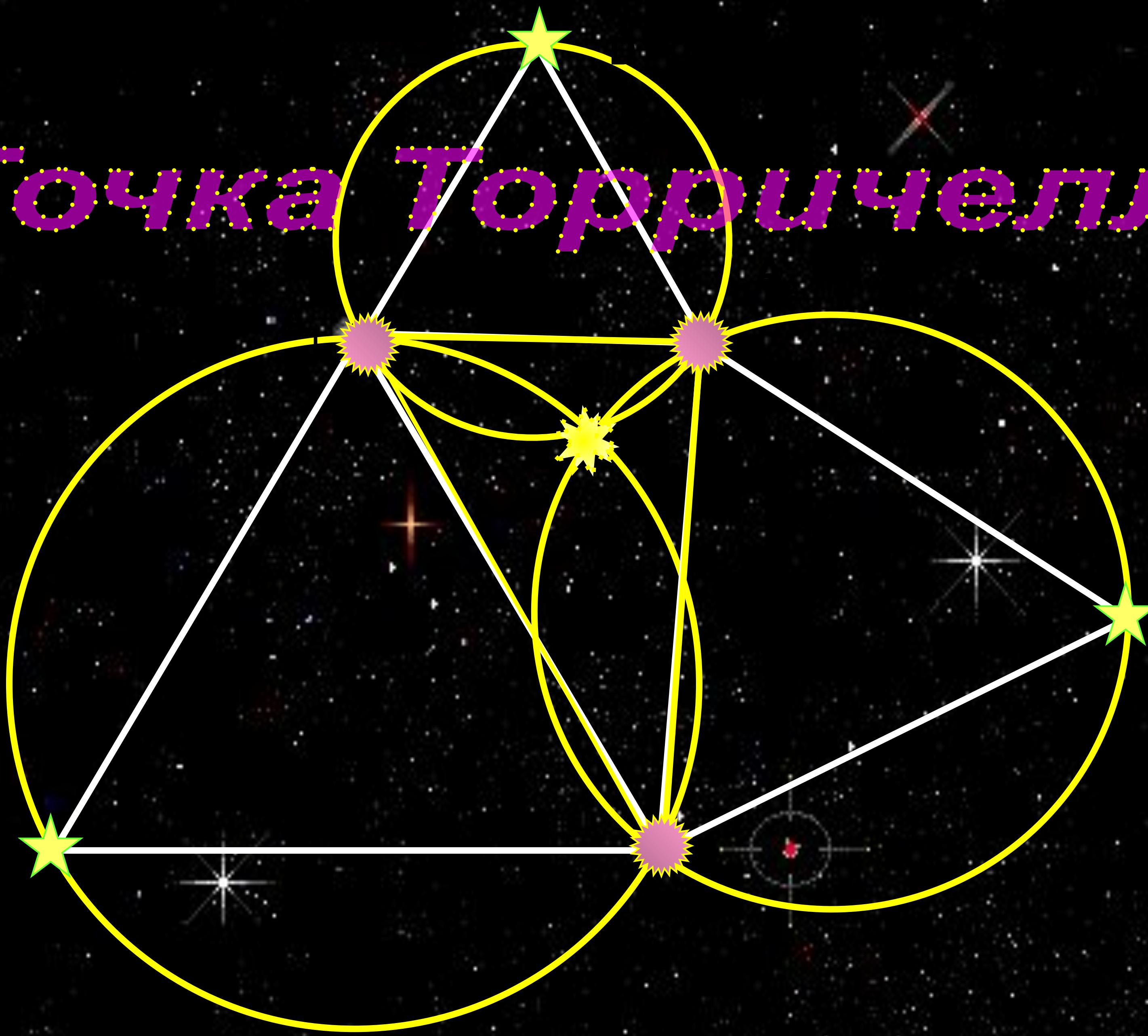


- Середины его сторон A_1, B_1, C_1, -
Основания его высот D, E, F, -
Середины AH, BH, CH – точки **X,Y,Z**

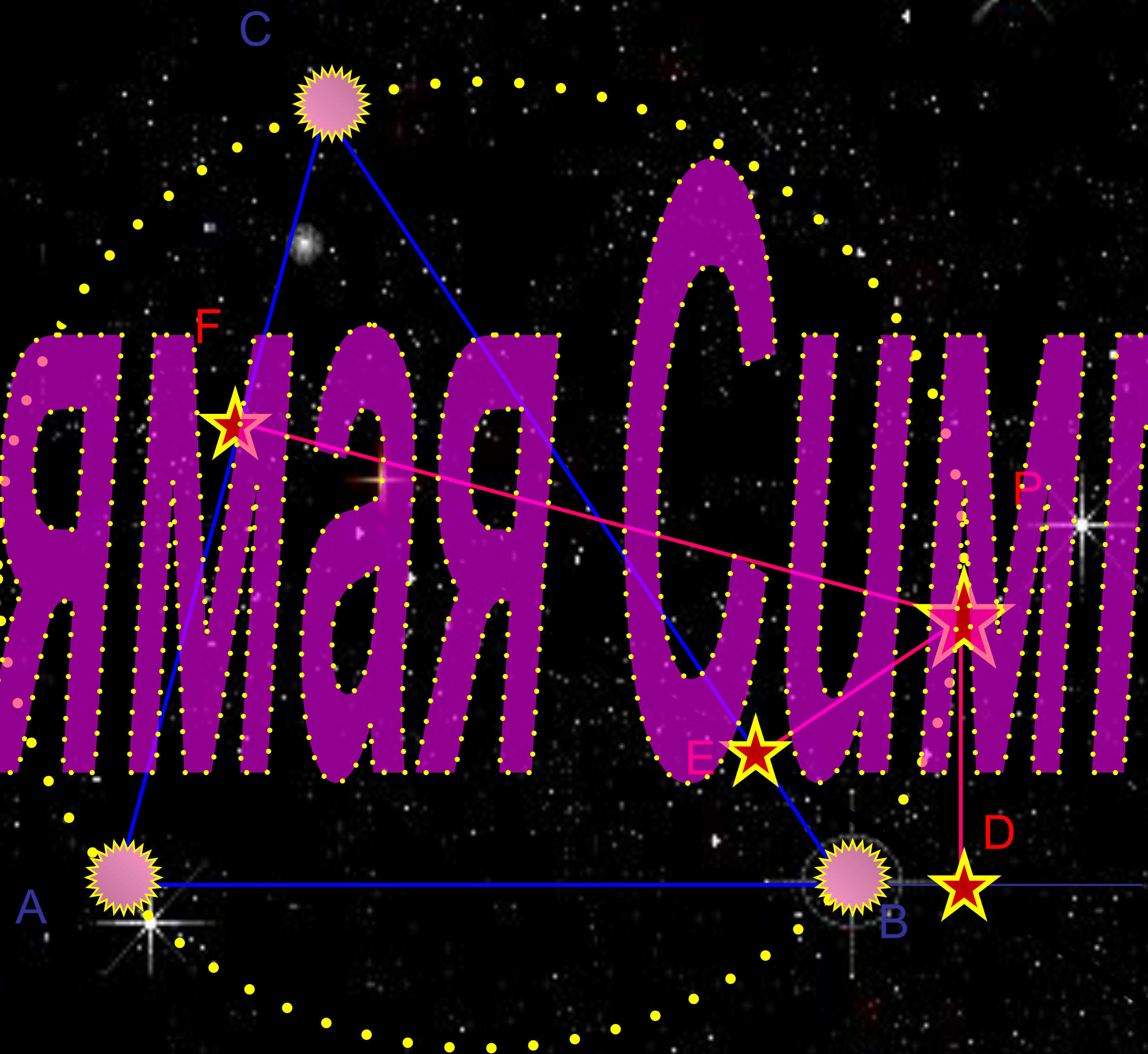

Точки, симметричные ортоцентру относительно сторон ост
C_2
B
C_1
H
A_1
A_2
A
B_1
B_2
C


H
A1
B
C1
A2
C2
B2

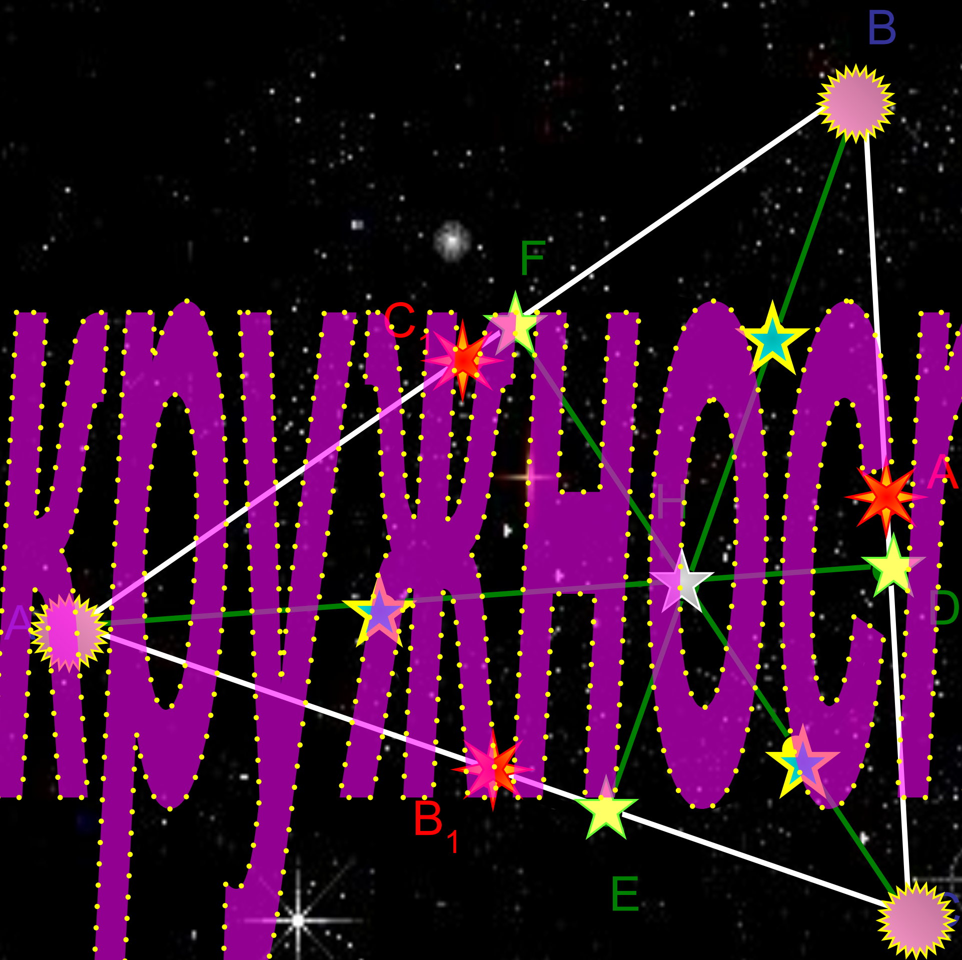
Точка Торричелли



Прямая Симпсо



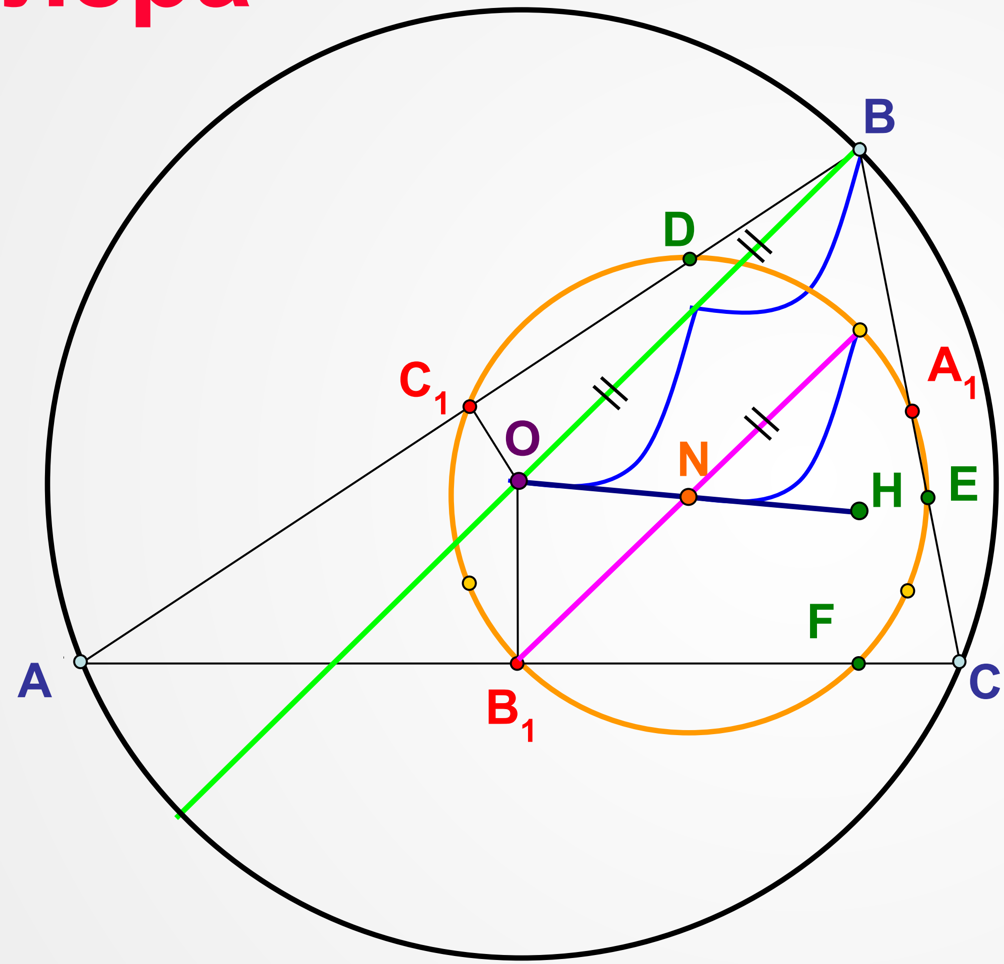
Окружность Эйл



Прямая Эйлера

Окружность Эйлера и точки Фе

Окружность Эйлера



$OB = 2 \cdot NA_1$

или

$R_{\text{описанной окр.}} = 2R_{\text{окр.Эйлера}}$

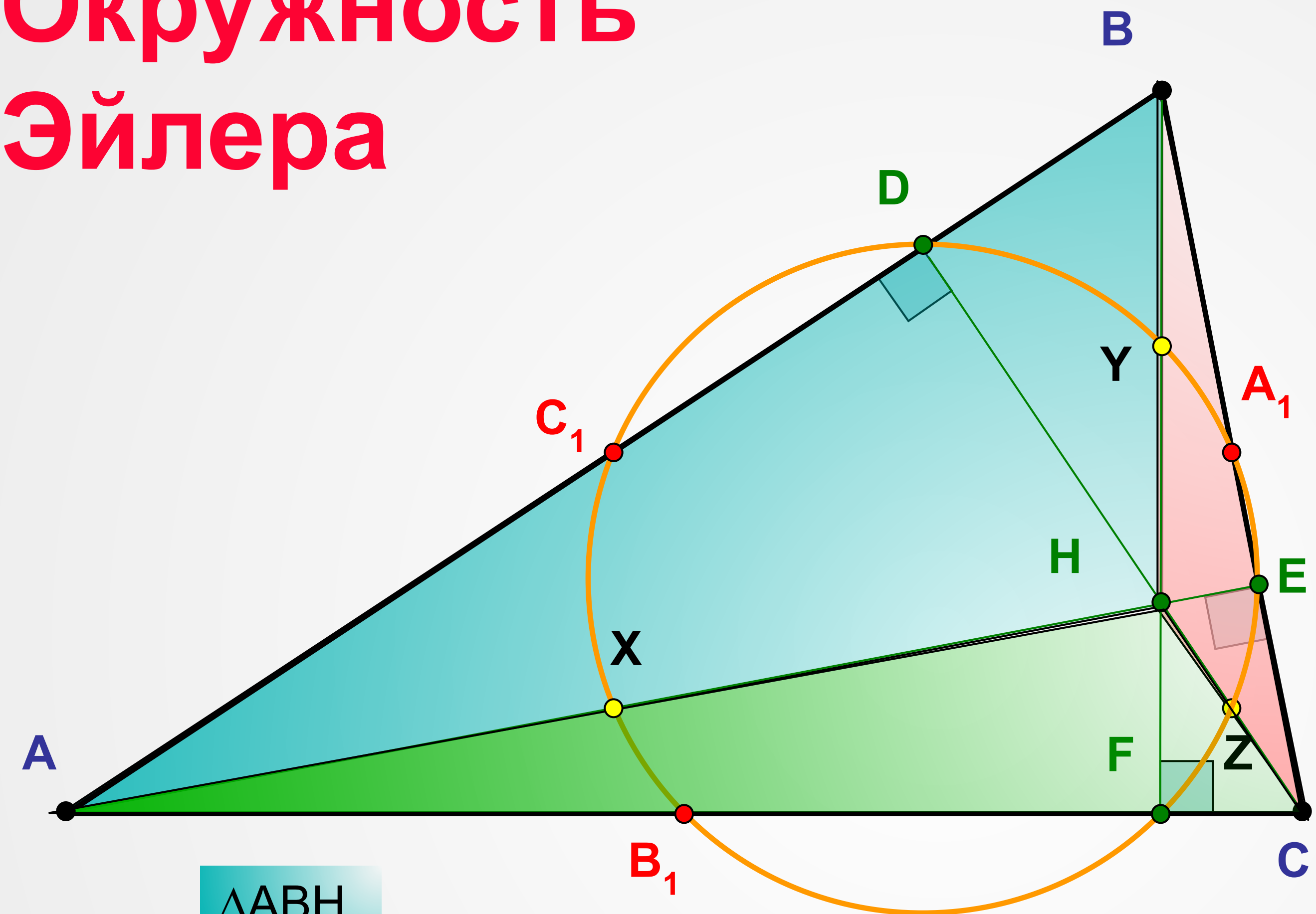
Окружность Эйлера

В ΔABC:

A₁, B₁, C₁ - середины сторон

D, E, F - основания высот

X, Y, Z - середины отрезков AH,BH,CH



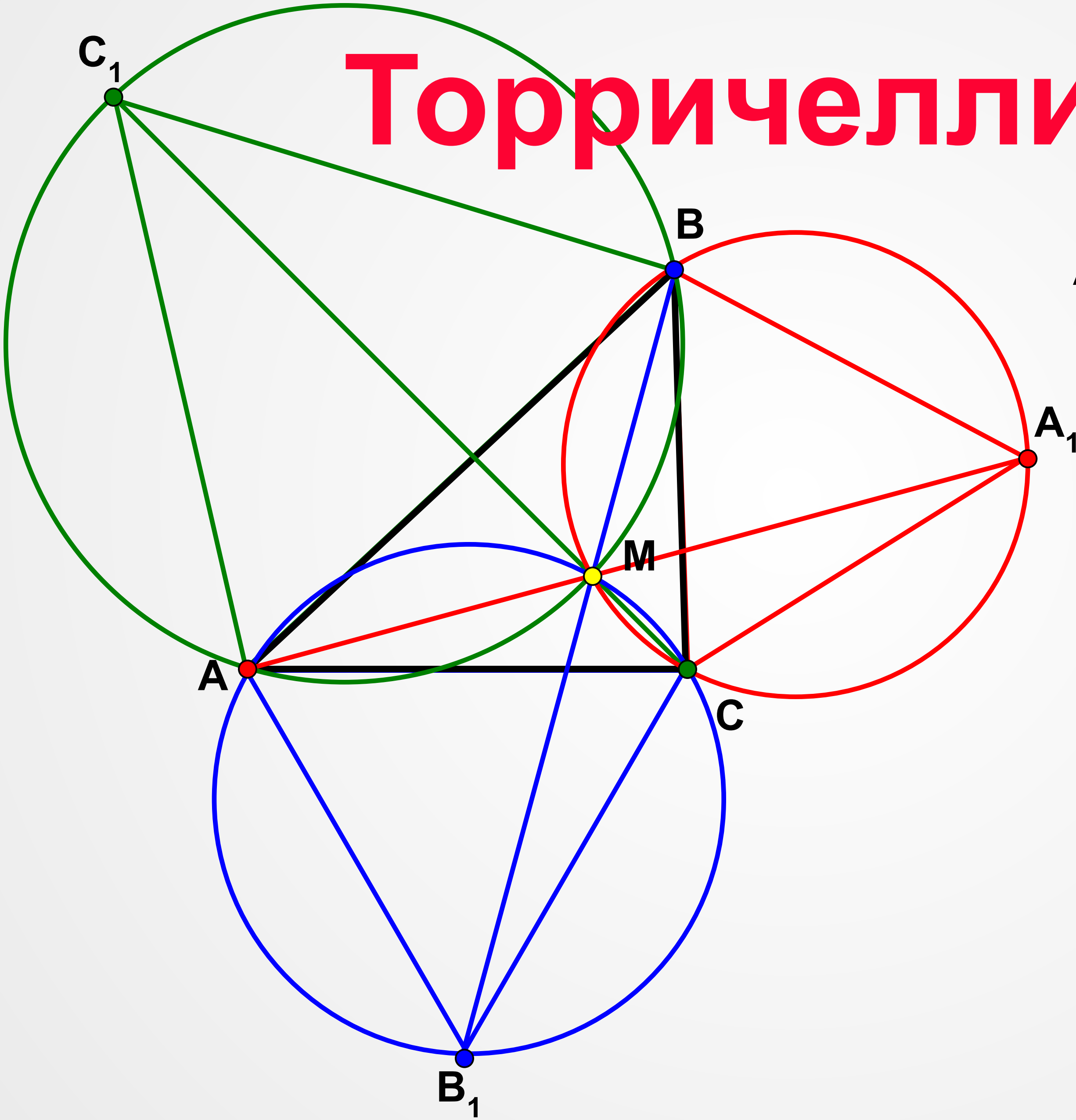
ΔABH

ΔACH

ΔBCH

имеют ту же окружность Эйлера, что и ΔABC

Точка Торричелли



2.

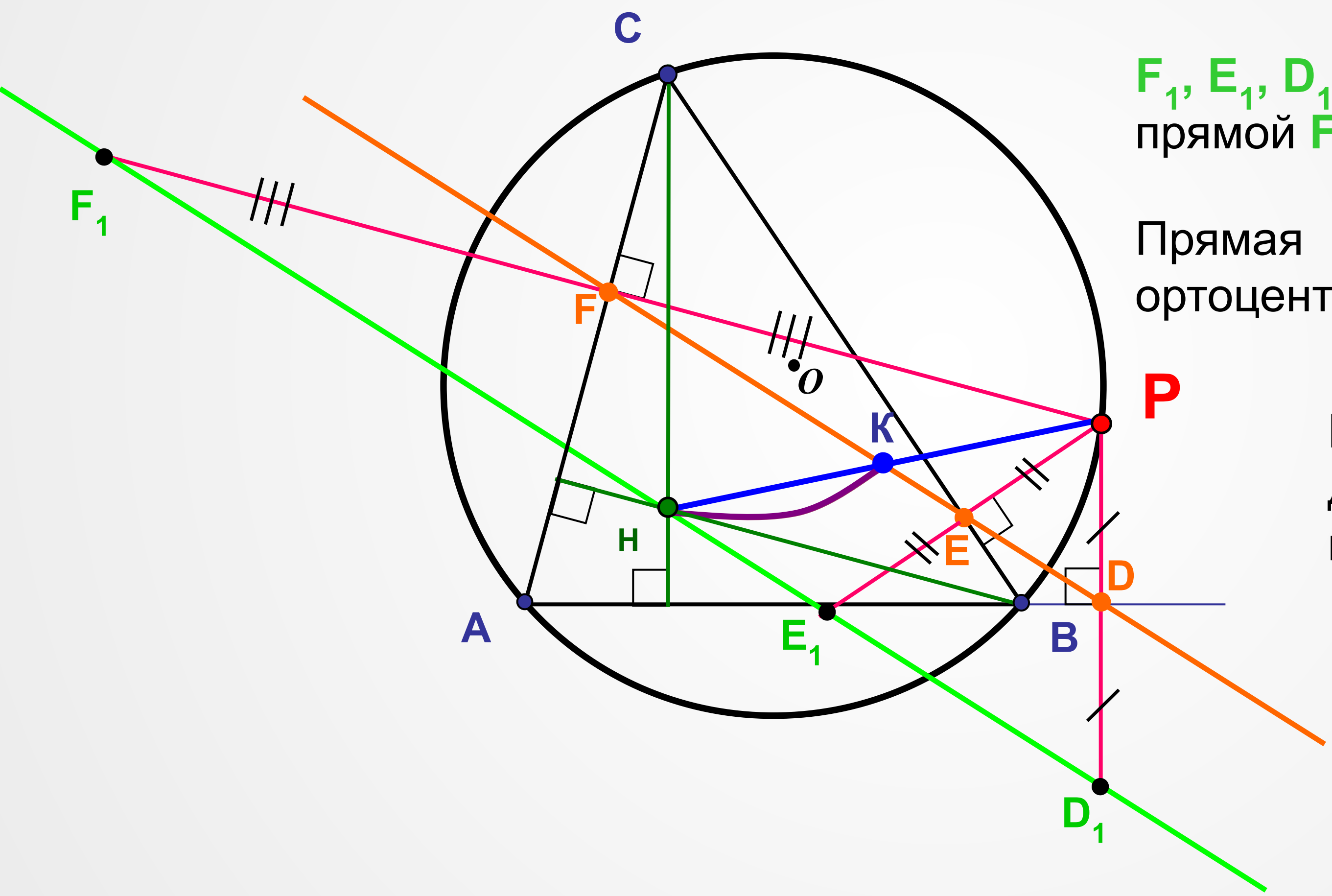
$$AA_1 = BB_1 = CC_1$$

3.

Если точка Торричелли М лежит внутри треугольника, то сумма расстояний от точки М до вершин треугольника

МА+МВ+МС - минимальна

Прямая Симпсона



F_1, E_1, D_1 - симметричны точке P относительно сторон ΔABC.

F_1, E_1, D_1 - лежат на одной прямой F_1D_1 .

Прямая F_1D_1 проходит через ортоцентр H ΔABC.

Прямая Симпсона делит отрезок PH пополам!

PK = KH

Прямая Эйлера

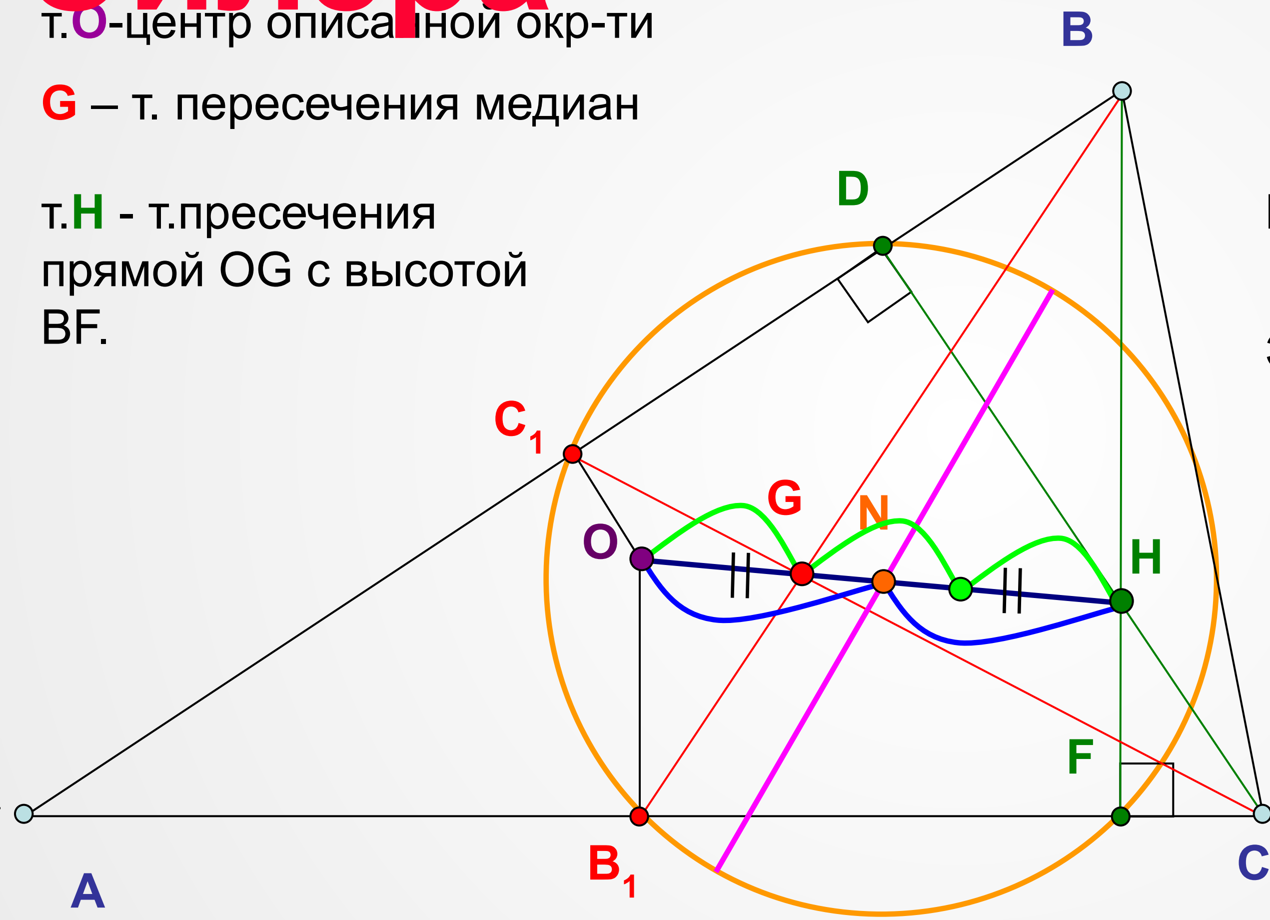
в △ ABC

т.O-центр описанной окр-ти

G – т. пересечения медиан

т.H - т.пресечения прямой OG с высотой BF.

OG : GH = 1 : 2



Центр окружности Эйлера

т.N – лежит на прямой Эйлера

т.N – делит отрезок OH пополам.

ON = NH