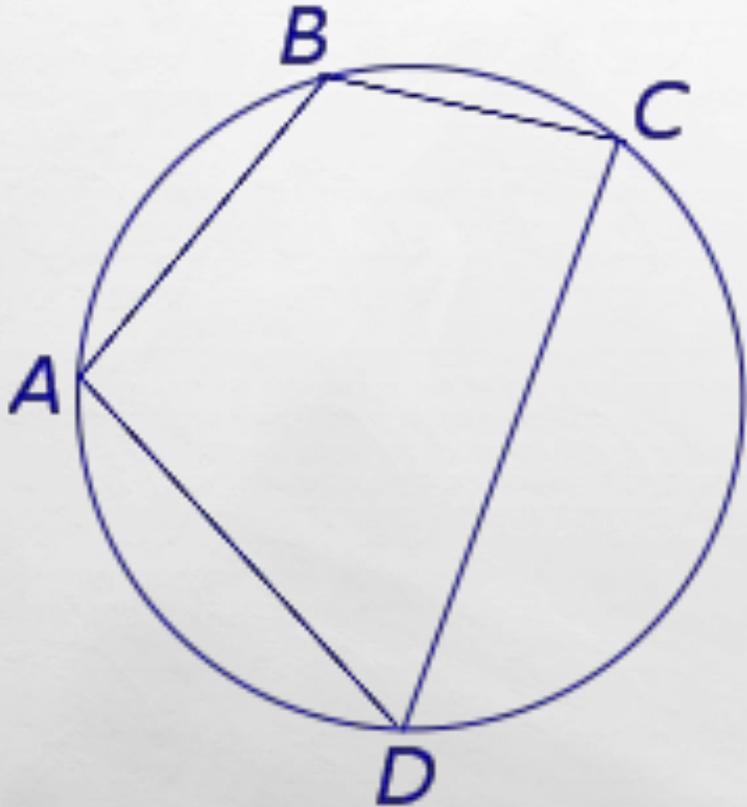


*«Вписанные и описанные
четырёхугольники»*

**УСТНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО
ГЕОМЕТРИИ. ЧАСТЬ №3**



Вписанные четырёхугольники и их свойства



Определение.

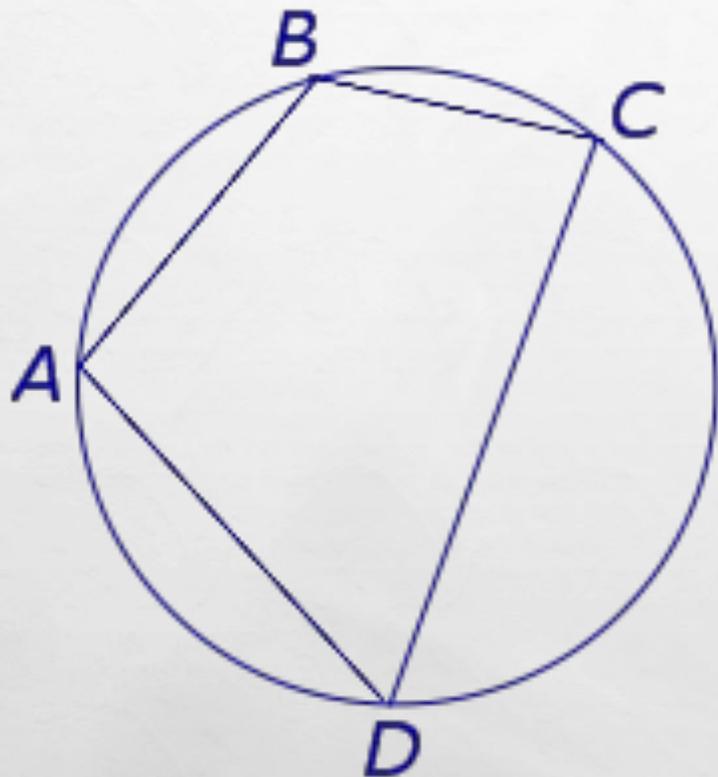
Окружностью, **описанной** около четырёхугольника, называют окружность, проходящую через все вершины четырёхугольника.

В этом случае четырёхугольник называют четырёхугольником, вписанным в окружность, или **вписанным четырёхугольником**.

Свойство вписанного четырехугольника

Теорема 1.

Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы величин его противоположных углов равны 180° .

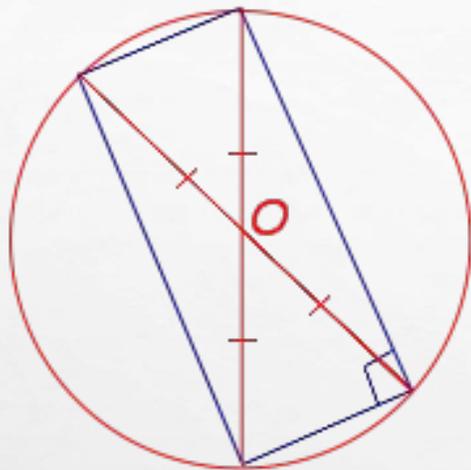


Признак вписанного четырехугольника

Теорема 2.

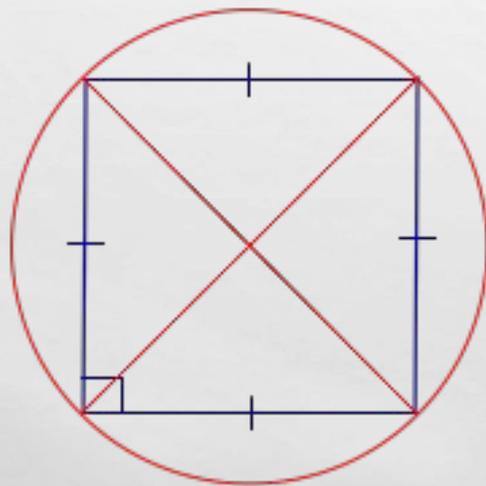
Если у четырёхугольника суммы величин его противоположных углов равны 180° , то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Окружность, описанная около параллелограмма



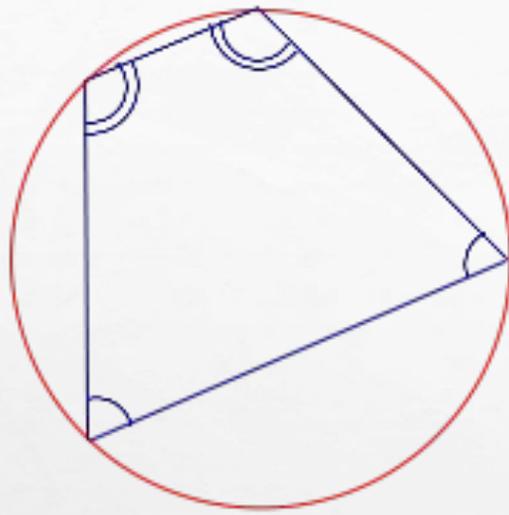
Окружность можно описать около параллелограмма тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.

Окружность, описанная около ромба



Окружность можно описать около ромба тогда и только тогда, когда ромб является квадратом.

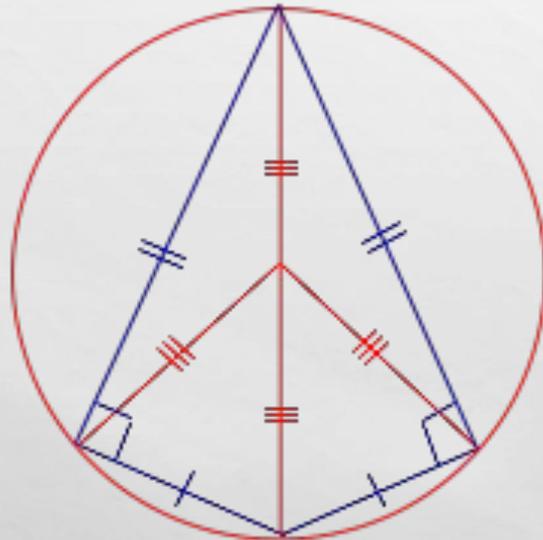
Окружность,
описанная около
трапеции



Окружность можно описать около трапеции тогда и только тогда, когда трапеция является равнобедренной трапецией.

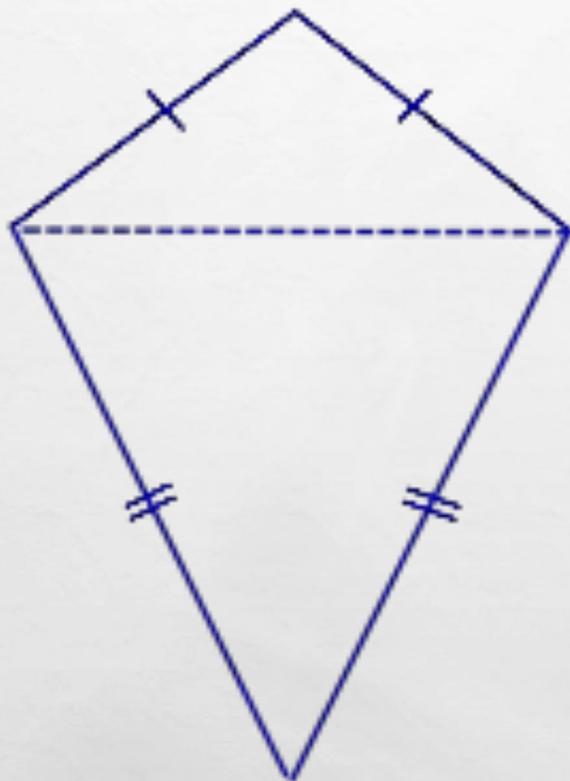
Окружность, описанная
около дельтоида

Слайд 6



Окружность можно описать около дельтоида тогда и только тогда, когда дельтоид состоит из двух одинаковых прямоугольных треугольников.

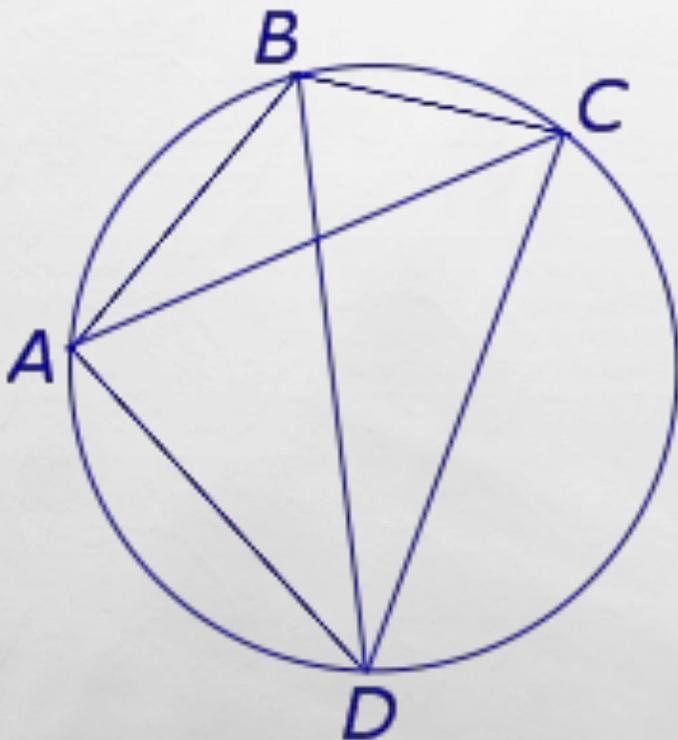
Дельтоид



Дельтоид – это выпуклый четырёхугольник, состоящий из двух различных равнобедренных треугольников с общим основанием, вершины которых лежат по разные стороны от этого основания.

Произвольный вписанный четырёхугольник

Теорема Птолемея.

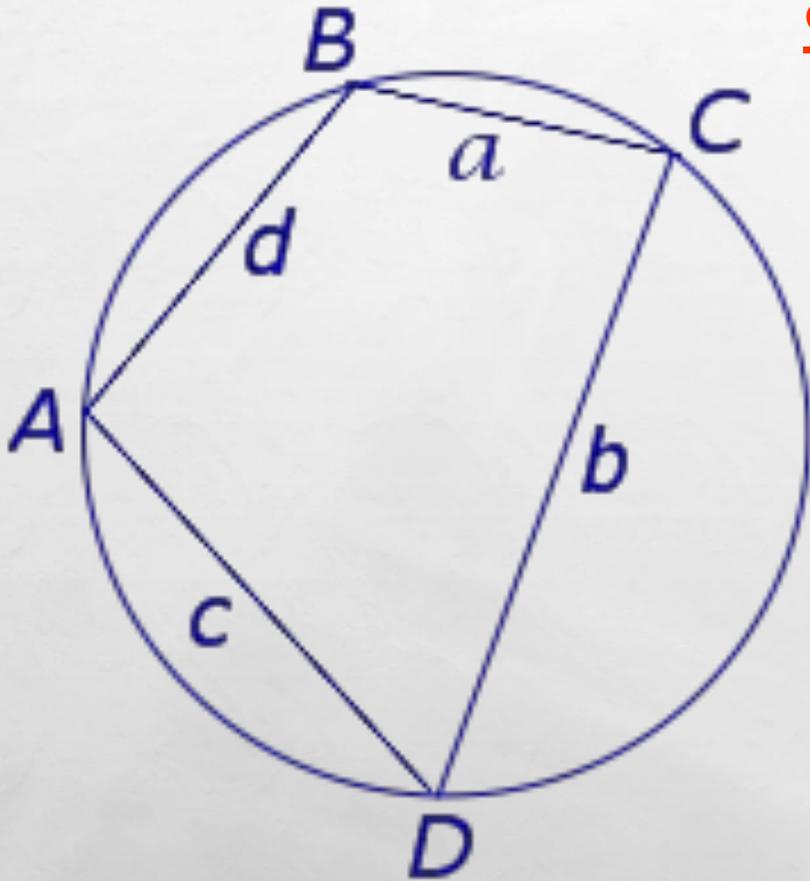


Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

$$AC * BD = AB * CD + BC * AD$$

Площадь произвольного вписанного четырёхугольника.

Формула Брахмагупты



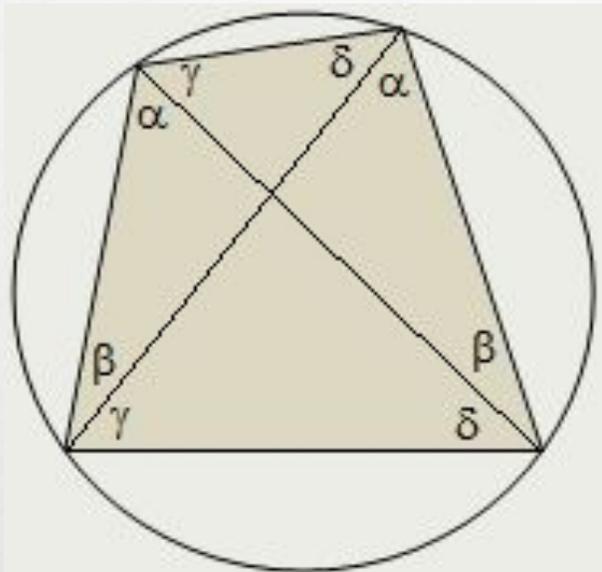
$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$

где a, b, c, d – длины сторон
четырёхугольника,
 p – полупериметр

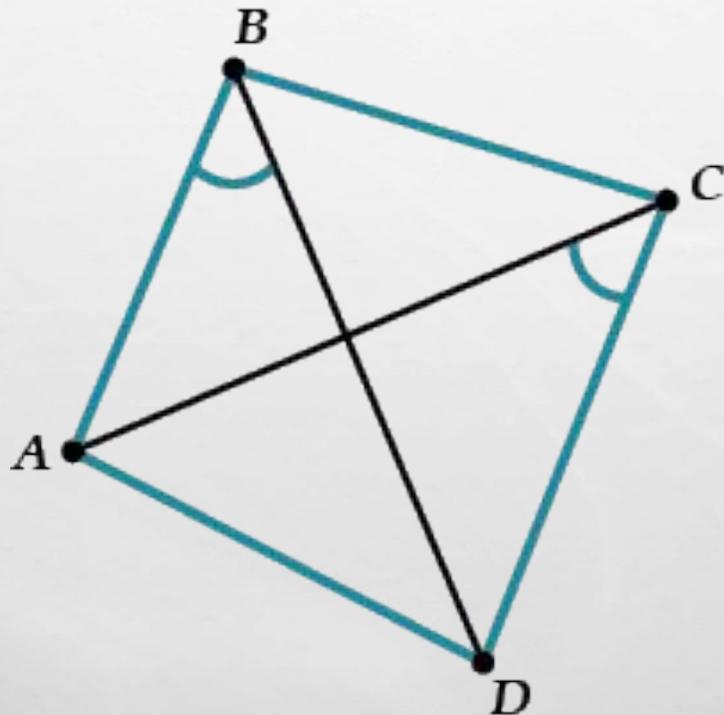
Связанные углы четырёхугольника

Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают каждый его угол на два угла. Углы, опирающиеся на одну сторону, называются **связанными** углами.



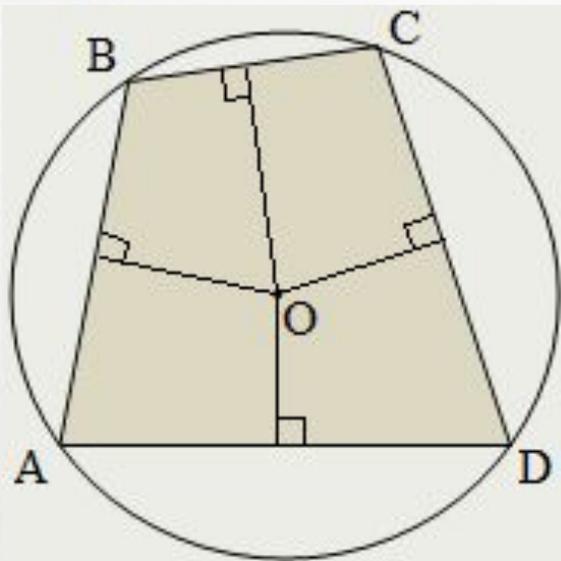
Свойство.

У вписанного четырёхугольника любые два **связанных** угла **равны**.

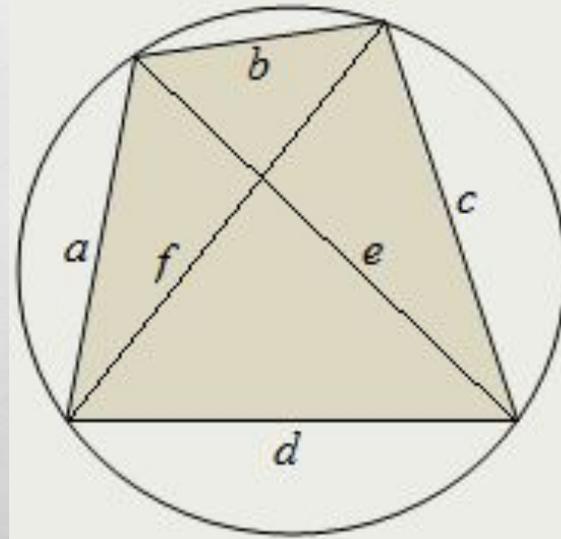


Признак.

Выпуклый четырёхугольник является **вписанным** тогда и только тогда, когда у него есть хотя бы **одна пара равных связанных углов**.



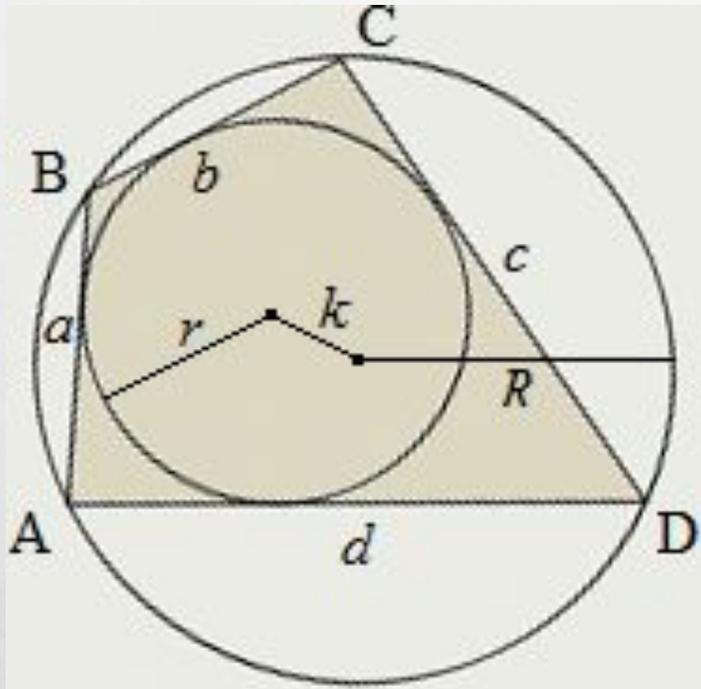
Центр описанной около четырёхугольника **окружности** является точкой пересечения всех четырёх **серединных перпендикуляров** сторон этого четырёхугольника.



Радиус окружности, описанной около четырёхугольника

$$R = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{(ab + cd)(ad + bc)(ac + bd)}{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}$$

Если четырёхугольник одновременно является описанным и вписанным, то его площадь: $S = \sqrt{abcd}$

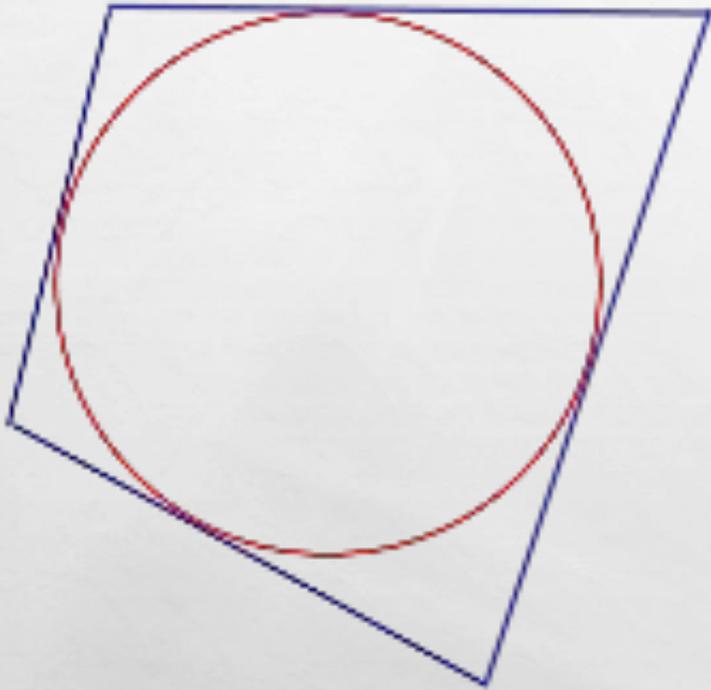


$$S = \frac{p^2}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{D}{2}}$$

Для радиусов описанной и вписанной окружностей данного четырёхугольника и расстояния между центрами этих окружностей выполняется соотношение:

$$\frac{1}{(R+k)^2} + \frac{1}{(R-k)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Описанные четырехугольники



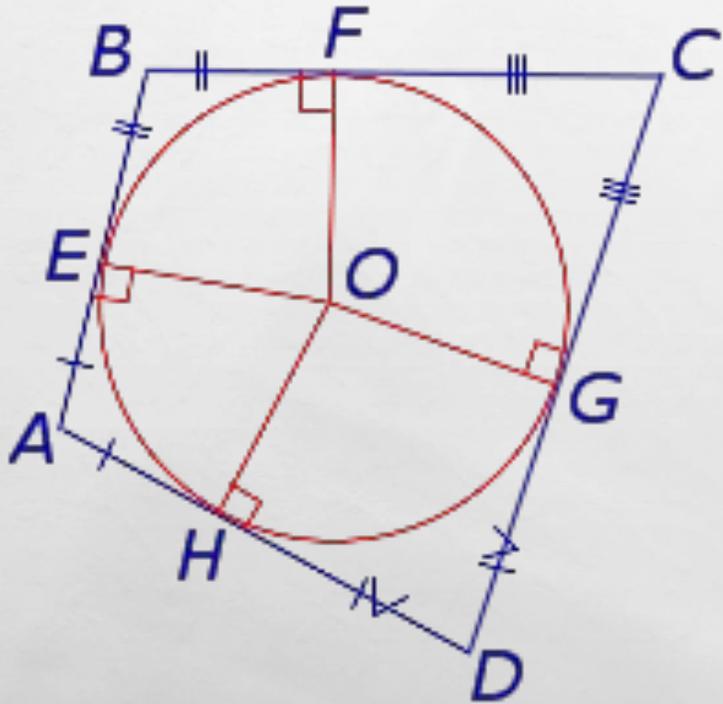
Определение.

Окружностью, **вписанной** в четырёхугольник, называют окружность, которая касается каждой из сторон четырёхугольника

В этом случае четырёхугольник называют **четырёхугольником, описанным около окружности** или **описанным четырёхугольником**.

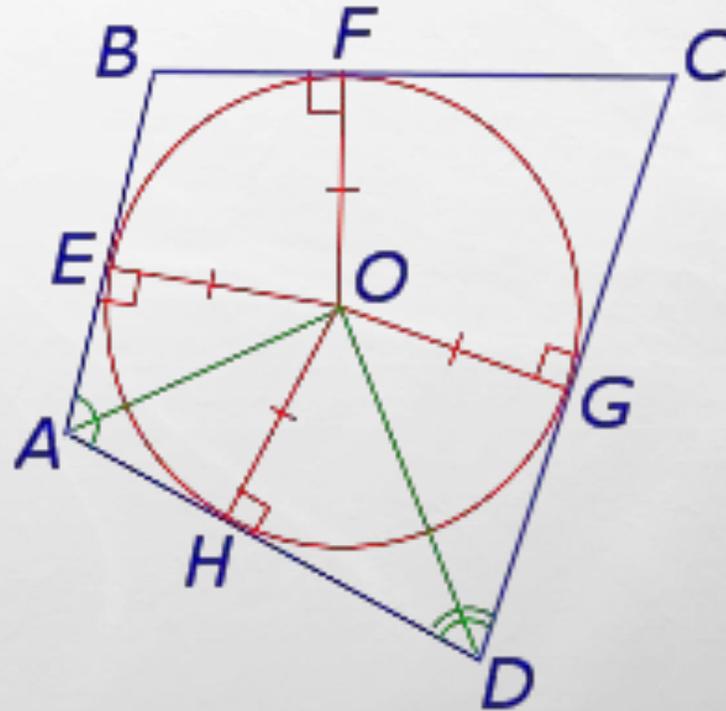
Теорема 1.

Если четырёхугольник описан около окружности, то **суммы длин его противоположных сторон равны**.



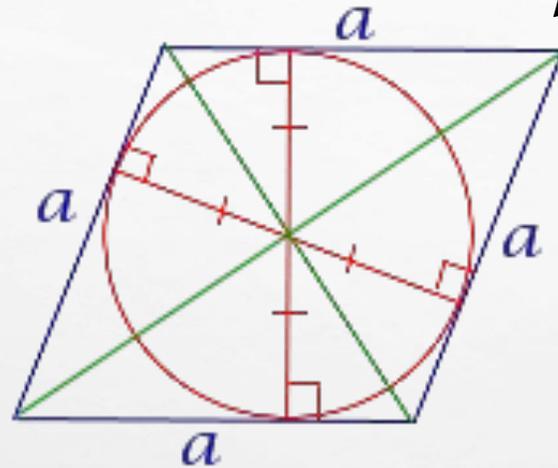
Теорема 2 (обратная теорема к теореме 1).

Если у четырёхугольника суммы длин противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник **можно вписать** окружность.



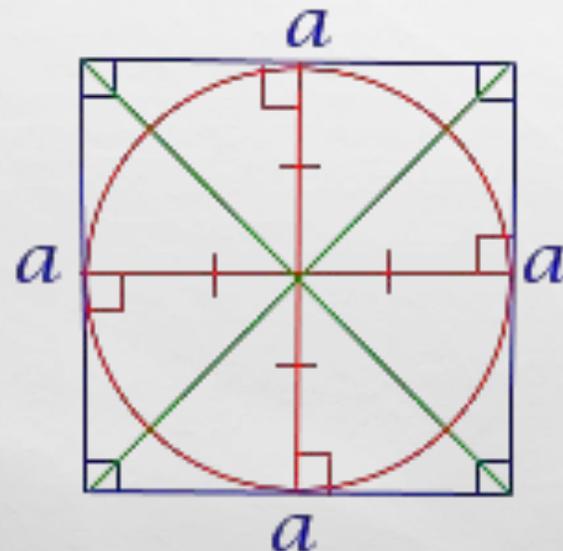
Примеры описанных четырёхугольников

Окружность,
вписанная в **ромб**



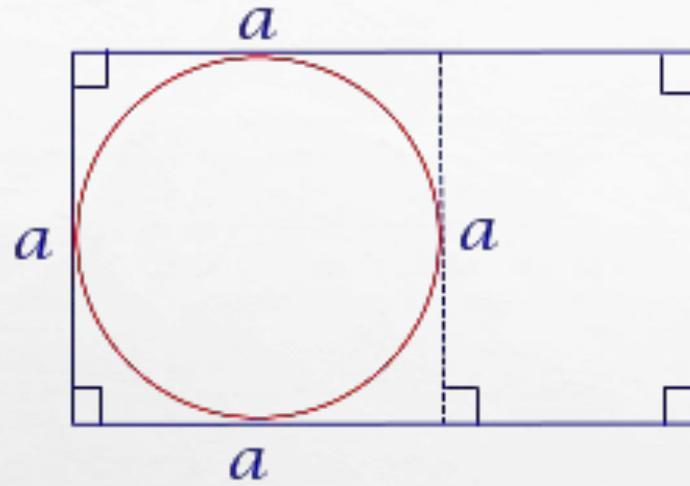
В **любой ромб** можно
вписать окружность

Окружность, вписанная
в **квадрат**



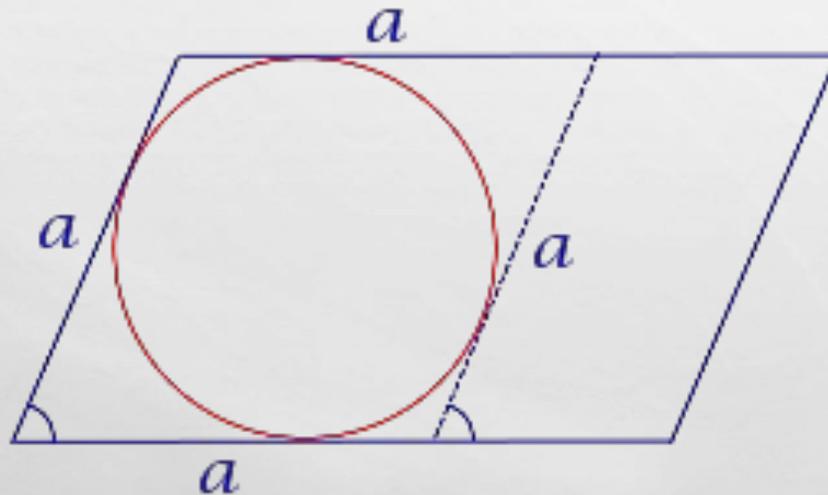
В **любой квадрат** можно
вписать окружность

Окружность,
вписанная в
прямоугольник



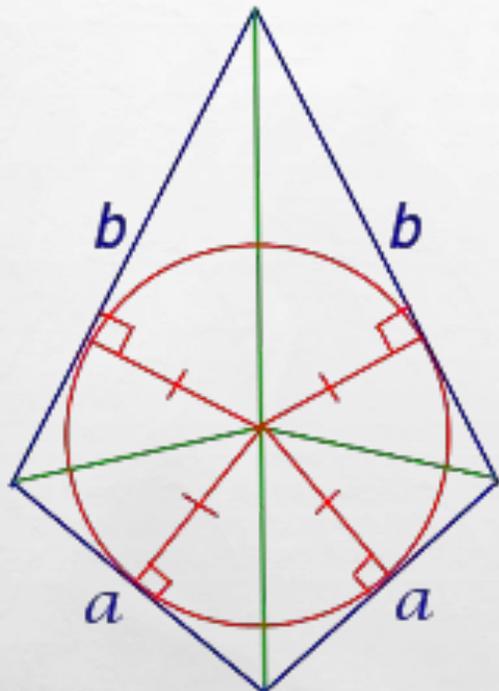
В прямоугольник можно вписать окружность
тогда и только тогда, когда он является
квадратом

Окружность,
вписанная в
параллелограмм



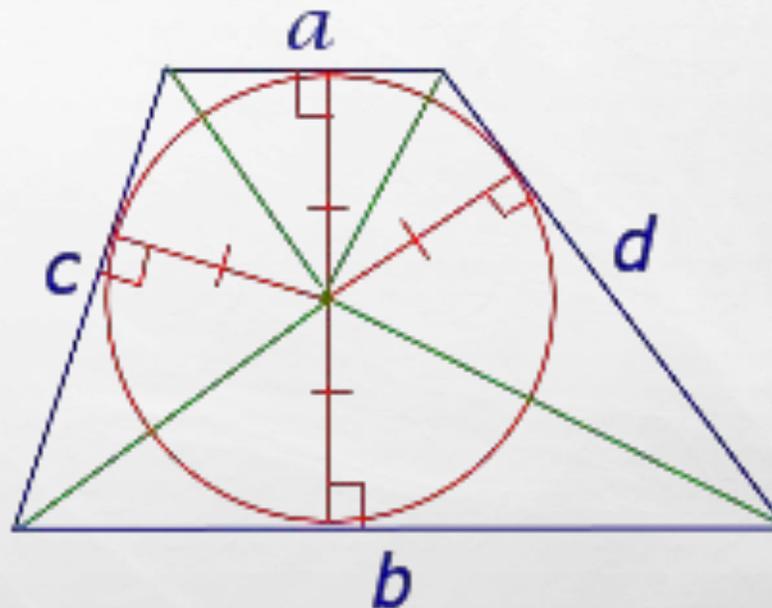
В параллелограмм можно вписать
окружность тогда и только тогда, когда он
является ромбом

Окружность, вписанная в дельтоид



В **любой дельтоид** можно вписать окружность

Окружность, вписанная в трапецию



В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда у трапеции **сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований**

Свойства описанного четырехугольника:

- Суммы длин противоположных сторон описанного четырехугольника **равны**.
- Биссектрисы углов пересекаются в одной точке, которая является **центром** вписанной в четырехугольник окружности.
- Точки касания вписанной окружности отсекают **равные отрезки** от углов четырехугольника: $AK=AN$, $BK=BL$, $CL=CM$, $DM=DN$.
- Площадь равна **$S=pr$** , $p = 0,5 (AB + BC + CD + AD)$

