

# Статистические ГИПОТЕЗЫ

Любое суждение о генеральной совокупности называется **статистической гипотезой**.

Типы гипотез:

- 1) *о законе распределения генеральной совокупности*
- 2) *о значениях её параметров.*
- 3) *....*

Проверка статистической гипотезы состоит в выяснении совместимости выдвинутого **предположения** с результатами **наблюдений**.

Проверка гипотезы базируется на полученной выборке.

Всегда возможно расхождение между теоретическим предположением и результатами измерений из-за того, что **элементы выборки – случайные величины**.

Поэтому, при **малых** расхождениях теоретических и экспериментальных величин отвергать гипотезу **не следует**.

Необходимо определить, какие расхождения можно полагать ***пренебрежимо малыми***, а какие – ***существенными*** для отбрасывания выдвинутой гипотезы.

Так как элементы выборки (результаты экспериментов) являются **случайными величинами**, то определенной величине расхождения соответствует некоторая **вероятность**.

Следовательно, выводы о принятии и отвержении гипотезы утверждаются с некоторой **вероятностью**.

Выводы о результате проверки **статистической гипотезы** основаны на **принципе практической невозможности**.

*«Случайное событие с малой вероятностью в однократном испытании произойти не может»*  
(Чебышев, 1845г.).

## Уровень значимости $\alpha$ .

Величина  $\alpha$  – вероятность **практически невозможного** события в **однократном** испытании.

Если **вероятность** различия теоретических и экспериментальных результатов окажется меньше величины  $\alpha$ , то это различие объясняется **флуктуациями** элементов выборки и объявляется «**незначимым**».

Статистическая гипотеза *принимается* с вероятностью

$$\eta = 1 - \alpha.$$

В противоположном случае, когда **вероятность** различия теоретических и экспериментальных результатов больше величины  $\alpha$ , то различие эмпирического и теоретического распределений объявляется «**значимым**», т.е. необъяснимым флуктуациями элементов выборки.

Тогда выдвинутая гипотеза ***отвергается*** на принятом **уровне значимости  $\alpha$** .

Начальная гипотеза, которая проверяется называется **нулевой  $H_0$**

Принятие или отбрасывание нулевой гипотезы осуществляется с помощью некоторого **критерия**.

**Критерием  $K$**  называется некоторая **статистика** (т.е. случайная величина, построенная из элементов выборки), чей закон распределения вероятности известен из теории вероятностей.

На множестве всевозможных значений критерия  $\{K\}$  выделяется подмножество  $\{K_0\}$ , называемое **критической областью**.

**Критическая область** строится так, чтобы вероятность попадания случайного значения критерия **K** в область  $\{K_0\}$  (при условии справедливости нулевой гипотезы) равнялась выбранному уровню значимости  $\alpha$ .

$$P[ K \in \{K_0\} : H_0 ] = \alpha \quad (1)$$



# Алгоритм проверки статистической гипотезы

Формулируется нулевая гипотеза  $H_0$ .

Выбирается уровень значимости  $\alpha$ .

Определяется критическая область  $\{K_0\}$ ,

Вычисляется значение критерия  $K^*$  на базе полученной выборки.

Проверяется попадание вычисленного значения  $K^*$  в критическую область  $\{K_0\}$ .

При попадании ( $K^* \in \{K_0\}$ ) нулевая гипотеза  $H_0$  **отвергается**.

В противоположном случае – нулевая гипотеза  $H_0$  не отвергается (т.е. **принимается**).

# Статистические ошибки 1-го рода и 2-го рода

Выдвинутая статистическая гипотеза называется **нулевой**.

**Ошибка 1-го рода:** отбрасывание истинной гипотезы. Равна выбранному уровню значимости  $\alpha$ .

Кроме нулевой гипотезы всегда существует **альтернативная гипотеза**.

**Ошибка 2-го рода:** принятие нулевой гипотезы, когда она ложна (т.е. когда верна альтернативная гипотеза).

При выборе критической области (при фиксированном уровне значимости  $\alpha$ ) необходимо **максимально уменьшать ошибку 2-го рода:**

$$P[ K \notin \{K_0\} : H_1 ] = \beta \quad (2)$$

Вероятность  $P[ K \in \{K_0\} : H_1 ] = 1 - \beta$   
(3)

называется **мощностью критерия.**

Практически всегда при уменьшении ошибки 1-го рода  $\alpha$  начинает возрастать ошибка 2-го рода. Поэтому требуется искать компромисс между величинами ошибок 1-го рода и 2-го рода.

В частности, если  $P[ K \in \{K_0\} : H_1 ] \leq \alpha$ , то отвергать нулевую гипотезу  $H_0$  в пользу альтернативной  $H_1$  было бы принципиально неверно, так как вероятность события  $K \in \{K_0\}$  при альтернативной гипотезе  $H_1$  еще меньше, чем при нулевой гипотезе  $H_0$ .

Наилучшим для проверки статистической гипотезы было бы такое **критическое событие**, которое имело бы *малую* вероятность при нулевой гипотезе  $H_0$  и *большую* вероятность при альтернативной гипотезе  $H_1$ .

$$P[ K \in \{K_0\} : H_0 ] = \alpha \quad (1)$$

$$P[ K \in \{K_0\} : H_1 ] = 1 - \beta \quad (3)$$

# Критерий согласия Пирсона

Критерий «хи-квадрат»

Область изменения значений *генеральной совокупности* разбивается на  $R$  конечных интервалов  $s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, R$ ).

Для каждого интервала подсчитываются:

во-первых, **вероятность** попадания значения случайной величины в данный интервал :

$$p_k = P[x \in s_k] \quad k = 1, 2, \dots, R \quad (4)$$

во-вторых, **частота** попадания в данный интервал элементов полученной выборки:

$$v_k = n_k / n \quad k = 1, 2, \dots, R \quad (5)$$

Критерий Пирсона задается формулой

$$K = n \sum_{k=1}^R \frac{(v_k - p_k)^2}{p_k} \quad (6)$$

Частоты (5) – случайные величины.

Следовательно, величина (6) – **случайная**.



## Теорема Пирсона.

Случайная величина (6) при  $n \rightarrow \infty$ , имеет распределение «**хи-квадрат**» с числом степеней свободы:  **$R - 1$**

Гипотетические распределения в практических задачах часто содержат **параметры**.

Неизвестные генеральные значения параметров приходится заменять их **оценками**, полученными из выборки.

Тогда вероятности, вычисленные по формулам (4) получат **случайный** разброс.

Каков тогда **закон распределения** критерия (6) ?

## Теорема Фишера.

Случайная величина (5) при  $n \rightarrow \infty$  имеет распределение «**хи-квадрат**» с числом степеней свободы

$$R - 1 - q, \quad (7)$$

где  $q$  – количество **параметров** генерального распределения, которые заменены выборочными **точечными оценками**.

# Задача о погибших кавалеристах

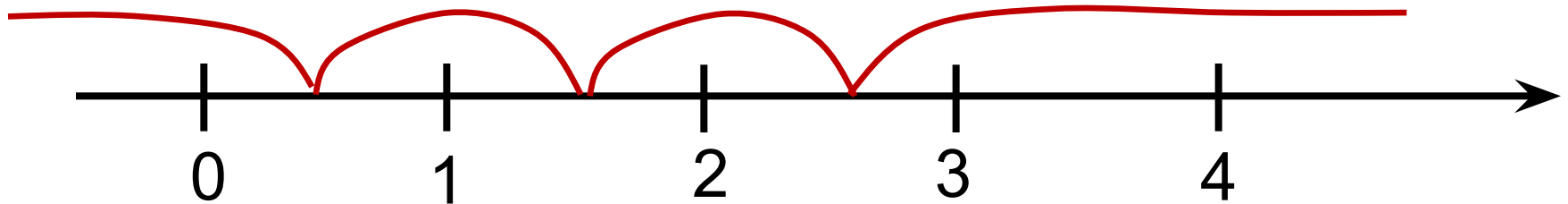
**20** лет собирались сведения о количестве кавалеристов прусской армии, погибших в результате гибели под ними коня.

Данные извлекались из ежегодных донесений **10**-и армейских корпусов, что в целом составило **200** донесений.

<b><math>k</math> - количество погибших в год</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>&gt;4</b>
<b><math>n_k</math> – соответствующее число донесений</b>	<b>109</b>	<b>65</b>	<b>22</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

# Разбиение генеральной совокупности на интервалы и расчет частот

$$R = 4$$



$S_k$	$-\infty; 0,5$	$0,5; 1,5$	$1,5; 2,5$	$2,5; \infty$
$k$	0	1	2	3; 4
$v_k$	0,545	0,325	0,11	0,02

## Нулевая гипотеза $H_0$ :

Распределение погибших подчиняется закону Пуассона

$$P(k) = \frac{a^k}{k!} \exp(-a) \quad (8)$$

Параметр  $a$  по смыслу является **математическим ожиданием** пуассоновской случайной величины и его значение неизвестно.

Заменим неизвестный параметр  $a$   
его приближенным значением –  
**средним статистическим**

$$a \approx \bar{k} = \frac{\sum k \cdot n_k}{\sum n_k} \approx 0,61 \quad (9)$$

$$P(k) = \frac{\bar{k}^k}{k!} \exp(-\bar{k}) \quad (10)$$

Рассчитаем вероятности по предыдущей формуле для тех же интервалов

<b><math>S_k</math></b>	<b><math>-\infty; 0,5</math></b>	<b><math>0,5; 1,5</math></b>	<b><math>1,5; 2,5</math></b>	<b><math>2,5; \infty</math></b>
<b><math>V_k</math></b>	<b>0,545</b>	<b>0,325</b>	<b>0,11</b>	<b>0,02</b>
<b><math>k</math></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3; 4</b>
<b><math>p_k</math></b>	<b>0,543</b>	<b>0,331</b>	<b>0,101</b>	<b>0,024</b>



Вычислим значение критерия Пирсона по данным таблицы

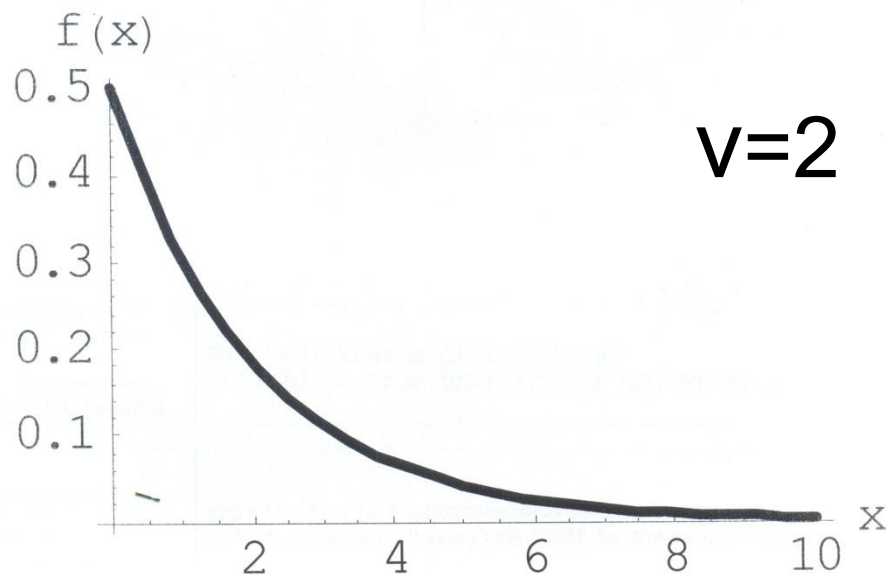
$$K^* = n \sum_{k=1}^R \frac{(v_k - p_k)^2}{p_k} \approx 0,32 \quad (11)$$

Критерий Пирсона является случайной величиной, распределенной по закону «**хи-квадрат**».

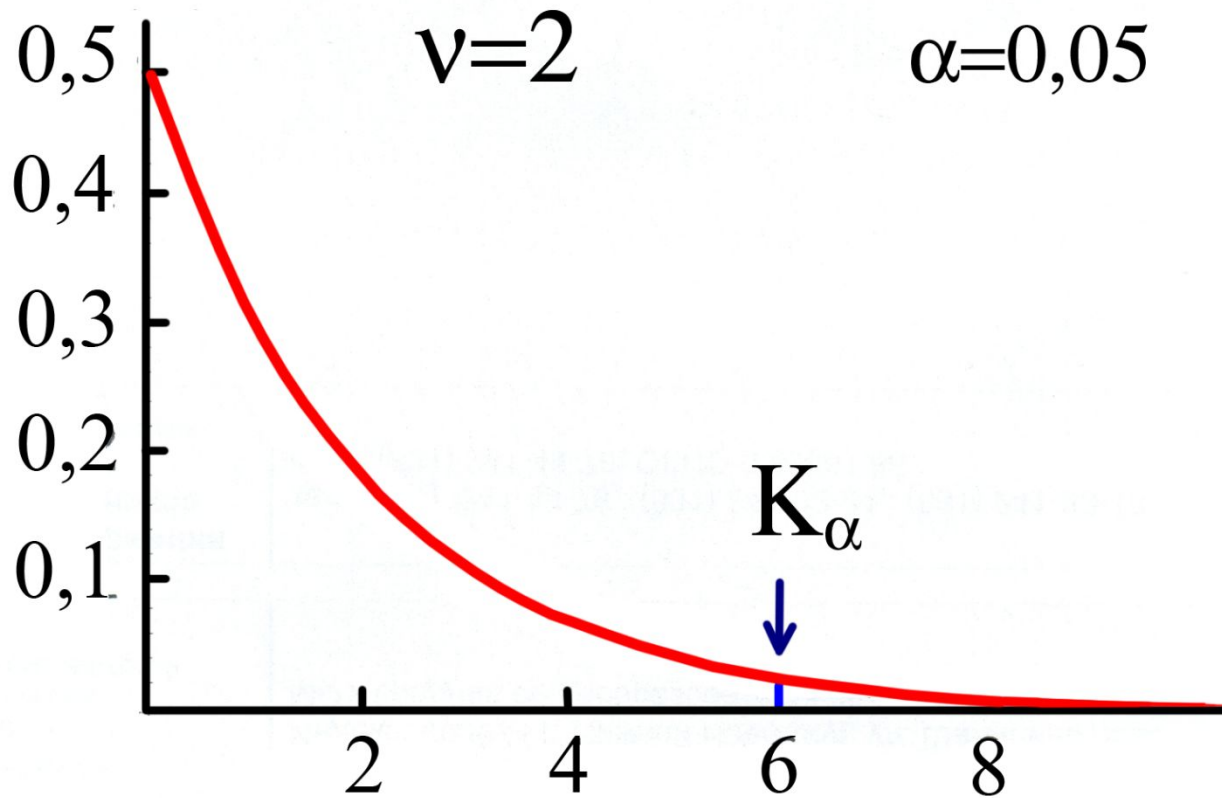
В данной задаче число степеней свободы:

$$R - 1 - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$$

Плотность случайной величины «**хи-квадрат**» с числом степеней свободы **2**



Критическую область выбираем в области больших значений критерия ( $K_\alpha ; +\infty$ )



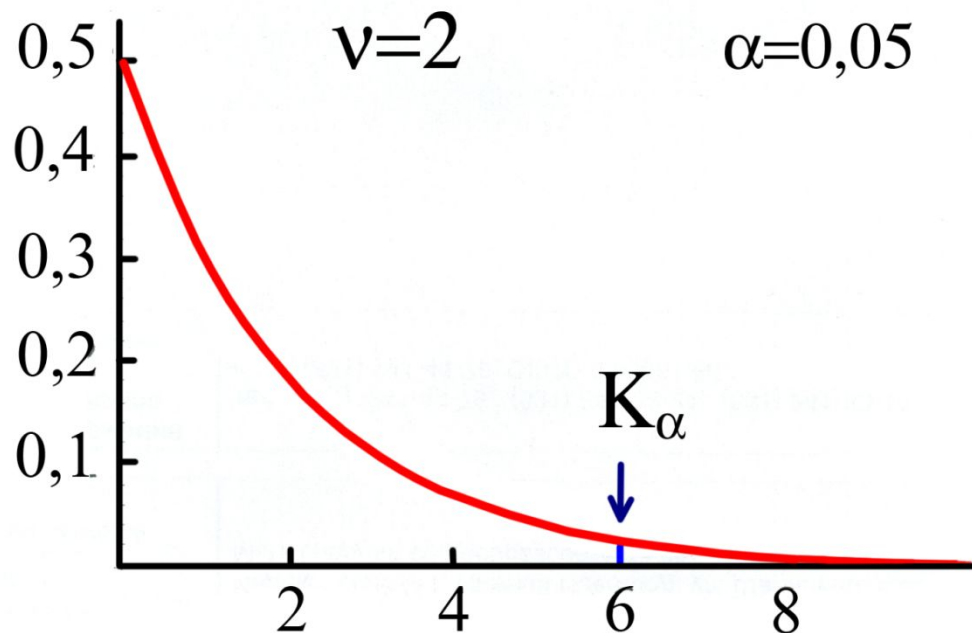
По заданному уровню значимости  $\alpha = 0,05$   
находится предел значимости:  $K_\alpha \approx 6$

Сравнение значения критерия  $K^* = 0,32$

с пределом значимости  $K_\alpha = 6$

позволяет **принять нулевую гипотезу  $H_0$** .

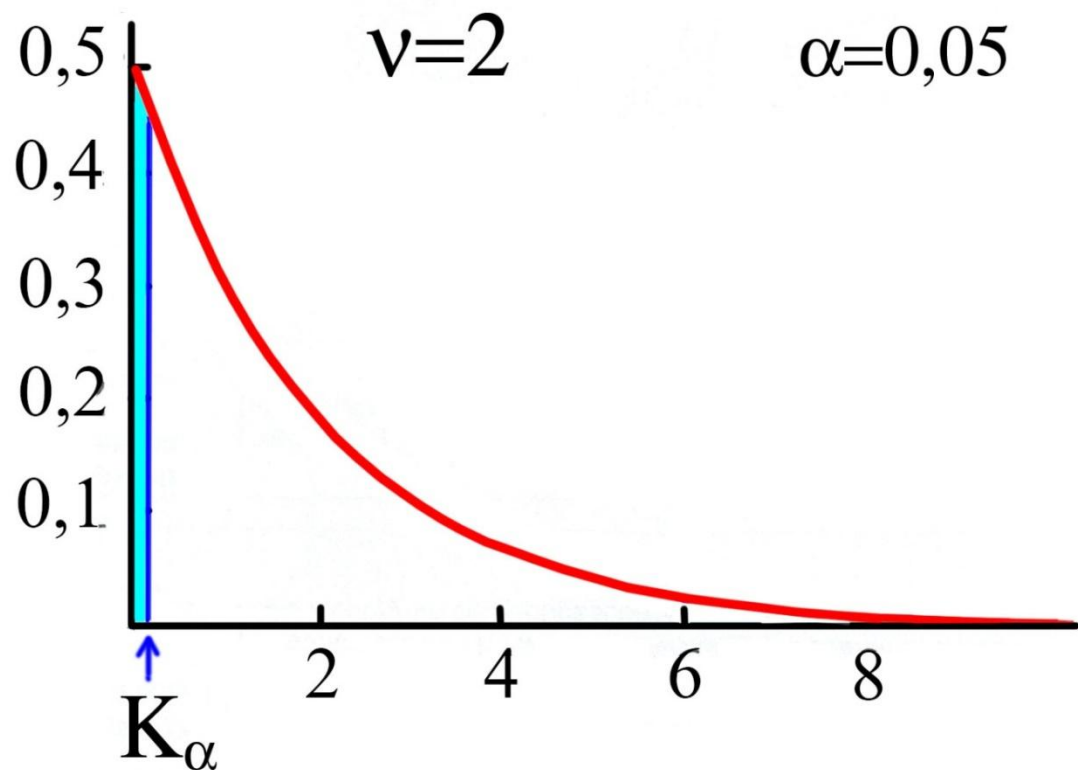
Очевидно, что в данной задаче критическую область следует взять в области больших значений критерия.



$$K = n \sum_{k=1}^R \frac{(v_k - p_k)^2}{p_k}$$

При большом различии частот  $v_k$  и вероятностей  $p_k$  величина критерия Пирсона  $K$  будет высока.

Если взять критическую область в области малых значений критерия, то данная гипотеза будет *отвергнута* при почти точном совпадении частот и вероятностей.



$$K = n \sum_{k=1}^R \frac{(v_k - p_k)^2}{p_k}$$

Результат парадоксальный и абсолютно неверный.