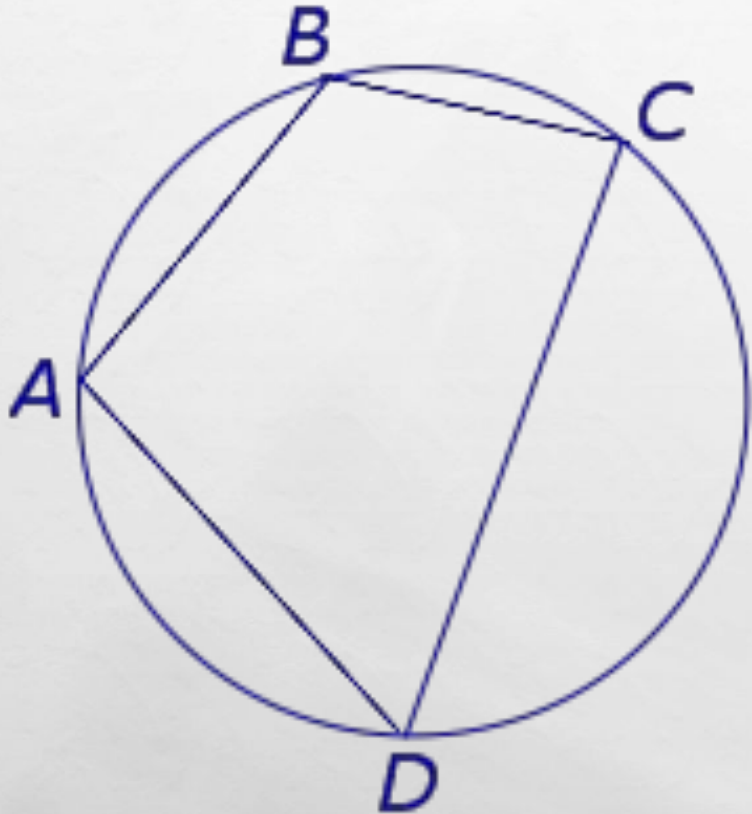


*«Вписанные и описанные  
четырёхугольники»*

**УСТНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО  
ГЕОМЕТРИИ. ЧАСТЬ №3**



# Вписанные четырёхугольники и их свойства



## **Определение.**

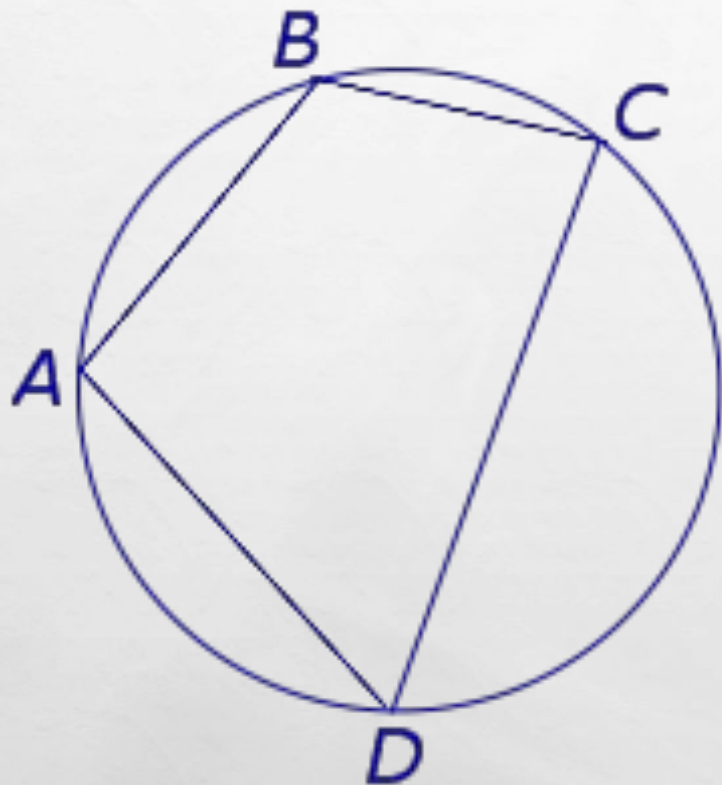
Окружностью, **описанной** около четырёхугольника, называют окружность, проходящую через все вершины четырёхугольника.

В этом случае четырёхугольник называют четырёхугольником, вписанным в окружность, или **вписанным четырёхугольником**.

## Свойство вписанного четырехугольника

**Теорема 1.**

Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы величин его противоположных углов равны  $180^\circ$ .



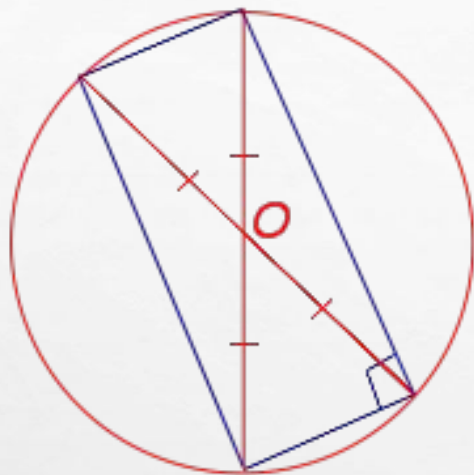
## Признак вписанного четырехугольника

**Теорема 2.**

Если у четырёхугольника суммы величин его противоположных углов равны  $180^\circ$ , то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

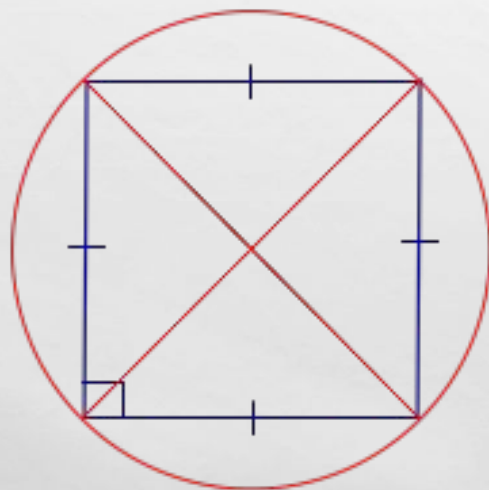


Окружность, описанная около параллелограмма



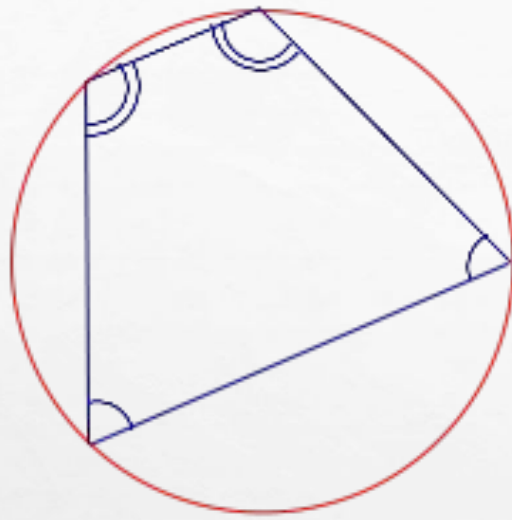
Окружность можно описать около параллелограмма тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.

Окружность, описанная около ромба



Окружность можно описать около ромба тогда и только тогда, когда ромб является квадратом.

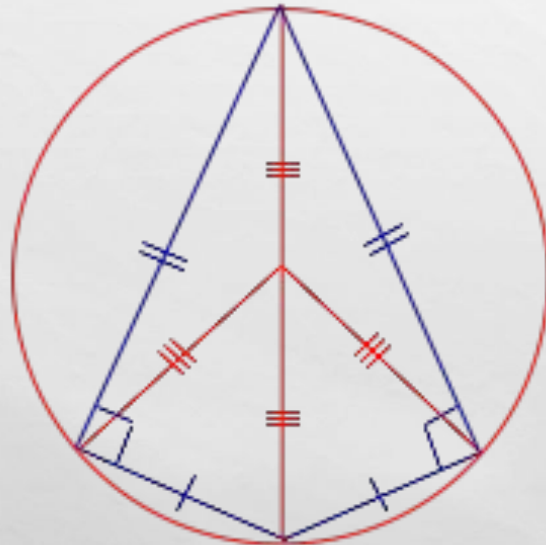
Окружность,  
описанная около  
трапеции



Окружность можно описать около трапеции тогда и только тогда, когда трапеция является равнобедренной трапецией.

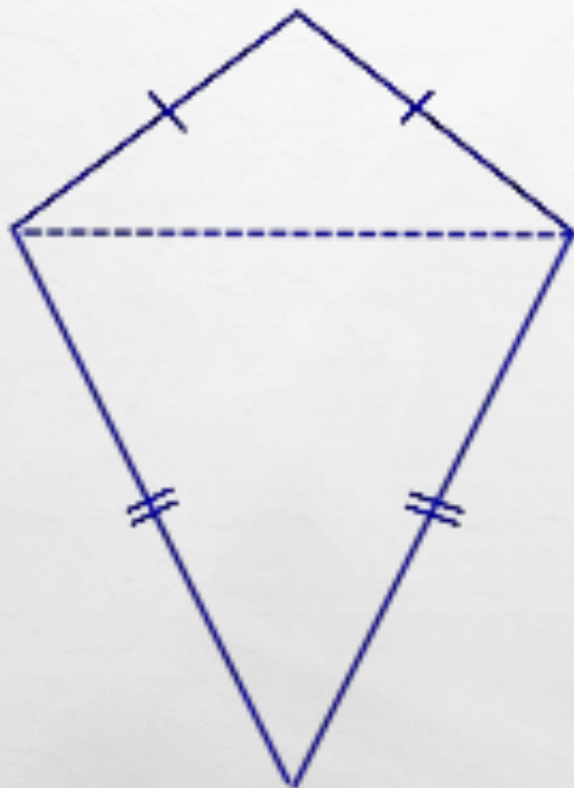
Окружность, описанная  
около дельтоида

Слайд 6



Окружность можно описать около дельтоида тогда и только тогда, когда дельтоид состоит из двух одинаковых прямоугольных треугольников.

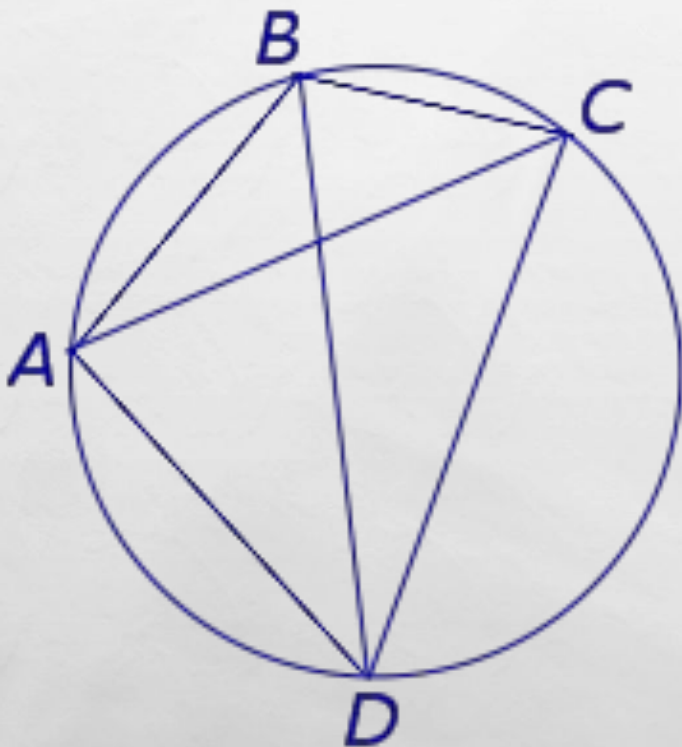
# Дельтоид



*Дельтоид* – это выпуклый четырёхугольник, состоящий из двух различных равнобедренных треугольников с общим основанием, вершины которых лежат по разные стороны от этого основания.

# Произвольный вписанный четырёхугольник

Теорема Птолемея.



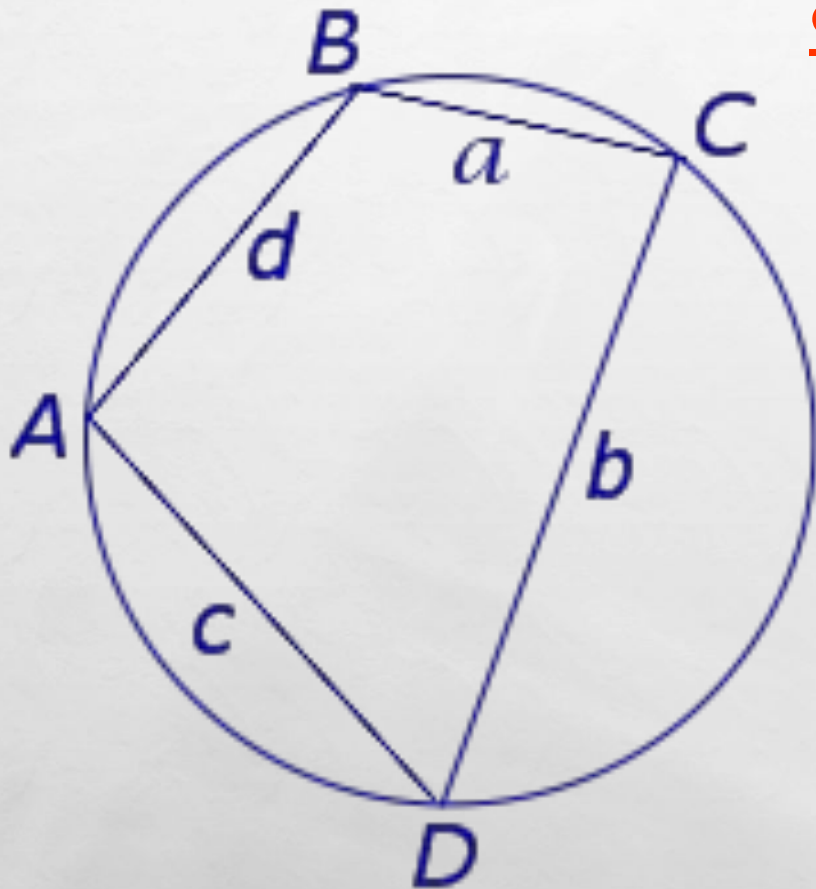
Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

$$AC * BD = AB * CD + BC * AD$$



# Площадь произвольного вписанного четырёхугольника.

## Формула Брахмагупты



$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

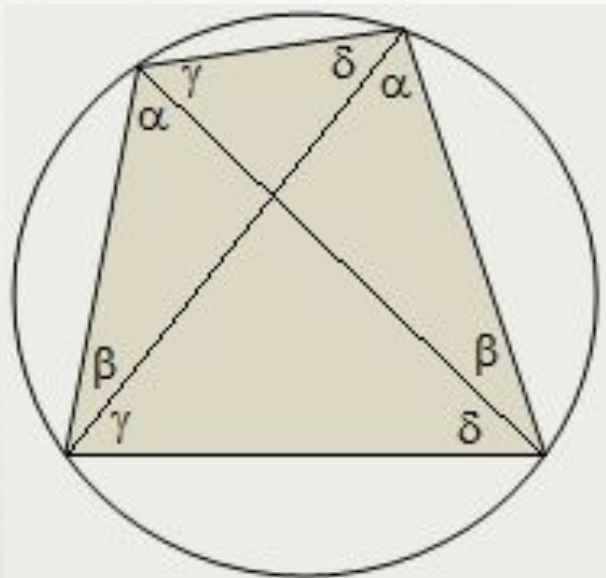
$$p = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$

где  $a, b, c, d$  – длины сторон  
четырёхугольника,  
 $p$  – полупериметр



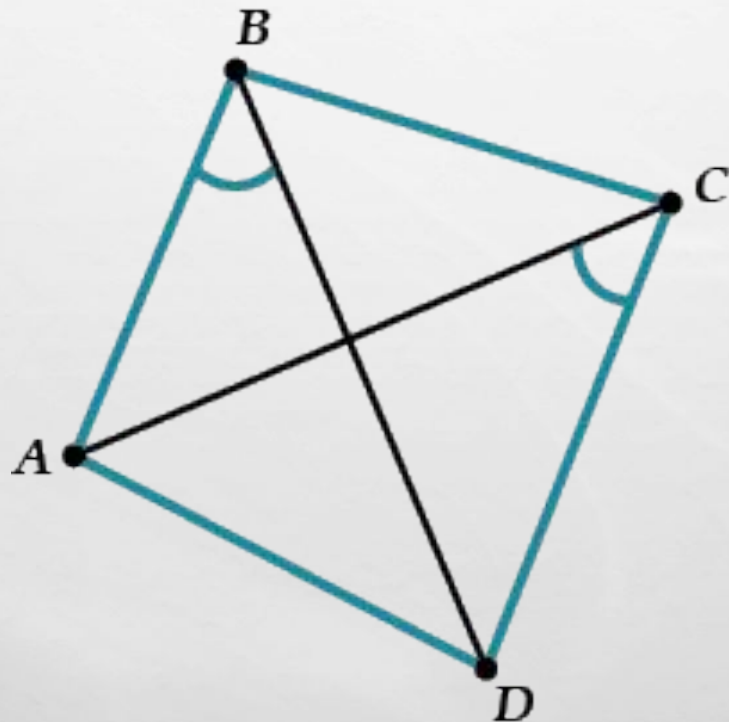
## Связанные углы четырёхугольника

Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают каждый его угол на два угла. Углы, опирающиеся на одну сторону, называются **связанными** углами.



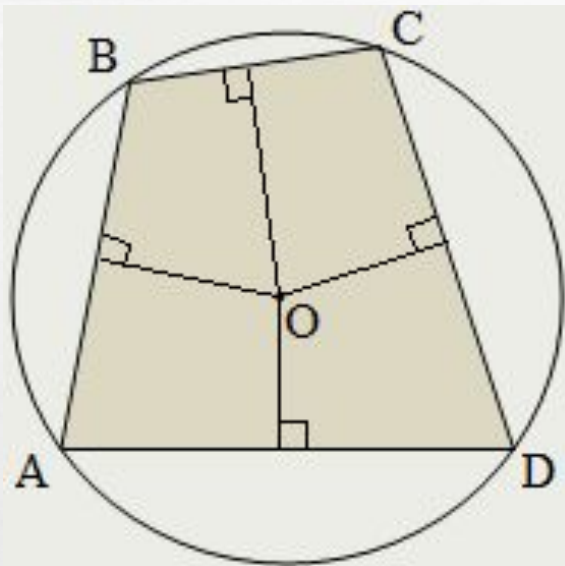
### Свойство.

У вписанного четырёхугольника любые два **связанных** угла **равны**.

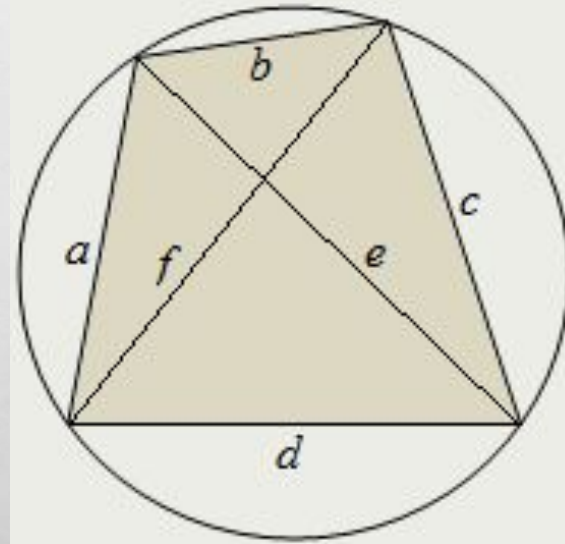


### Признак.

Выпуклый четырёхугольник является **вписанным** тогда и только тогда, когда у него есть хотя бы **одна пара равных связанных углов**.



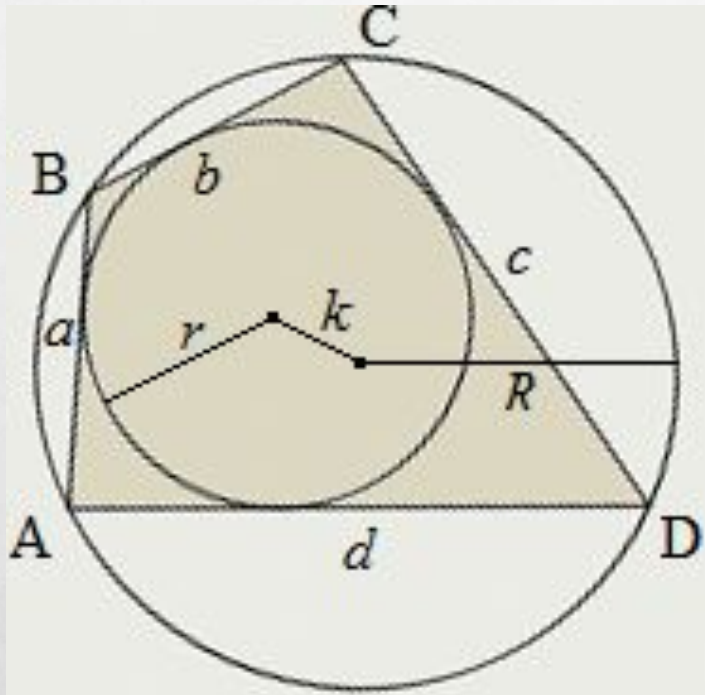
**Центр описанной** около четырёхугольника **окружности** является точкой пересечения всех четырёх **серединных перпендикуляров** сторон этого четырёхугольника.



**Радиус** окружности, описанной около четырёхугольника

$$R = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{(ab + cd)(ad + bc)(ac + bd)}{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}$$

Если четырёхугольник одновременно является описанным и вписанным, то его площадь:  $S = \sqrt{abcd}$



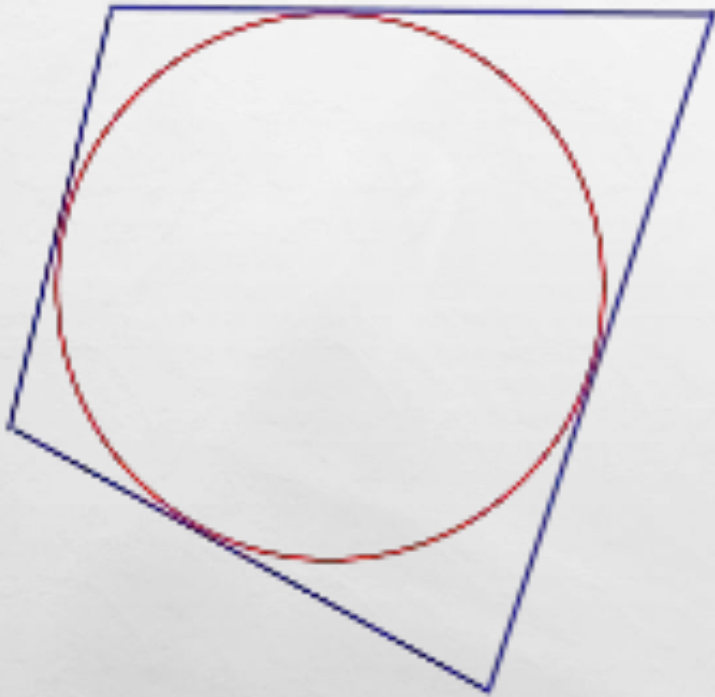
$$S = \frac{p^2}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{D}{2}}$$

Для радиусов описанной и вписанной окружностей данного четырёхугольника и расстояния между центрами этих окружностей выполняется соотношение:

$$\frac{1}{(R+k)^2} + \frac{1}{(R-k)^2} = \frac{1}{r^2}$$



# Описанные четырехугольники



## **Определение.**

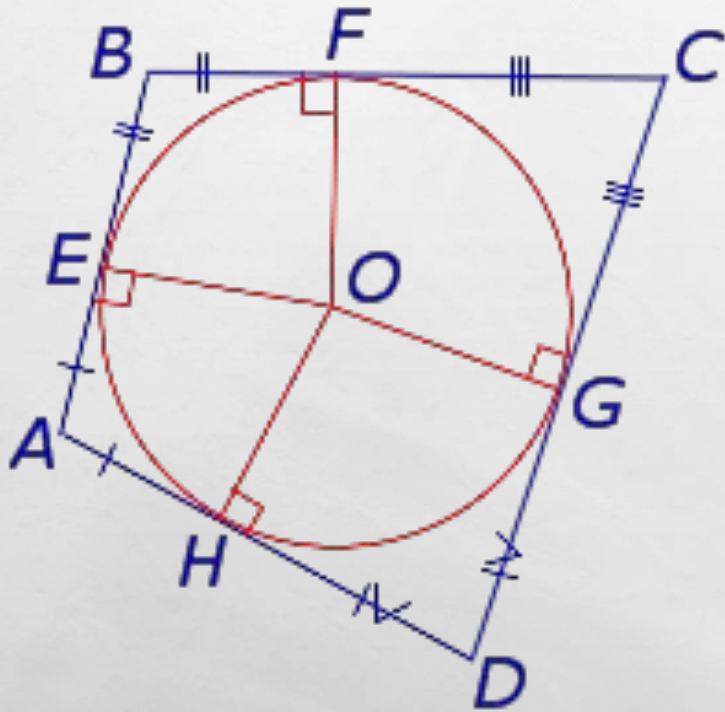
Окружностью, **вписанной** в четырёхугольник, называют окружность, которая касается каждой из сторон четырёхугольника

В этом случае четырёхугольник называют **четырёхугольником, описанным около окружности** или **описанным четырёхугольником**.



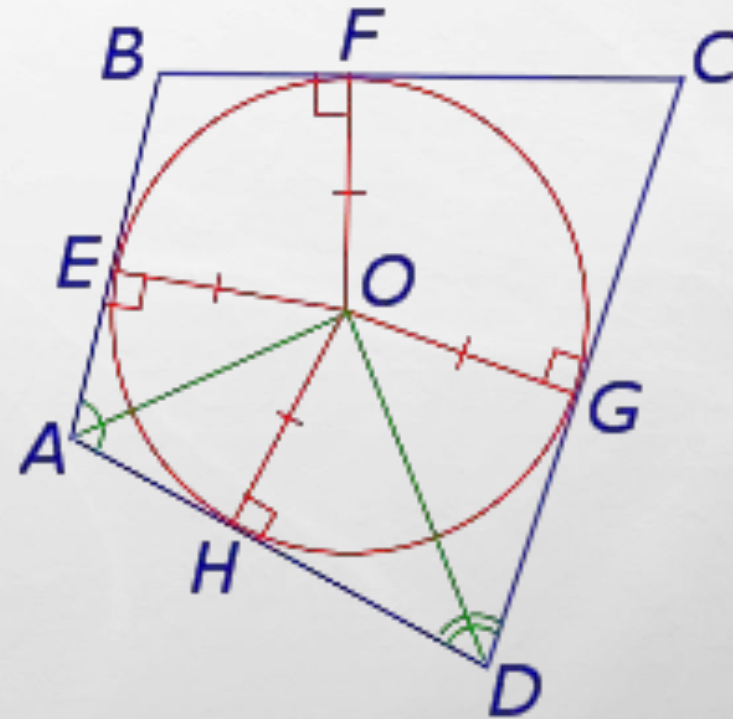
**Теорема 1.**

Если четырёхугольник описан около окружности, то **суммы длин его противоположных сторон равны.**



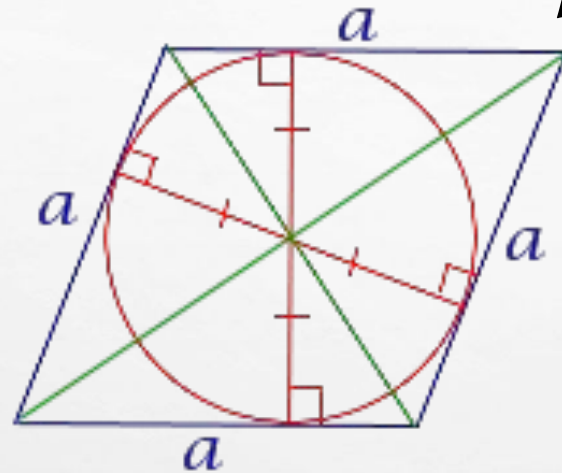
**Теорема 2 (обратная теорема к теореме 1).**

Если у четырёхугольника суммы длин противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник **можно вписать** окружность.



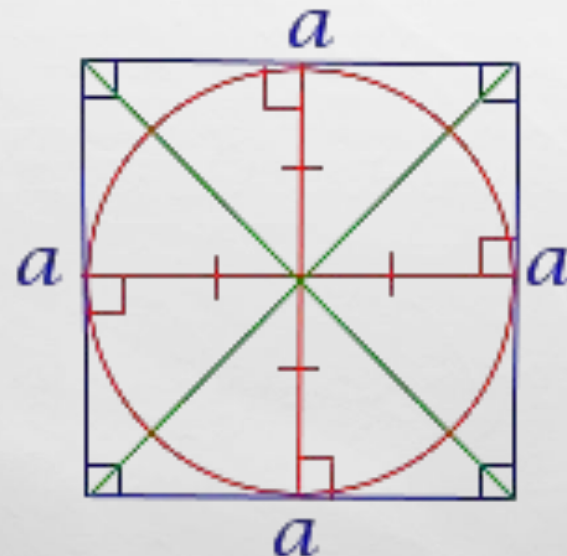
# Примеры описанных четырёхугольников

Окружность,  
вписанная в **ромб**



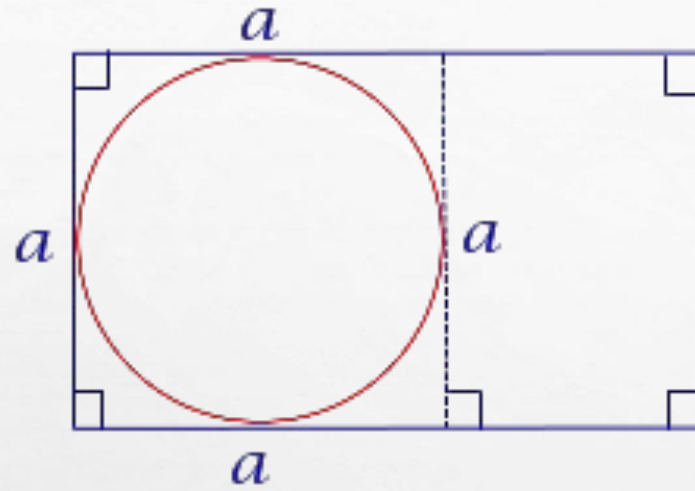
В **любой ромб** можно  
вписать окружность

Окружность, вписанная  
в **квадрат**



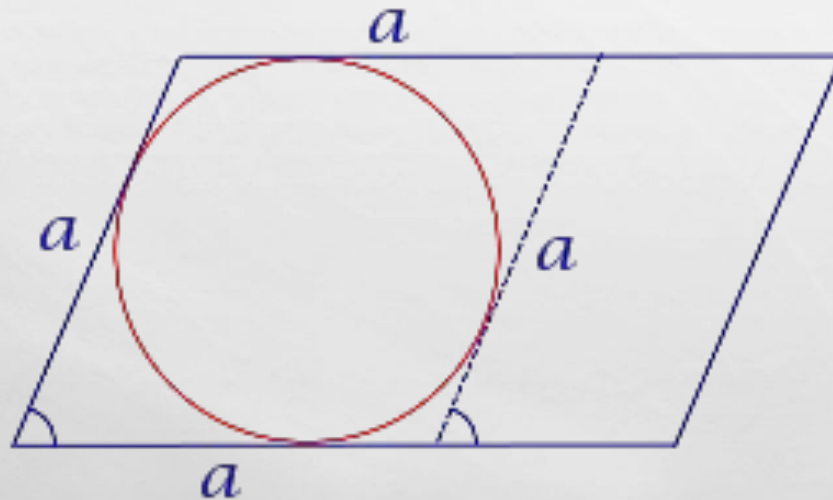
В **любой квадрат** можно  
вписать окружность

Окружность,  
вписанная в  
прямоугольник



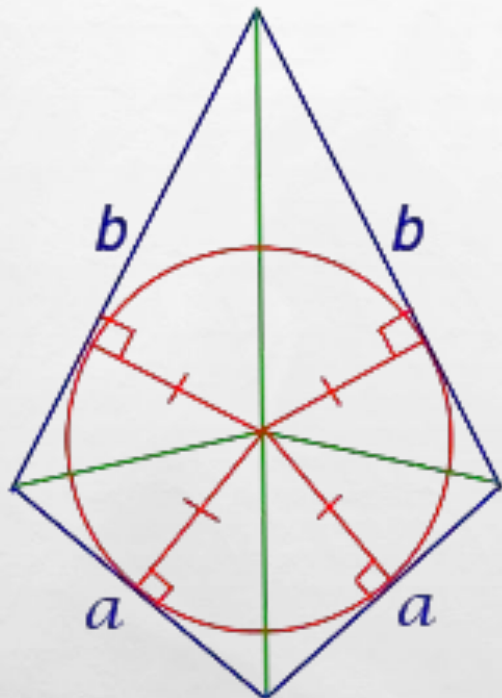
В прямоугольник можно вписать окружность  
тогда и только тогда, когда он является  
квадратом

Окружность,  
вписанная в  
параллелограмм



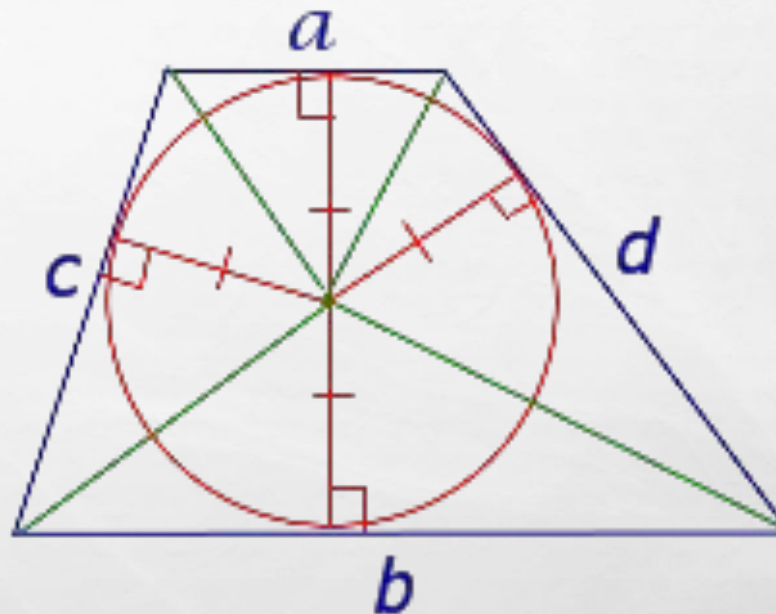
В параллелограмм можно вписать  
окружность тогда и только тогда, когда он  
является ромбом

Окружность, вписанная в дельтоид



В **любой дельтоид** можно вписать окружность

Окружность, вписанная в трапецию



В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда у трапеции **сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований**



## Свойства описанного четырехугольника:

- Суммы длин противоположных сторон описанного четырехугольника **равны**.
- Биссектрисы углов пересекаются в одной точке, которая является **центром** вписанной в четырехугольник окружности.
- Точки касания вписанной окружности отсекают **равные отрезки** от углов четырехугольника:  $AK=AN$ ,  $BK=BL$ ,  $CL=CM$ ,  $DM=DN$ .
- Площадь равна  **$S=pr$** ,  $p = 0,5 (AB + BC + CD + AD)$

