Лк_7

Лк-6 закончилась формулой для периода качаний физического маятника: $\omega_0 = \sqrt{g/l_{\text{пр}}}$. В которой $l_{\text{пр}}$ – приведенная длина физического маятника. Приведенная длина выражаетмя формулой

$$l_{\text{пр}} = \left(\frac{j_0}{m|r|} + |\mathrm{r}|\right)$$

В ней j_0-момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс, а $|r|$ - расстояние от оси подвеса до центра масс. Решим задачу:

Пятиминутка: Линейка длиной 1 м имеет небольшое отверстие на расстоянии 1 см от края. Определить период качаний линейки если она подвешена этим отверстием на гвоздь, вбитый в вертикальную стену.

Энергия колебательного движения.

Во всех рассмотренных случаях получаются одинаковые уравнения движения и одинаковые формулы движения

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Где x – линейная или угловая координата колеблющегося тела.

Вычислим энергию колебаний на примере пружинного маятника, результат для любого другого маятника будет точно таким же. Кинетическая и потенциальная энергии тела выражаются известными формулами:

$$W = \frac{mv^2}{2} \qquad U = \frac{kx^2}{2}$$

Подставим $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$; $v = \frac{dx}{dt} = -X_m \omega sin(\omega t + \varphi) = -v_m sin(\omega t + \varphi)$, где $v_m = X_m\omega$ – амплитуда скорости. Тогда

$$W = \frac{v_m^2 sin^2(\omega t + \varphi)}{2} \qquad U = \frac{kX_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2}$$

Определим суммарную энергию колебаний, учтем при этом, что $m\omega^2 = k$ В результате получим

$$T + U = \frac{kX_m^2}{2}(sin^2(\omega t + \varphi) + cos^2(\omega t + \varphi)) = \frac{kX_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2} \qquad (7.1)$$

Суммарная энергия колеблющегося тела не изменяется во времени. Она периодически перекачивается из кинетической в потенциальную и наоборот. Ясно, что в крайних положениях маятника, когда скорость равна 0, вся его энергия является потенциальной. Когда маятник проходит положение вся энергия – кинетическая.

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Ранее мы пренебрегали трением. При этом колебания не изменяют своей амплитуды и могут продолжаться вечно, что нереально. Наиболее простой учет трения получается при т.н. «жидком» трении, когда сила трения пропорциональна скорости $F_{тр}$=-μv. Причем размерность коэффициента трения μ[кг/с]. Добавим силу трения в уравнение пружинного маятника. Тогда оно примет следующий вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt}$$

Для произвольного маятника с трением это уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2r\frac{dx}{dt} \qquad (7.2)$$

Параметр r называется коэффициентом затухания колебаний.

Будем искать частное решение этого уравнения в виде $x=e^{pt}$, где параметр p необходимо определить путем подстановки x в уравнение (7.2). После подстановки дифференцирований и сокращения на e^{pt} получим для p квадратное уравнение:

$$mp^2=-\omega^2-2rp$$

Решим его:

$$p_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

Любой из двух найденных корней p_1 и p_2 удовлетворяет решению уравнения (7.2). Следовательно, возможны два частных решения уравнения (12): $x_1 = Aexp(p_1 t)$ и $x_2 = Bexp(p_2 t)$, где A и B – произвольные коэффициенты

Сумма $x=x_1+x_2$ также удовлетворяет уравнению (7.2). Эта сумма и будет общим решением, которое после подстановки p_1 и p_2 запишется в следующем виде:

$$x = e^{-rt}\left(Ae^{\sqrt{-\omega_0^2+r^2}t} + Be^{-e^{\sqrt{-\omega_0^2+r^2}t}}\right) \qquad (7.3)$$

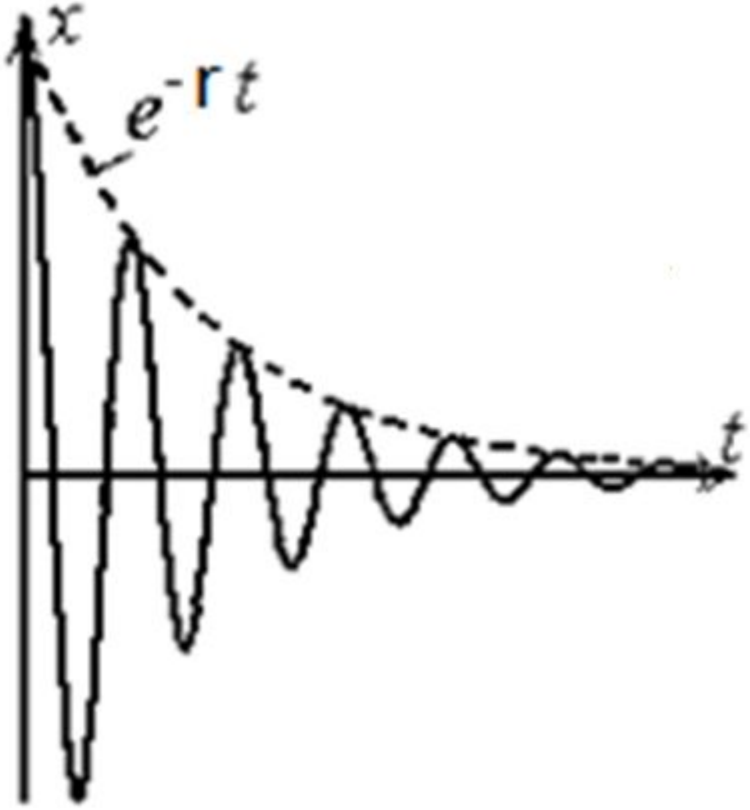
Мы примиримся с тем обстоятельством, что корни в показателях степеней извлекаются из отрицательных чисел, и будем рассуждать следующим образом. Если коэффициент трения r=0, то решение уравнения нам известно - $x=X_m\cos(\omega t+\varphi)$. Следовательно, положив r=0, получим равенство, которое определит сомнительное выражение в скобках:

$$Ae^{\sqrt{-\omega_0^2}} + Be^{-\sqrt{-\omega_0^2}} = X_m\cos(\omega t + \varphi) \qquad (7.4)$$

Подставим (7.4) в (7.3) и получим решение уравнения (7.1) в следующем виде:

$$x = X_m e^{-rt}\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{7.5}$$

Выражение (7.5) определяет колебание тела с постепенным уменьшением амплитуды – т.н. затухающее колебание, график которого показан на рисунке. Все реальные свободные колебания являются затухающими. Скорость затухания определяется коэффициентом r.



Вынужденные колебания - это колебания, совершаемые под действием внешней периодической силы. Рассмотрим их на примере пружинного маятника, который подвержен действию синусоидальной силы: $F=F_m\cos(\omega t)$. Получить уравнение движения маятника не сложно. Достаточно в прежнее уравнение (7.2) добавить силу F. В результате получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt} + F_m\cos(\omega t) \qquad (7.6)$$

Поскольку существует трение собственное движение маятника на собственной частоте ω_0 затухнет и останется только движение под действием силы: $x=X_m\cos(\omega t+\varphi)$. Нам остается определить только два параметра: X_m, φ. Для этого подставим формулу для x в уравнение (7.6):

$$m\omega^2X_m\cos(\omega t+\varphi)=-k\,X_m\cos(\omega t+\varphi)+\mu\omega X_m\sin(\omega t+\varphi)+F_m\cos(\omega t)$$

Теперь необходимо расписать cos(ωt+φ) и sin(ωt+φ) по тригонометрическим формулам косинуса или синуса суммы углов, затем отдельно сгруппировать члены, содержащие cos(ωt) и sin(ωt) после чего получим:

$$X_m \cos(\omega t)\,[\cos(\varphi)\,(k - \omega^2 m) - \sin(\varphi)\mu\omega] - X_m \sin(\omega t)\,[\sin(\varphi)\,(k - \omega^2 m) + \cos(\varphi)\mu\omega] = F_m \cos(\omega t)$$

Данное равенство должно выполняться в любой момент времени. Для этого коэффициенты при cos(ωt) в левой и правой частях должны быть равными, а коэффициент при sin(ωt) должен быть нулевым.

В результате получим следующую систему уравнений, из которой можно найти X_m и φ:

$$X_m[cos(\varphi)\,(k-\omega^2 m) - sin\,(\varphi)\mu\omega] = F_m$$

$$sin(\varphi)\,(k-\omega^2 m) + cos(\varphi)\,\mu\omega = 0$$

Второе уравнение сразу определит

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{-\mu\omega}{k-\omega^2 m} \qquad (7.7)$$

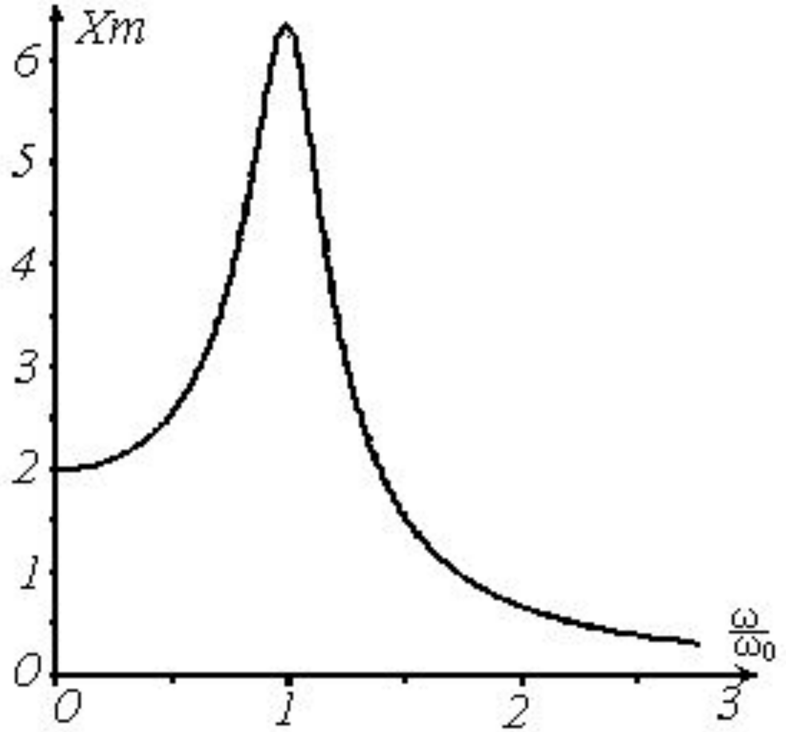
Совместное решение первого и второго уравнений даст амплитуду Xm:

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \mu^2\omega^2}} \qquad (7.8)$$

Из данных формул видно, что амплитуда и начальная фаза вынужденного колебания зависят от частоты действующей силы – ω. Особенно сильную частотную зависимость создает член (k- ω^2m), который можно преобразовать с учетом того, что коэффициент жесткости пружины – k и масса маятника – m определяют частоту его собственных колебаний: ω_0^2=k/m. Заменив, к примеру массу ее выражением через ω_0, получим для амплитуды колебаний следующую формулу:

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{k^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \mu^2\omega^2}} \tag{7.9}$$

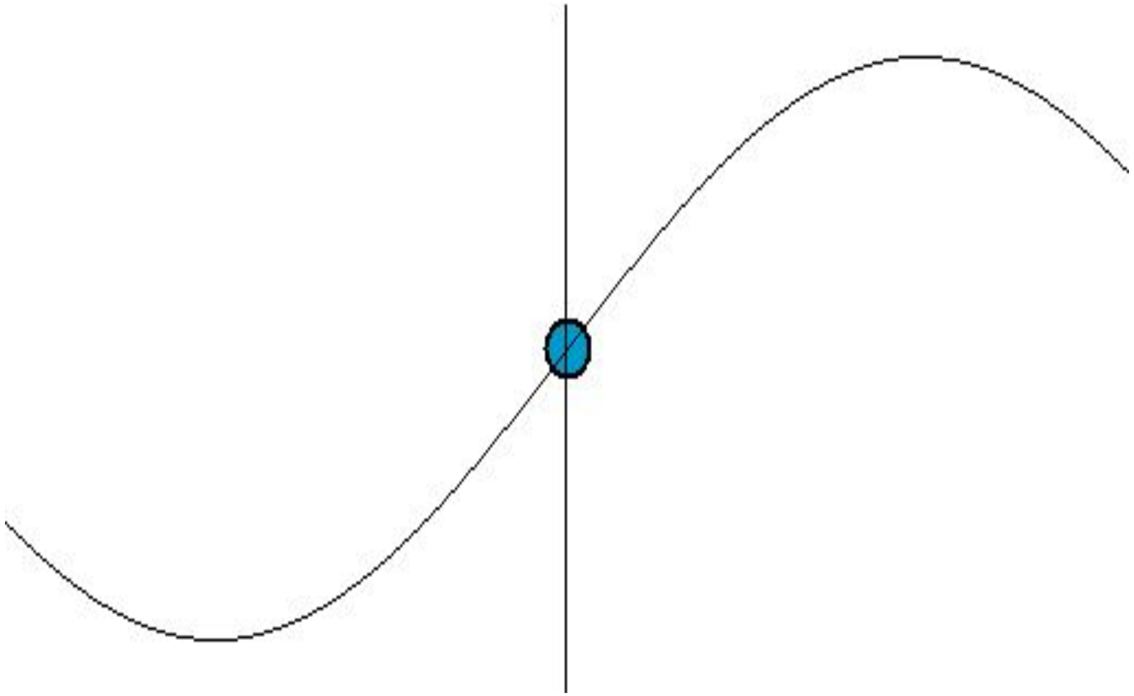
Если частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний маятника, то амплитуда его колебаний достигает максимальной величины, равной $\boldsymbol{X_m = \frac{F_m}{\mu\omega}}$ При малом коэффициенте трения амплитуда колебаний может достигать огромных значений даже если амплитуда внешней силы мала. Это явление называется резонансом. Известны многочисленные случаи разрушения монументальных сооружений (мосты, здания) под действием небольшой периодической силы, которая попадала в резонанс с собственной частотой колебаний объектов. На рисунке показан график зависимости амплитуды колебаний маятника со значительным трением от частоты внешней силы



Явление резонанса во многих случаях оказывается полезным: им пользуются в механике – для накопления энергии раскачивания, в акустике - для усиления звучания музыкальных инструментов и т. д. В подобных системах желательно минимизировать трение. Но иногда резонанс оказывается вредным: он может вызвать большие колебания машин, фундаментов, мостов. Для ослабления резонансных явлений необходимо увеличивать трение. Для этого в систему добавляется специальной элемент с трением, называемый демпфером. Таким элементом, например, в автомобиле является амортизатор.

Волны

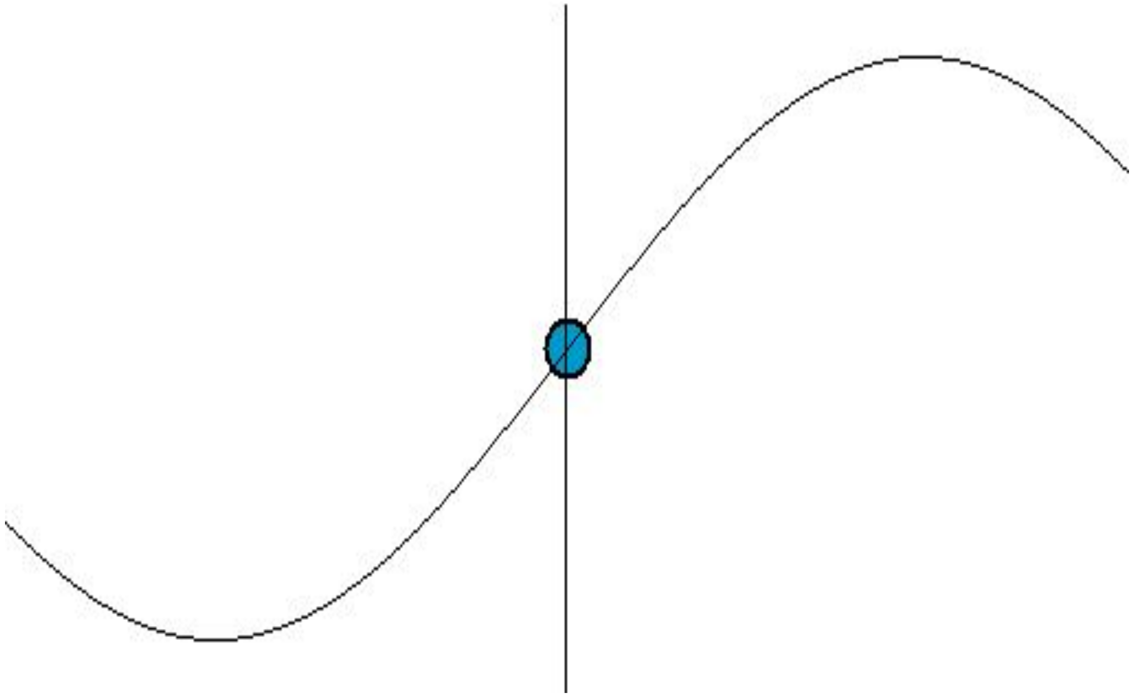
Если в каком-нибудь месте твердой, жидкой или газообразной среды возбуждены колебания частиц, то вследствие взаимодействия атомов и молекул среды колебания начинают передаваться от одной точки к другой с конечной скоростью. Процесс распространения колебаний в среде называется ***волной***



На рисунке выделена одна из частиц, совершающих колебание, а линия показывает передачу колебания к другим частицам. Видно, что это приводит к кажущемуся движению слева направо. Важно знать, что волна переносит только энергию колебаний, но не сами частицы.

Волны

Если в каком-нибудь месте твердой, жидкой или газообразной среды возбуждены колебания частиц, то вследствие взаимодействия атомов и молекул среды колебания начинают передаваться от одной точки к другой с конечной скоростью. Процесс распространения колебаний в среде называется ***волной***



На рисунке выделена одна из частиц, совершающих колебание, а линия показывает передачу колебания к другим частицам. Видно, что это приводит к кажущемуся движению слева направо. Важно знать, что волна переносит только энергию колебаний, но не сами частицы.

Виды волн: 1). Поперечная волна.

Волна называется *поперечной,* если частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

2) Продольная волна.

Волна называется ***продольной***, если колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны.

В газах и жидкостях, которые не обладают упругостью формы, распространение поперечных волн невозможно.
В твердых телах возможно распространение как продольных, так и поперечных волн.

Скорость волны. Под скоростью волны понимают скорость распространения возмущения в среде. Если частица среды двинулась с равновесного положения и этот сдвиг передался частице, находящейся на расстоянии z, через время t, то скоростью волны будет величина

$$v = \frac{z}{t} \tag{7.10}$$

Скорость волны определяется свойствами среды.

Уравнение волны

Обозначим координату колебаний частиц среды буквой x, а координату в направлении распространения волны через z. Пусть частица с координатой z=0 совершает гармоническое колебание $x=X_m\cos(\omega t)$. Это колебание передастся частице с координатой z через интервал времени $\Delta t=z/v$. Следовательно, колебание в точке z будет описываться уравнением

$$x=X_m\cos[\omega(t-\Delta t)]=X_m\cos[\omega(t-z/v)]=X_m\cos(\omega t-z\omega/v)$$

Величина
$$k = \frac{\omega}{v} \qquad (7.11)$$
называется волновым числом. С учетом этого обозначения колебание частицы с координатой z будет описываться следующим уравнением:
$$x = X_m \cos(\omega t - kz) \qquad (7.12)$$
Данное уравнение называется уравнением гармонической волны. Оно позволяет в любой момент времени определить величину x - смещения из положения равновесия частицы, имеющей координату - z в направлении распространения волны. Напомним, что аргумент косинуса в уравнении колебаний или волны называется фазой колебания. В данном случае фаза – это ωt-kz.

Длина волны – λ – это расстояние между точками фаза волны в которых отличается на 2π (период косинуса). Согласно этому определению $k\lambda=2\pi$. Подставим вместо k его формулу (18), получим $\omega\lambda/v=2\pi$. Поскольку круговая частота - ω связана с частотой f соотношением $\omega=2\pi f$, мы получим удобную формулу для скорости волны $v=\lambda f$ (7.13)

Энергия волны

Колеблющиеся частицы среды, в которой распространяется волна, обладают энергией. Выделим в среде малый объем с площадью S, перпендикулярной направлению распространения волны, и длиной dz и вычислим заключенную в нем энергию. Масса вещества в этом объеме dV=Sdz будет равна dm=ρdV, где ρ – плотность среды. Подсчитаем энергию колебательного движения частиц в этом объеме. Колебательное движение частиц определяется волновым уравнением (7.12)

Кинетическая энергия

$$dW = \frac{dm\,\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{2} \qquad (7.14)$$

Скорость колебательного движения частиц среды - dx/dt

Потенциальная энергия рассчитывается немного сложнее. Дело в том, что потенциальная энергия частиц зависит не от абсолютного их смещения из положения равновесия, а от относительного смещения соседних частиц по координате x. Это смещение на границах выделенного объема можно определить по формуле: $\Delta x=(dx/dz)\Delta z$. Относительное смещение равно $\Delta x/\ \Delta z= dx/dz$. Потенциальная энергия относительного смещения частиц в выделенном объеме будет равна:

$$dU = \frac{EdV\ \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}{2} \qquad (7.15)$$

Где E – жесткость связи между частицами в единице объема – модуль Юнга.

Подставим в эти формулы x из волнового уравнения (7.12):

$$dW = \frac{\rho dV}{2}\omega^2 X_m^2 \sin^2(\omega t - kz)$$

$$dU = \frac{edV}{2}k^2 X_m^2 \sin^2(\omega t - kz)$$

Обратим внимание на то, что кинетическая и потенциальная энергия участка среды изменяется во времени по одинаковому закону.

Суммарная энергия колебаний в выделенном объеме равна

$$dW_{\text{сум}} = (\rho\omega^2 + Ek^2)\frac{X_m^2 \sin^2(\omega t - kz)dV}{2} \qquad (7.16)$$

Слагаемые в первом множителе этой формулы соответствуют долям кинетической и потенциальной энергии в единице объема. Примем без доказательства равенство этих долей

Следствием такого допущения будет формула для скорости распространения волны, выраженная через параметры среды. Действительно:

$$\rho\omega^2 = Ek^2 \;=>\; \rho\omega^2 = E\frac{\omega^2}{v^2} \;=>\; v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (7.17)$$

Таким образом, скорость волны в среде равна корню из отношения коэффициента жесткости взаимных связей частиц среды к ее плотности.

С учетом равенства долей кинетической и потенциальной энергии формула (7.16) даст следующее выражение для объемной плотности энергии

$$\frac{dW}{dV} = \rho\omega^2 X_m^2 \sin^2(\omega t - kz)$$

Практический интерес представляет средняя за период колебаний объемная плотность. Средняя величина квадрата синуса равна ½. Следовательно

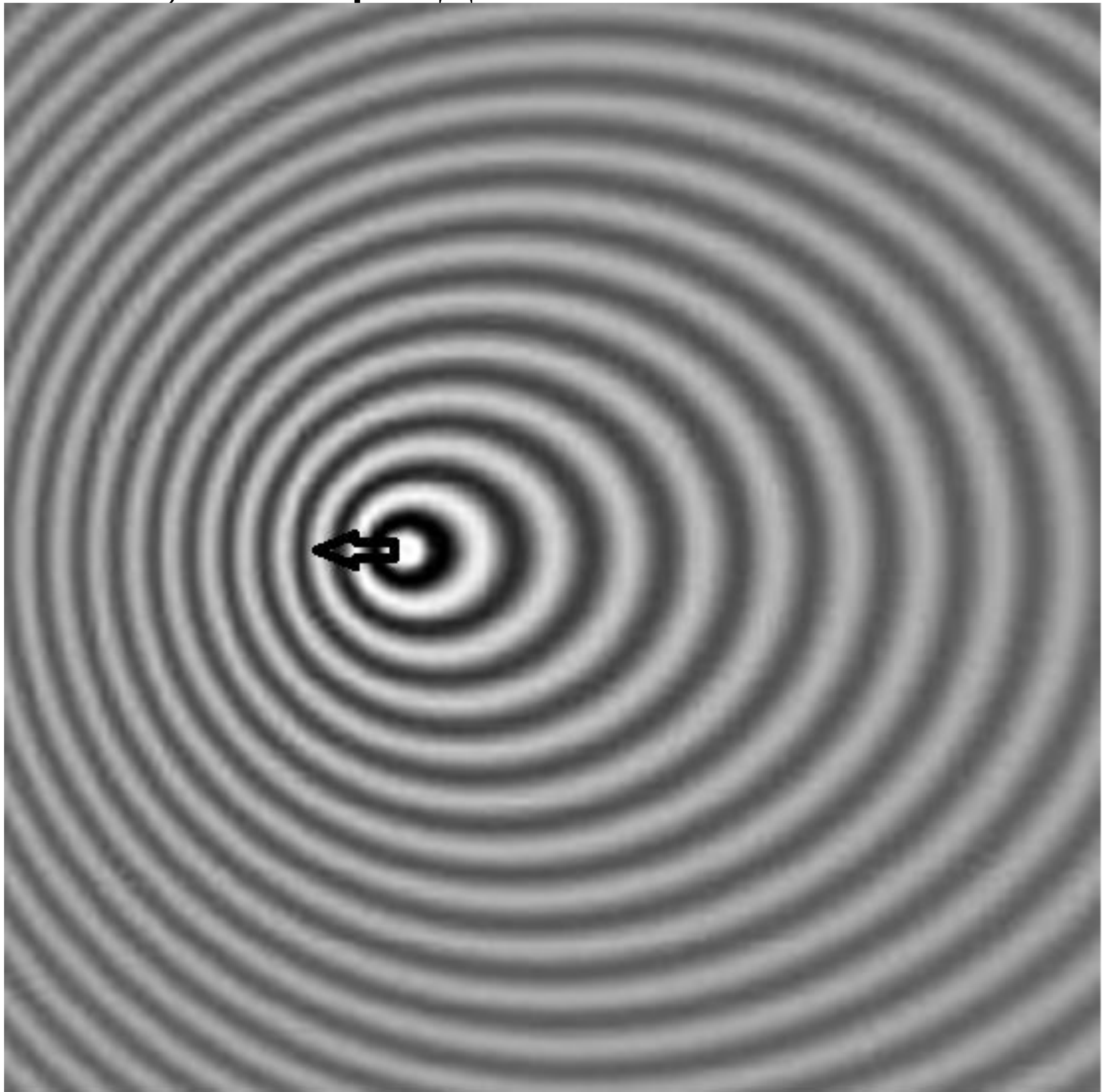
$$\langle\frac{dW}{dV}\rangle = \frac{\rho\omega^2 X_m^2}{2} \qquad (7.18)$$

Через поперечное сечение площадью 1 м^2 за 1 с пройдет энергия, заключенная в объеме параллелепипеда с длиной, численно равной скорости волны. Эта величина называется ***интенсивность волны***

$$I = \langle\frac{dW}{dV}\rangle v = (v\rho)\frac{\omega^2 X_m^2}{2} \qquad (7.19)$$

Первый сомножитель в формуле интенсивности характеризует свойство среды, второй – параметры колебаний частиц. Произведение R=ρv называется акустическим сопротивлением среды.

Эффект Доплера. Заключается в том, что при движении источника волны относительно среды, в которой распространяется волна, длина волны - (расстояние между гребнями) уменьшается в направлении движения источника и увеличивается в противоположном направлении



Действительно, если источник движется относительно среды со скоростью u, то в формулу для длины волны (7.13) вместо скорости волны – v следует подставить относительную скорость источника и волны, в результате получим

$$\lambda = \frac{v \mp u_{\text{ист}}}{\nu_{\text{ист}}} \quad (7.20)$$

Знак минус берется в случае совпадения направлений движения волны и источника, а знак плюс – в случае противоположного их движения.

Изменение длины волны будет ощущаться приемником колебаний волны как изменение частоты колебаний:

$$f_{\text{пр}} = \frac{v}{\lambda} = f_{\text{ист}} \frac{v}{v \mp u_{\text{ист}}} \quad (7.21)$$

Эффект Доплера хорошо ощущается если мимо проезжает поезд или автомобиль со звуковым сигналом. Тон сигнала с высокого - при приближении изменяется на более низкий – при удалении.

Эффект Доплера будет наблюдаться и в случае движения приемника относительно среды, в которой распространяется волна. Если приемник движется навстречу волне, то кажущаяся ему длина волны будет меньше истиной, а частота – больше. В случае противоположного движения приемник будет ощущать увеличение длины волны и уменьшение частоты колебаний. Частота колебаний, воспринимаемых приемником при его движении выразится формулой:

$$f_{\text{пр}} = f\left(1 \pm \frac{u_{\text{пр}}}{v}\right) \tag{7.22}$$

Знак + берется в том случае, когда приемник движется навстречу волне и минус, если приемник догоняет волну.

Формулы (7.21) и (7.22) можно объединить, если и источник и приемник волны движутся относительно среды, в которой распространяется волна:

$$f_{\text{пр}} = f\,\frac{1 \pm \dfrac{u_{\text{пр}}}{v}}{1 \mp \dfrac{u_{\text{ист}}}{v}} \tag{7.23}$$

Эффект Доплера используется в технике, медицине и других отраслях для измерения скорости движения различных объектов. Например, для измерения скорости автомобилей на дороге или измерения скорости кровотока, скорости движения жидкости в трубе.