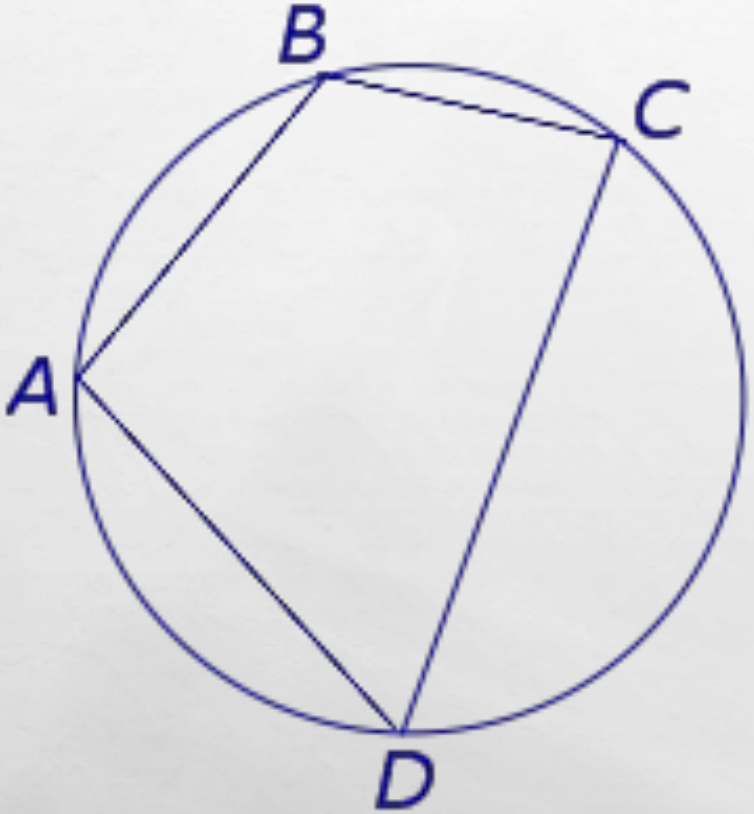
# «Вписанные и описанные четырехугольники»

## Устная контрольная работа по геометрии. Часть №3

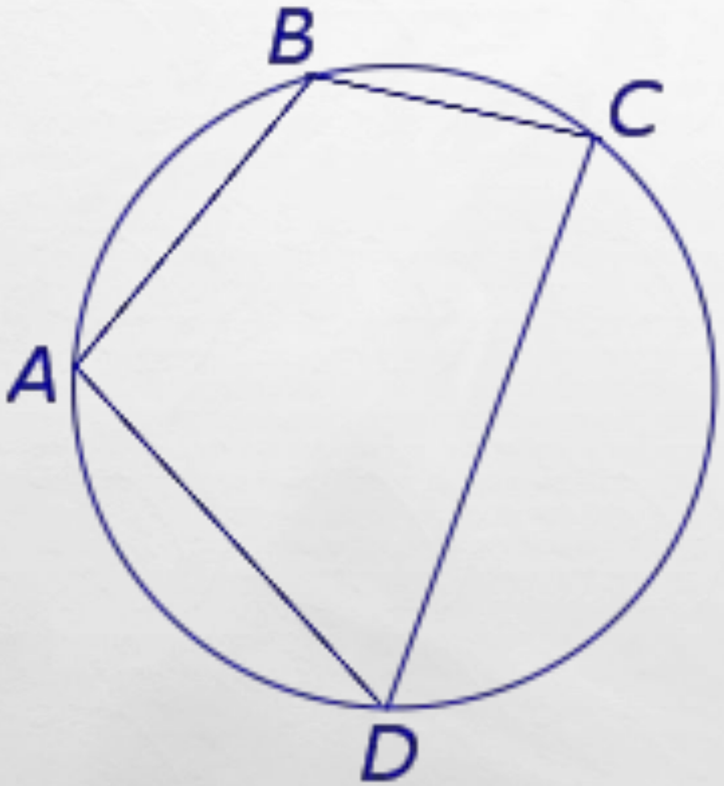
# Вписанные четырёхугольники и их свойства




**Определение.**

Окружностью, описанной около четырёхугольника, называют окружность, проходящую через все вершины четырёхугольника.

В этом случае четырёхугольник называют четырёхугольником, вписанным в окружность, или вписанным четырёхугольником.




## Свойство вписанного четырехугольника

Теорема 1.

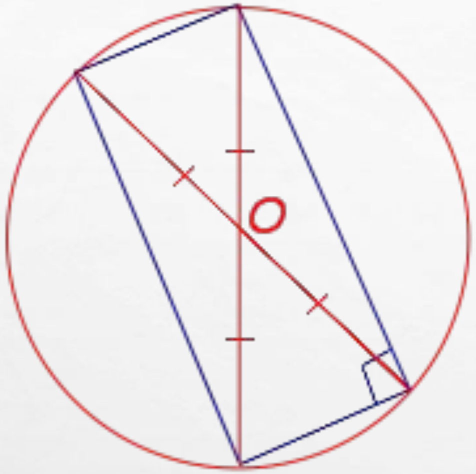
Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы величин его противоположных углов равны 180°.

## Признак вписанного четырехугольника

Теорема 2.

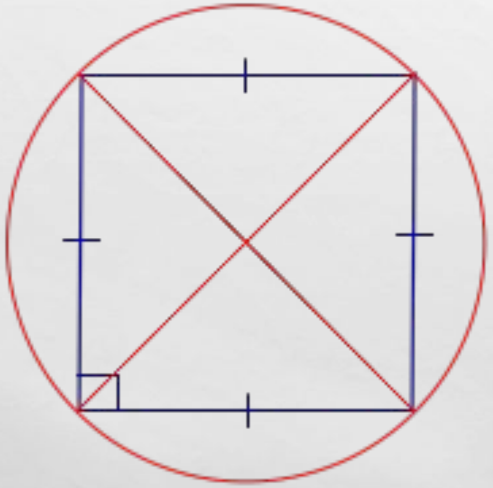
Если у четырёхугольника суммы величин его противоположных углов равны 180°, то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Окружность, описанная около параллелограмма



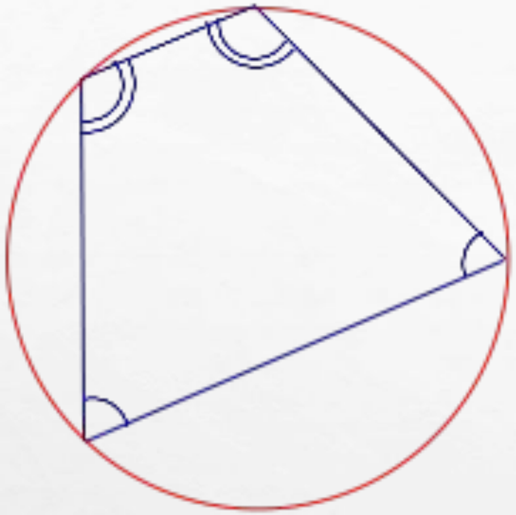

Окружность можно описать около параллелограмма тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.

Окружность, описанная около ромба



Окружность можно описать около ромба тогда и только тогда, когда ромб является квадратом.

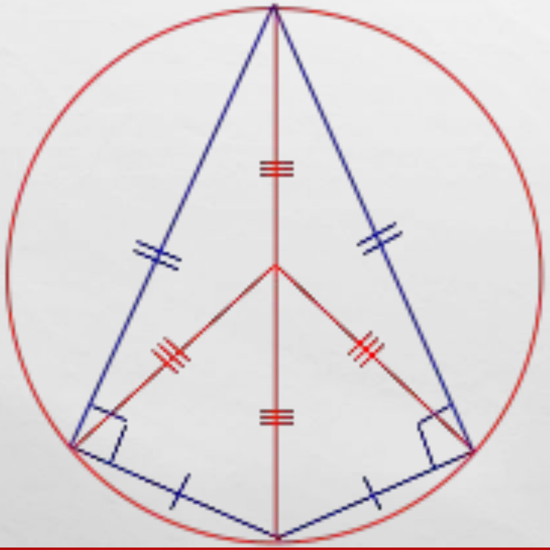
Окружность, описанная около **трапеции**



Окружность можно описать около трапеции тогда и только тогда, когда трапеция является **равнобедренной трапецией**.

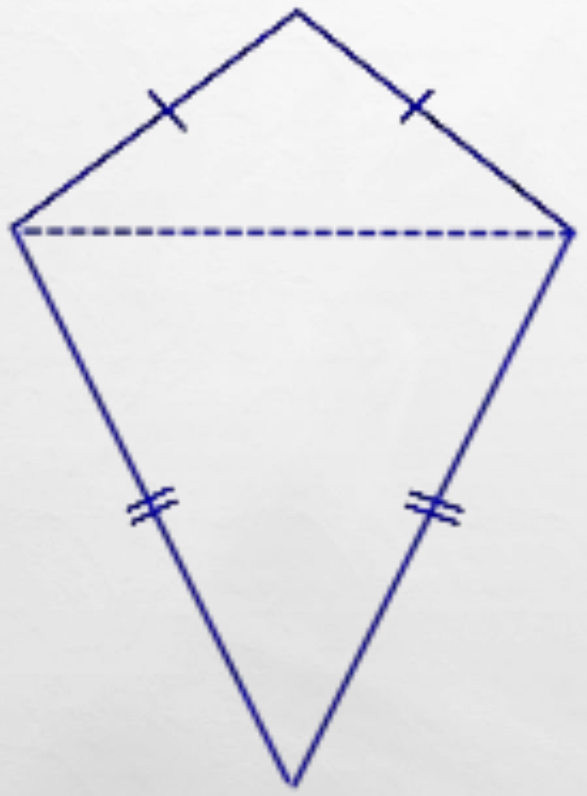
Окружность, описанная около **дельтоида**

**Слайд 6**



Окружность можно описать около дельтоида тогда и только тогда, когда дельтоид **состоит из двух одинаковых прямоугольных треугольников.**

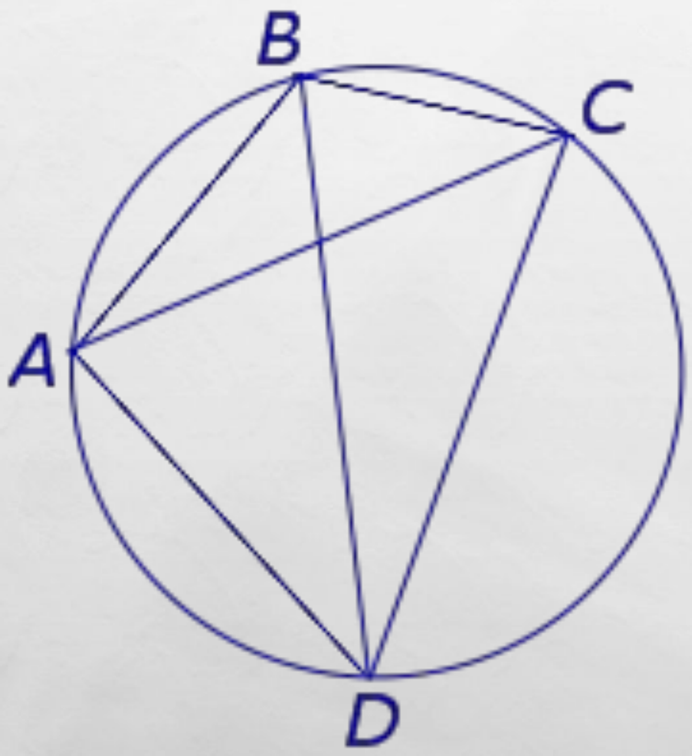
# Дельтоид



***Дельтоид*** **– это выпуклый четырёхугольник, состоящий из двух различных равнобедренных треугольников с общим основанием, вершины которых лежат по разные стороны от этого основания.**

# Произвольный вписанный четырёхугольник

**Теорема Птолемея.**

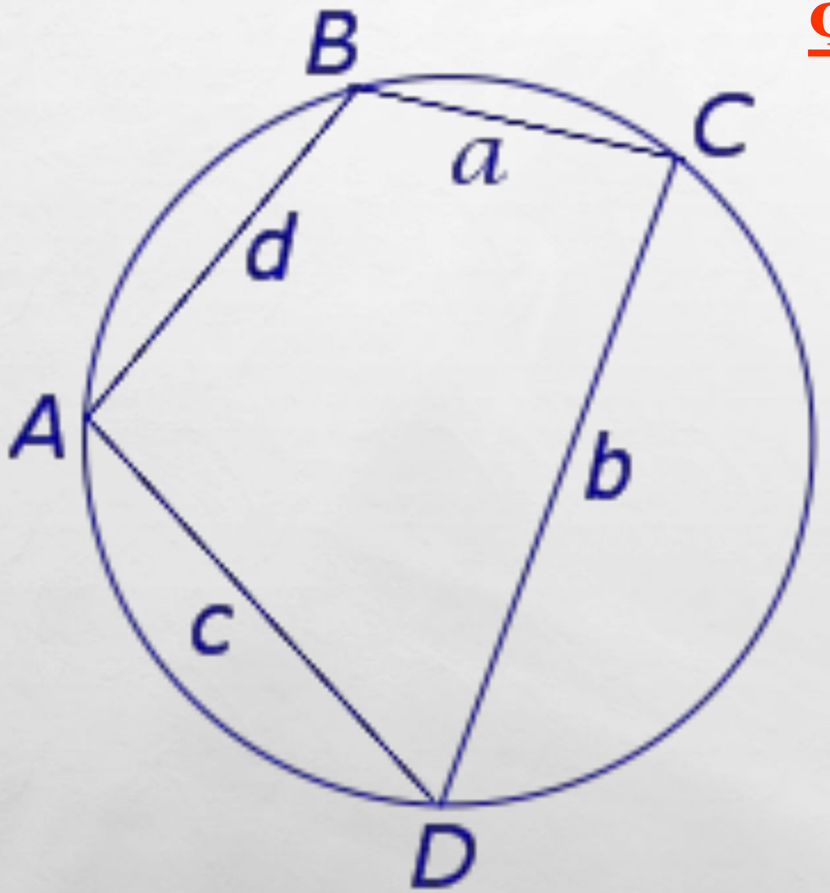



**Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.**

$$AC * BD = AB * CD + BC * AD$$

# Площадь произвольного вписанного четырёхугольника.

## Формула Брахмагупты

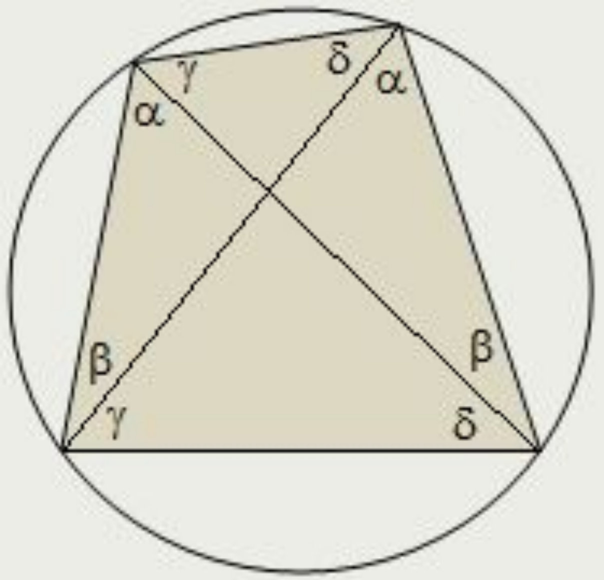



$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(a+b+c+d\right).$$

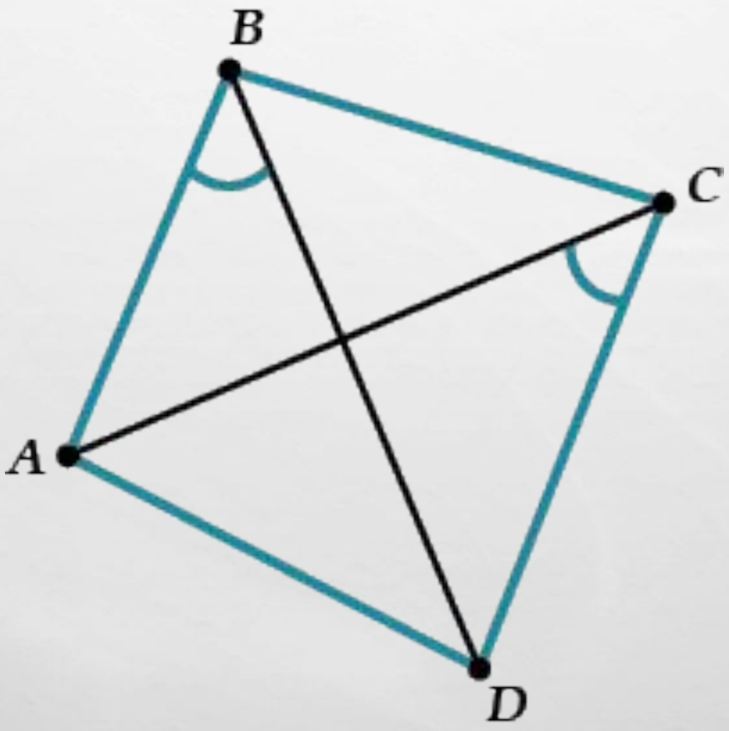
где *a, b, c, d* – длины сторон четырёхугольника,

*p* – полупериметр




# Связанные углы четырехугольника

Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают каждый его угол на два угла. Углы, опирающиеся на одну сторону, называются **связанными** углами.

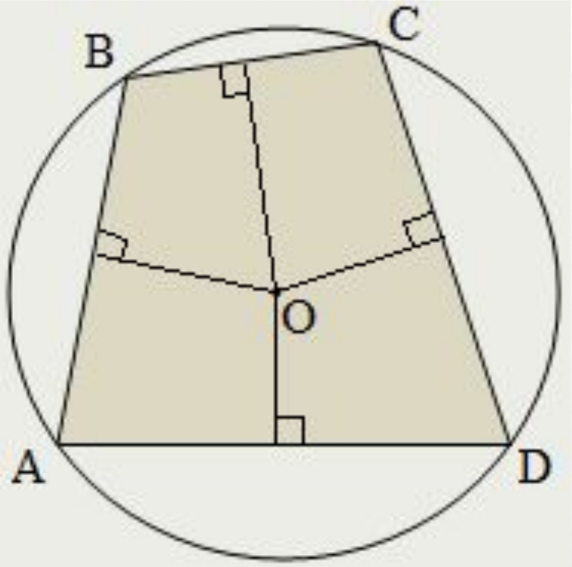



**Свойство.**

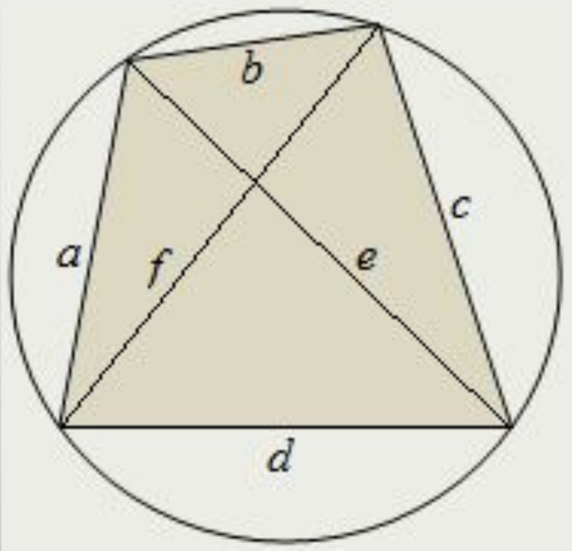
У вписанного четырёхугольника любые два **связанных** угла **равны.**

**Признак.**

Выпуклый четырёхугольник является **вписанным** тогда и только тогда, когда у него есть хотя бы **одна пара равных связанных углов.**



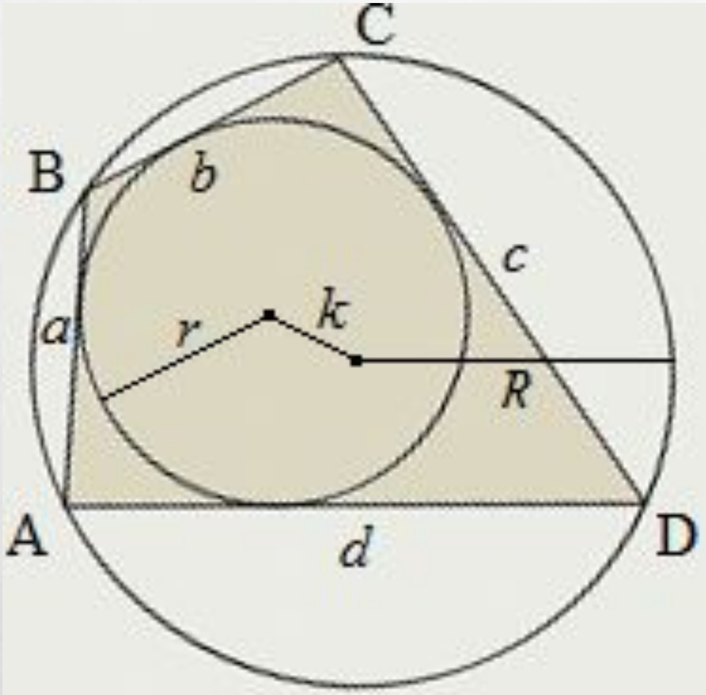

**Центр описанной** около четырёхугольника **окружности** является точкой пересечения всех четырёх серединных перпендикуляров сторон этого четырёхугольника.




**Радиус окружности, описанной около четырёхугольника**

$$R = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

Если четырёхугольник одновременно является описанным и вписанным, то его площадь: $S = \sqrt{abcd}$

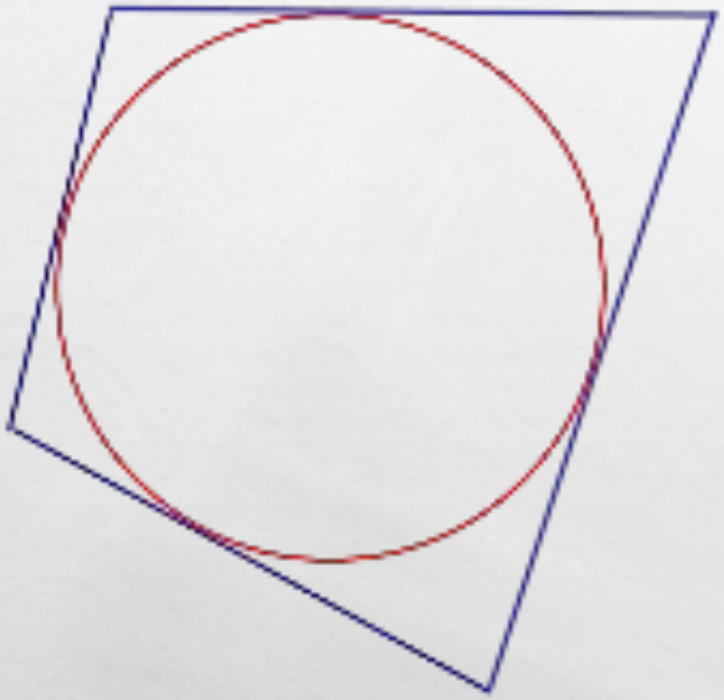



$$S = \frac{p^2}{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{D}{2}}.$$

Для радиусов описанной и вписанной окружностей данного четырёхугольника и расстояния между центрами этих окружностей выполняется соотношение:

$$\frac{1}{(R+k)^2} + \frac{1}{(R-k)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

# Описанные четырехугольники

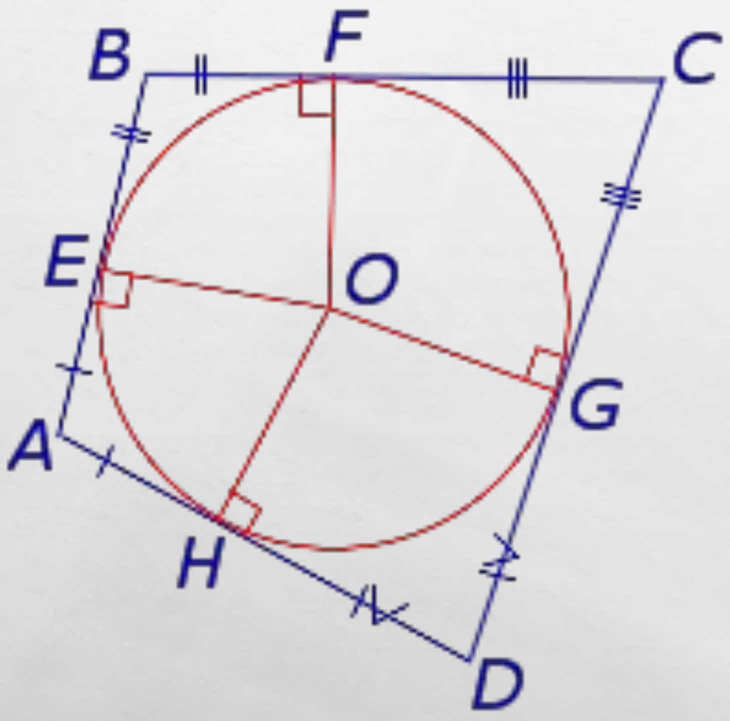


**Определение.**

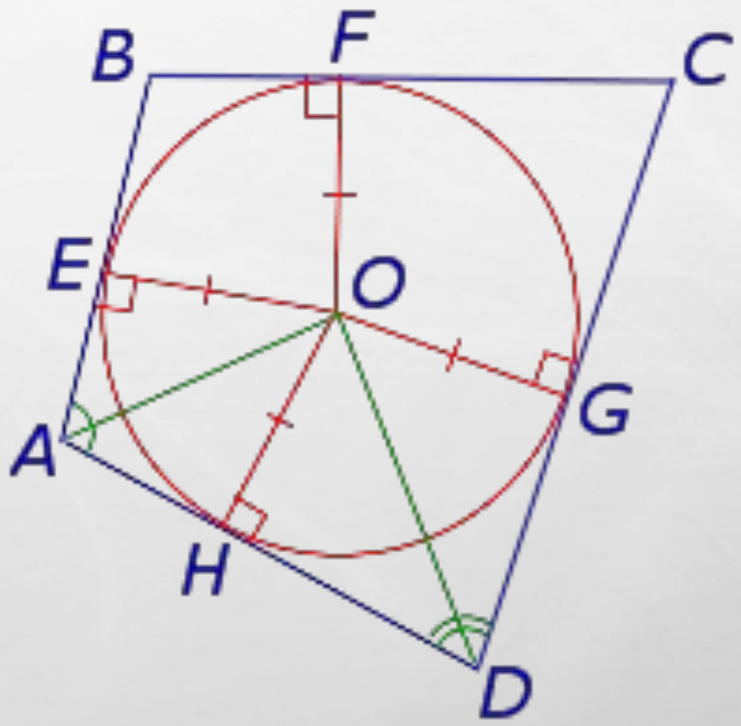
Окружностью, **вписанной** в четырёхугольник, называют окружность, которая касается каждой из сторон четырёхугольника

В этом случае четырёхугольник называют четырёхугольником, описанным около окружности или описанным четырёхугольником.

***Теорема 1*.**
Если четырёхугольник описан около окружности, то ***суммы длин его противоположных сторон равны***.

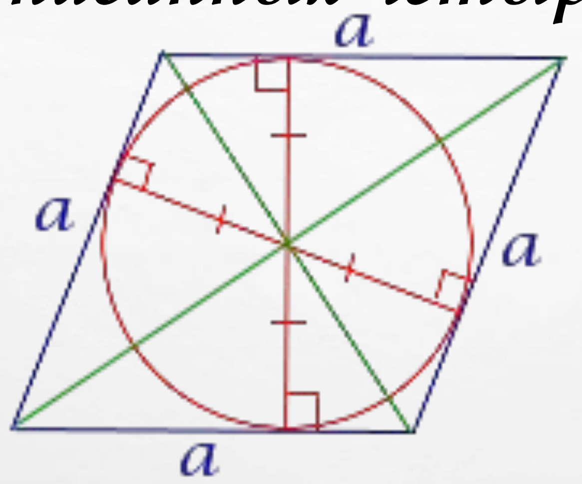



***Теорема 2 (обратная теорема к теореме 1)***.
Если у четырёхугольника суммы длин противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник **можно вписать** окружность.



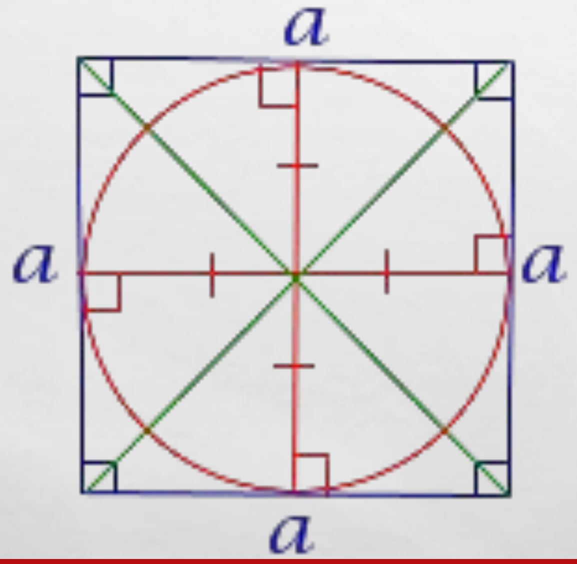
# *Примеры описанных четырёхугольников*

Окружность, вписанная в **ромб**



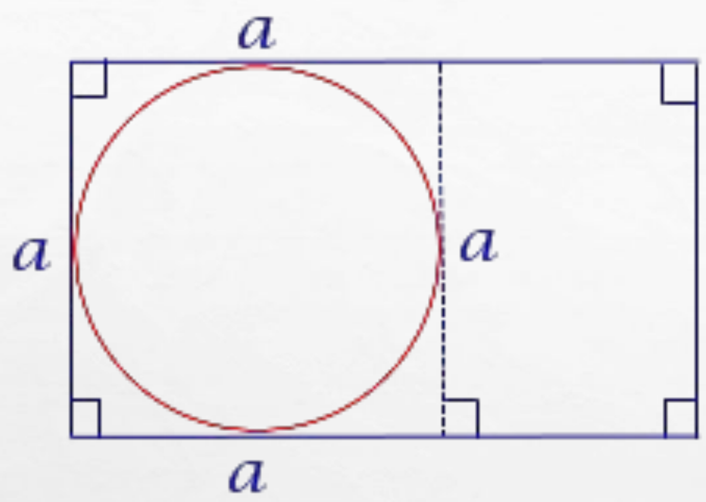

В **любой ромб** можно вписать окружность

Окружность, вписанная в **квадрат**



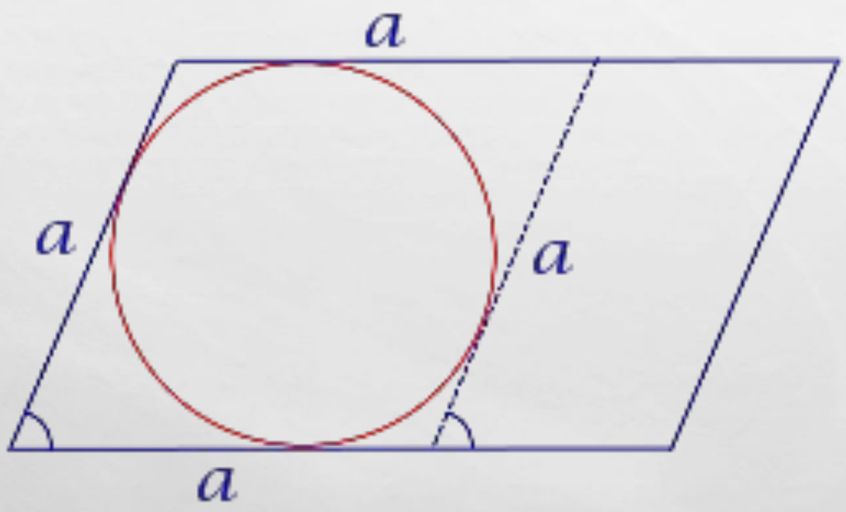

В **любой квадрат** можно вписать окружность

Окружность, вписанная в **прямоугольник**



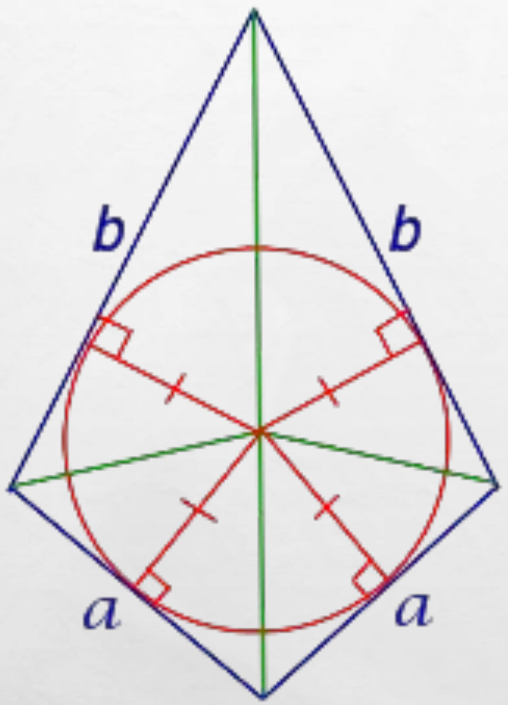

В прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является **квадратом**

Окружность, вписанная в **параллелограмм**



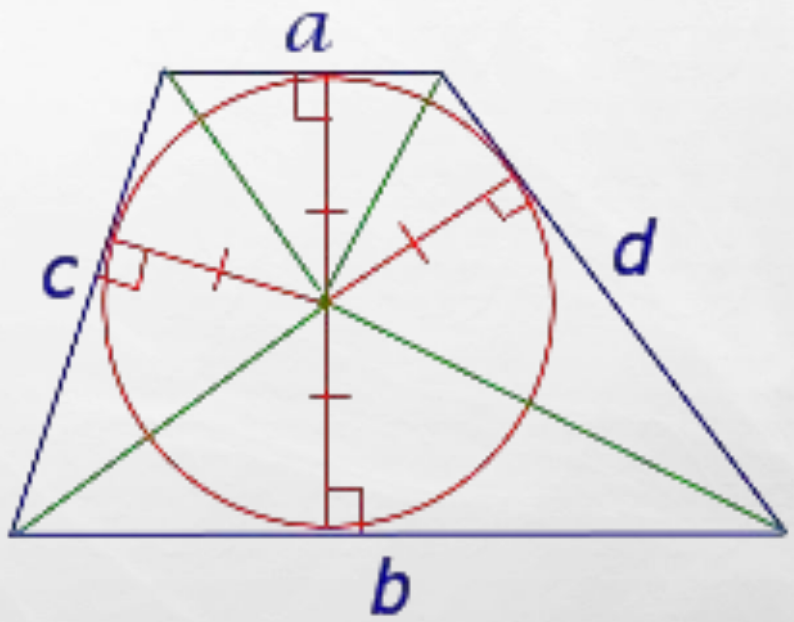

В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является **ромбом**

Окружность, вписанная в **дельтоид**




В **любой дельтоид** можно вписать окружность

Окружность, вписанная в **трапецию**




В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда у трапеции **сумма длин боковых сторон рана сумме длин оснований**

# *Свойства описанного четырехугольника*:

- Суммы длин противолежащих сторон описанного четырехугольника **равны**.

- Биссектрисы углов пересекаются в одной точке, которая является **центром** вписанной в четырехугольник окружности.

- Точки касания вписанной окружности отсекают **равные отрезки** от углов четырёхугольника: AK=AN, BK=BL, CL=CM, DM=DN.

- Площадь равна **S= pr**, p = 0,5 (AB + BC +CD +AD)