



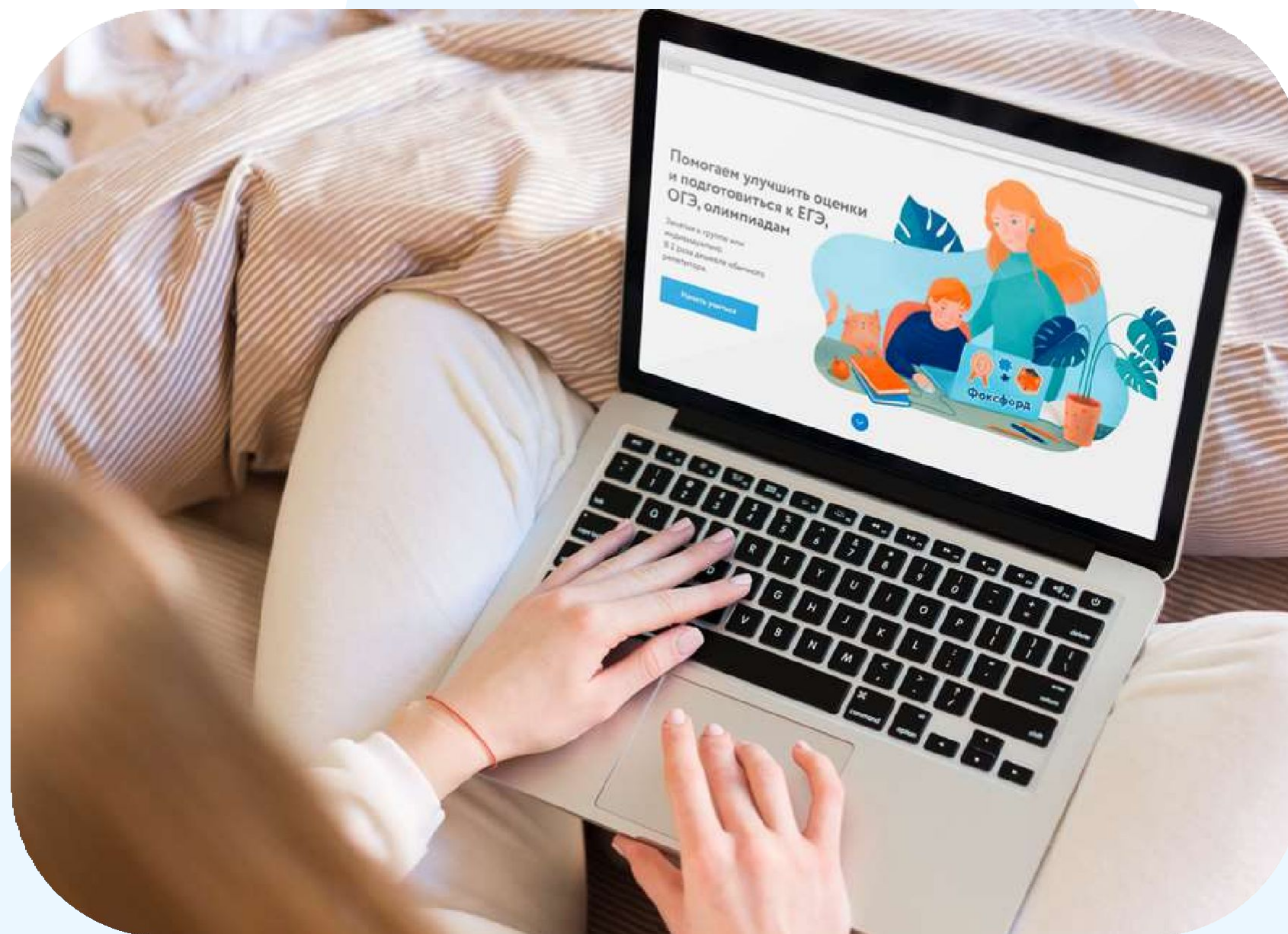
Свойства тригонометрических функций и их графики



Цель урока: изучить тригонометрические функции.

Задачи урока:

1. Изучить свойства тригонометрических функций.
2. Построить графики функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.
3. Научиться решать тригонометрические уравнения и неравенства с помощью графиков.



Тригонометрические функции и их свойства



Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ называются тригонометрическими функциями.

Областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество всех действительных чисел \mathbb{R} .

Областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество чисел $\mathbb{R} / \{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Областью определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество $\mathbb{R} / \{x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Множеством значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является отрезок $-1 \leq y \leq 1$.

Множеством значений функций $y = \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ является множество всех действительных чисел \mathbb{R} .

Функция $y = \cos x$ — четная, а $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетные.

Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Минимальное положительное такое T называют **периодом** функции $f(x)$.

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ — периодические с периодом 2π , а $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ — с периодом π .

Задание

1

Найдите множество значений функции:

$$1) y = \frac{1 + 7 \cos^2 x}{5};$$

$$2) y = 1 - 3|\cos x|.$$



Задание 2

Определите, является
чётной, нечётной или
общего вида:

- 1) $y = \sin(\cos x)$;
- 2) $y = \sin \sqrt{x}$;
- 3) $y = |x| + \cos x$;
- 4) $y = x^2 + \sin x$.

функция
является
функцией

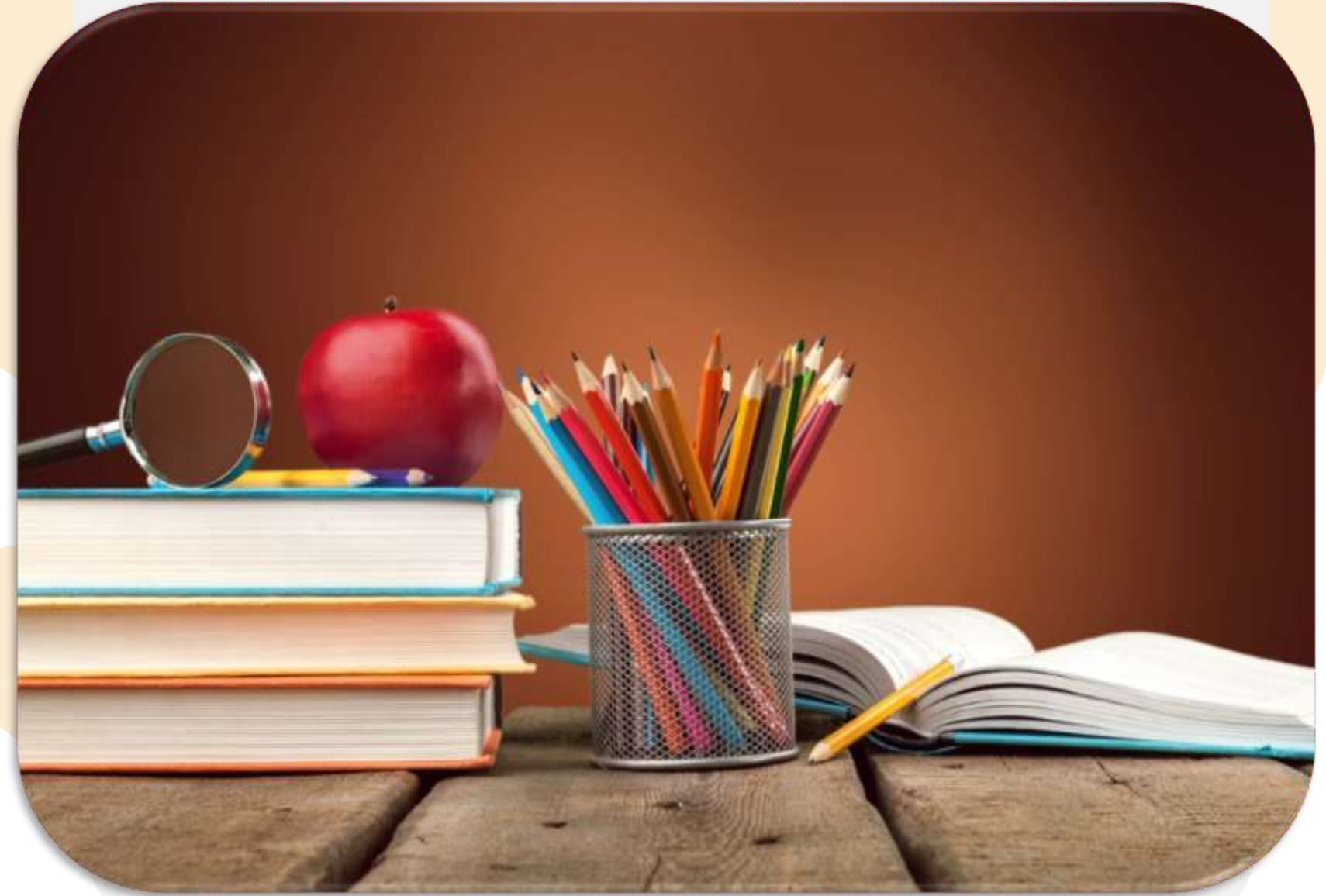


Задание 3

Доказать, что число T является периодом функции:

$$1) y = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}, T = \pi;$$

$$2) y = \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x}, T = 2\pi.$$





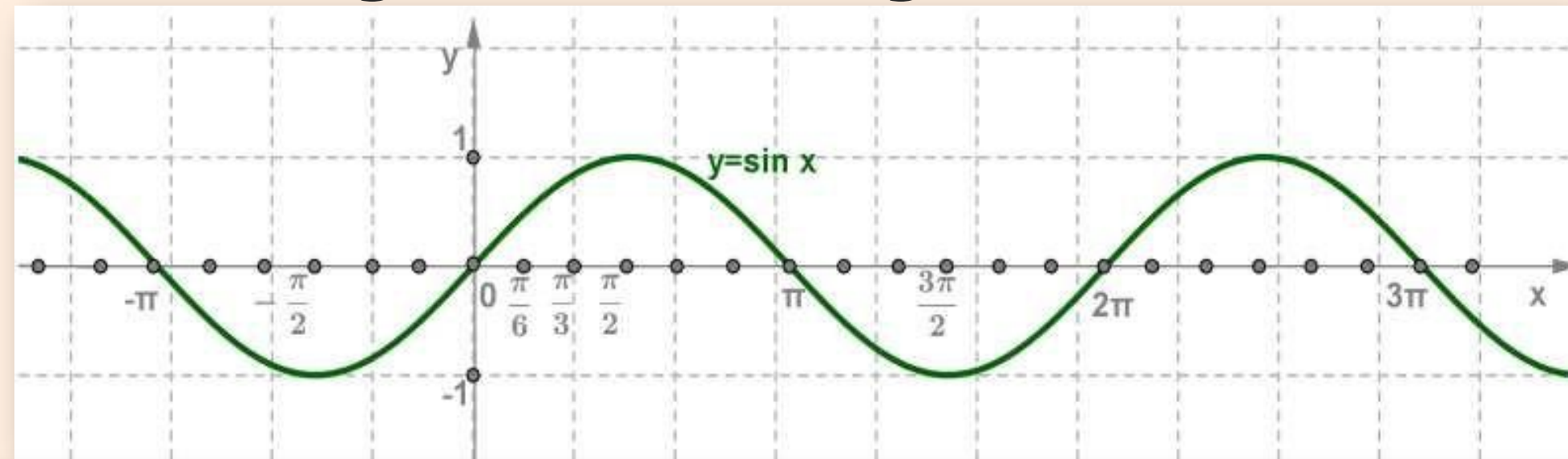
Задание 4

Найти наименьший
положительный период функции:

$$1) y = \cos \frac{2}{5} x; \quad 2) y = \sin \frac{3}{2} x.$$



Функция $y = \sin x$



Свойства функции

1. Область определения: $x \in \mathbb{R}$.
2. Множество значений: $y \in [-1; 1]$.
3. Периодическая с наименьшим периодом $T = 2\pi$.
4. Нечётная.
5. Функция принимает:
 - значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 - наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 - наименьшее значение, равное (-1) , при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 - положительные значения на интервалах $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;
 - отрицательные значения на интервалах $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. Возрастает на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$;
 - убывает на отрезке $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

Задание 5

Используя свойства возрастания и убывания функции $y = \sin x$,

сравните:

$$1) \sin \frac{9\pi}{10} \text{ и } \sin \frac{11\pi}{10};$$

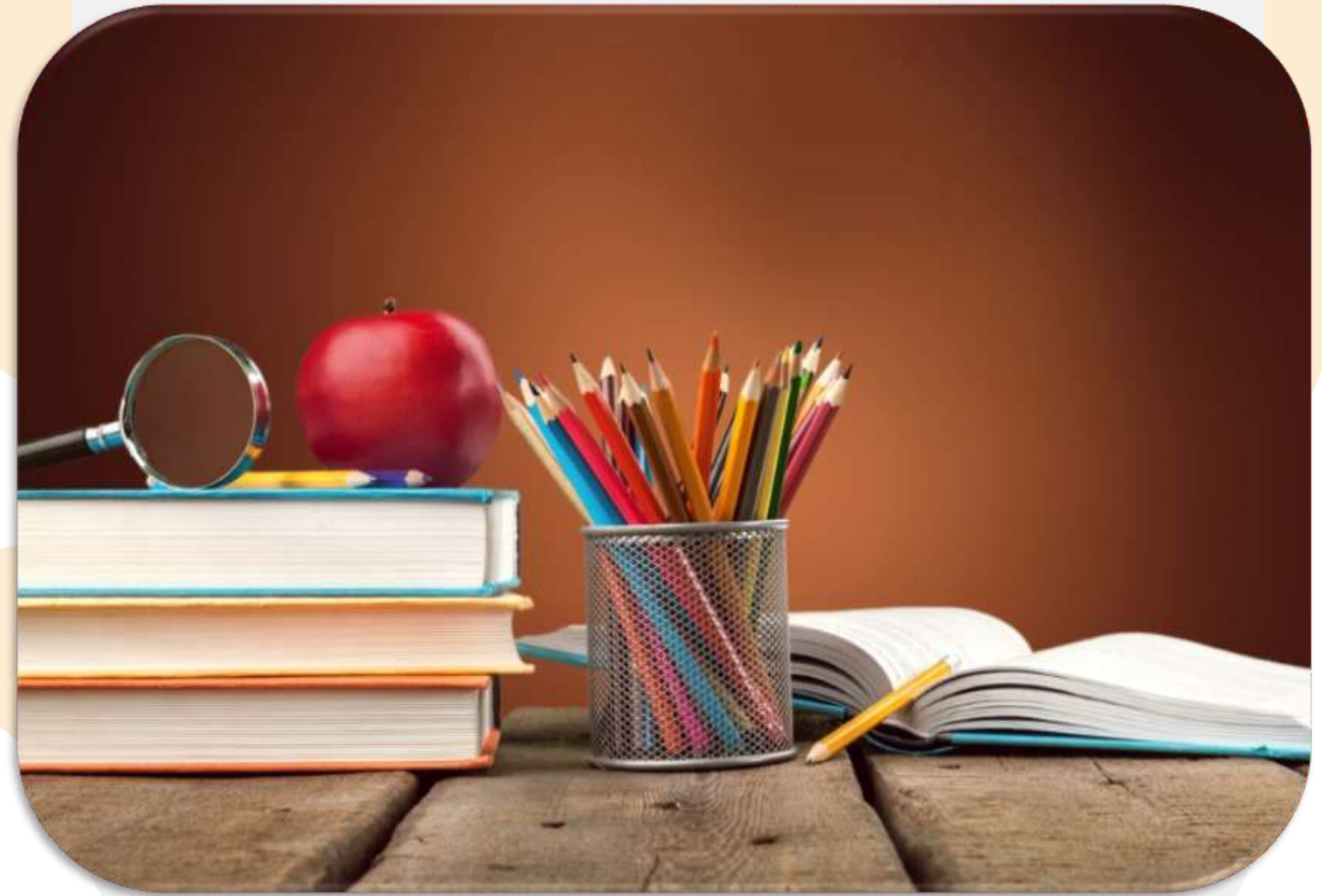
$$2) \sin \left(-\frac{8\pi}{7} \right) \text{ и } \sin \left(-\frac{9\pi}{8} \right).$$



Задание 6

Найдите все корни уравнения,
принадлежащие промежутку
 $[-\pi; 2\pi]$:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$





Задание 7

Найдите все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[-\pi; 2\pi]$:

$$\sin x > \frac{1}{2}$$





Задание 8

Найдите область определения и постройте график функции

$$y = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$$



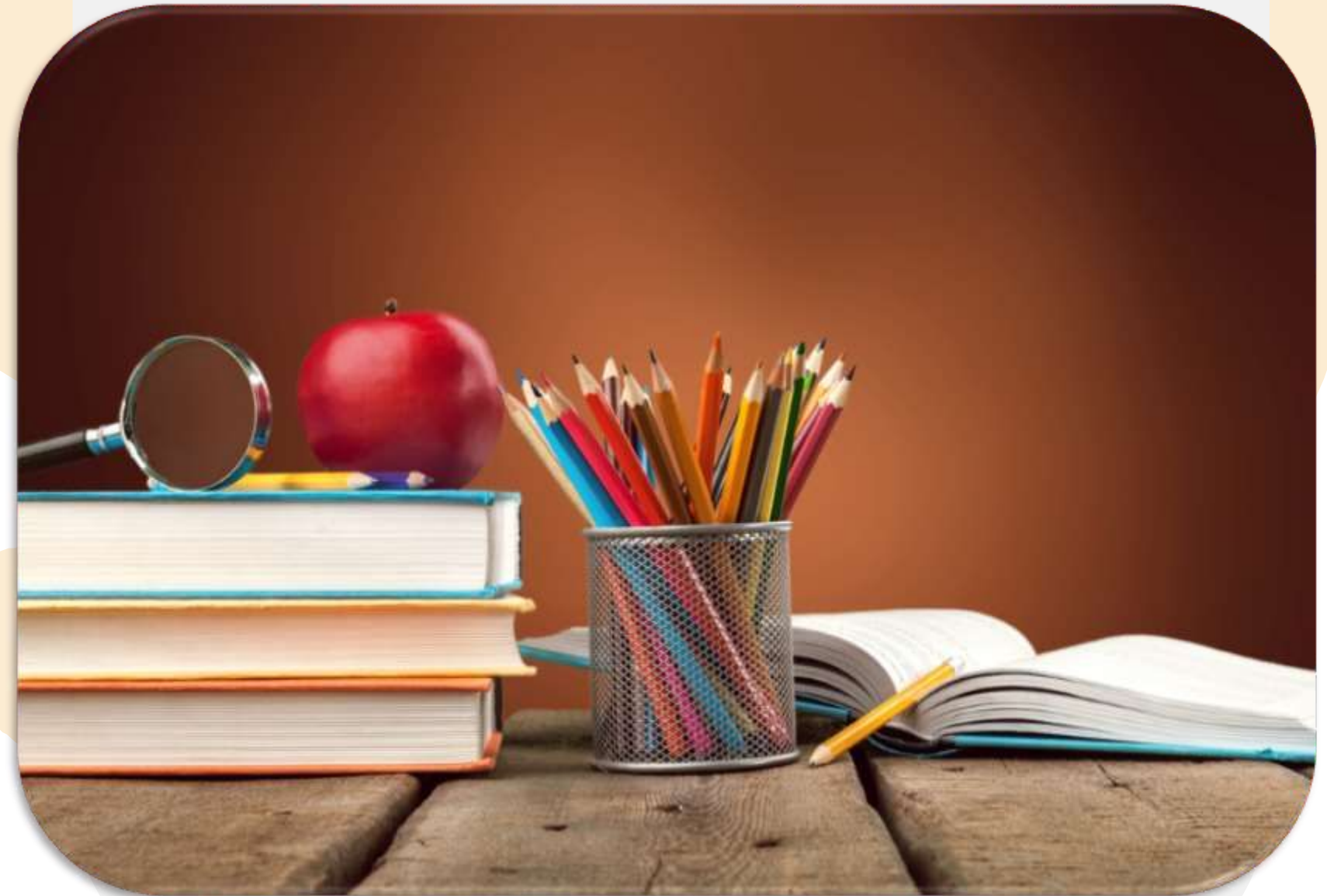
Задание 9

Постройте графики указанных функций, преобразуя график функции $y = \sin x$

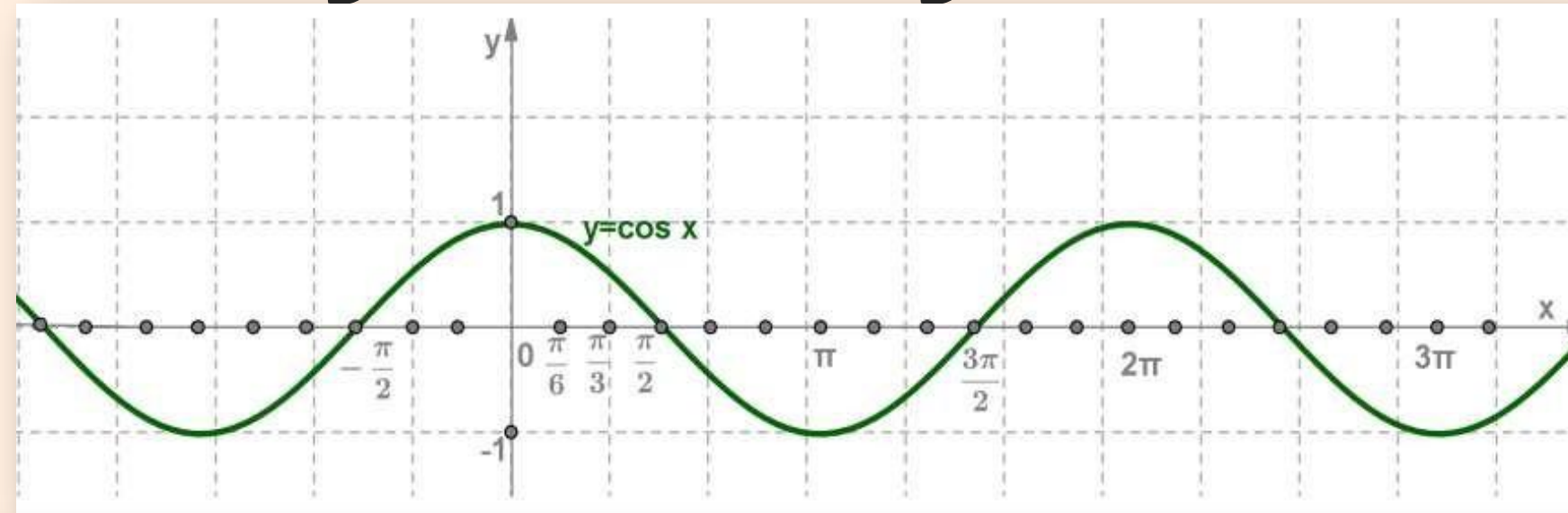
1) $y = 1 + \sin x$;

2) $y = -\sin x$;

3) $y = |\sin x|$.



Функция $y = \cos x$



Свойства функции

1. Область определения: $x \in \mathbb{R}$.
2. Множество значений: $y \in [-1; 1]$.
3. Периодическая с наименьшим периодом $T = 2\pi$.
4. Чётная.
5. Функция принимает:
 - значение, равное 0, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 - наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 - наименьшее значение, равное (-1) , при $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 - положительные значения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$;
 - отрицательные значения на интервале $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.
6. Возрастает на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$;
 - убывает на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Задание

10

Используя свойства возрастания и убывания функции $y = \cos x$,

1) $\cos \frac{11\pi}{8}$ и $\cos \frac{13\pi}{8}$;

2) $\cos -\frac{7\pi}{6}$ и $\cos -\frac{6\pi}{5}$.



Задание

11

Найдите все корни уравнения,
принадлежащие промежутку
 $[-3\pi; \pi]$:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



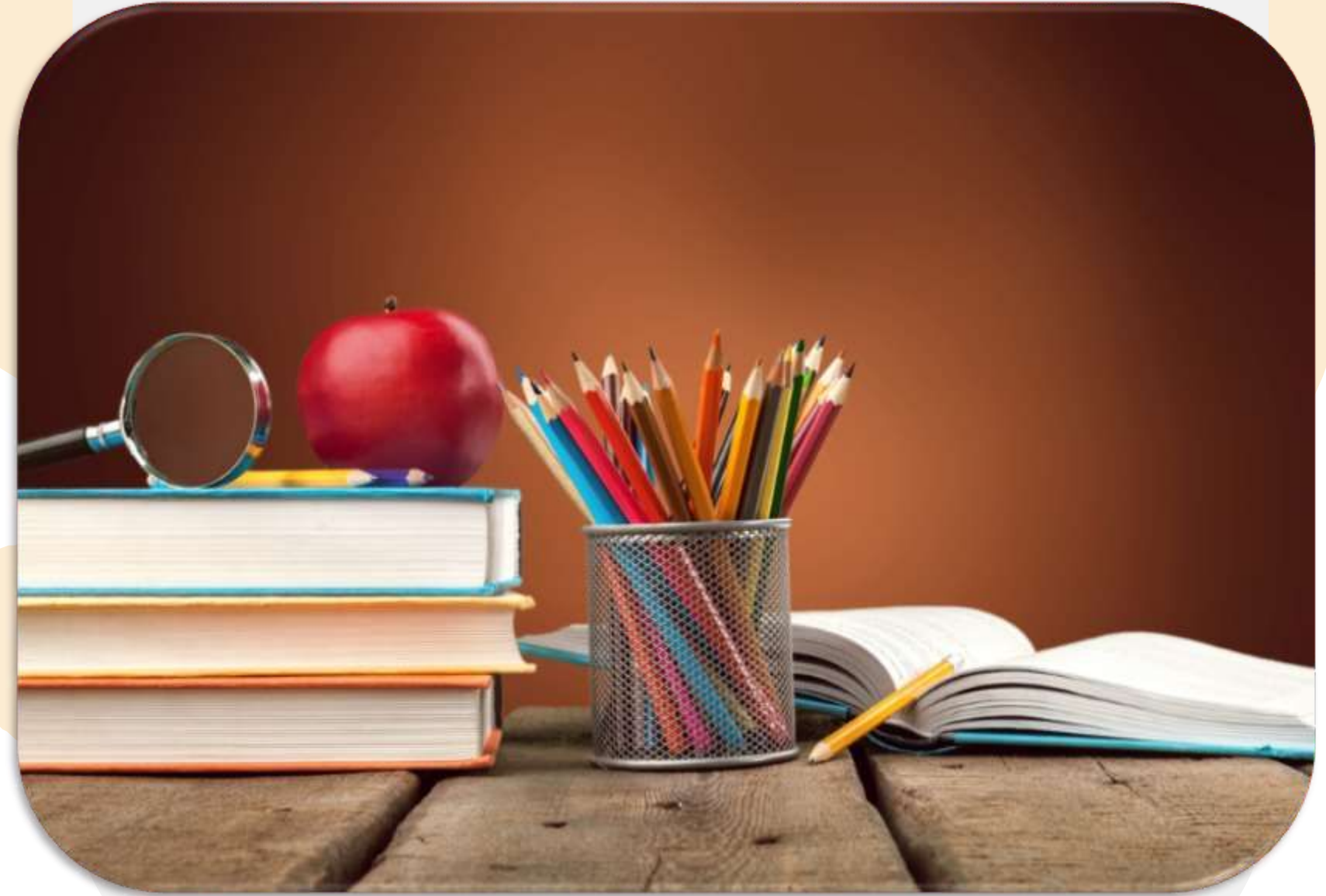


Задание

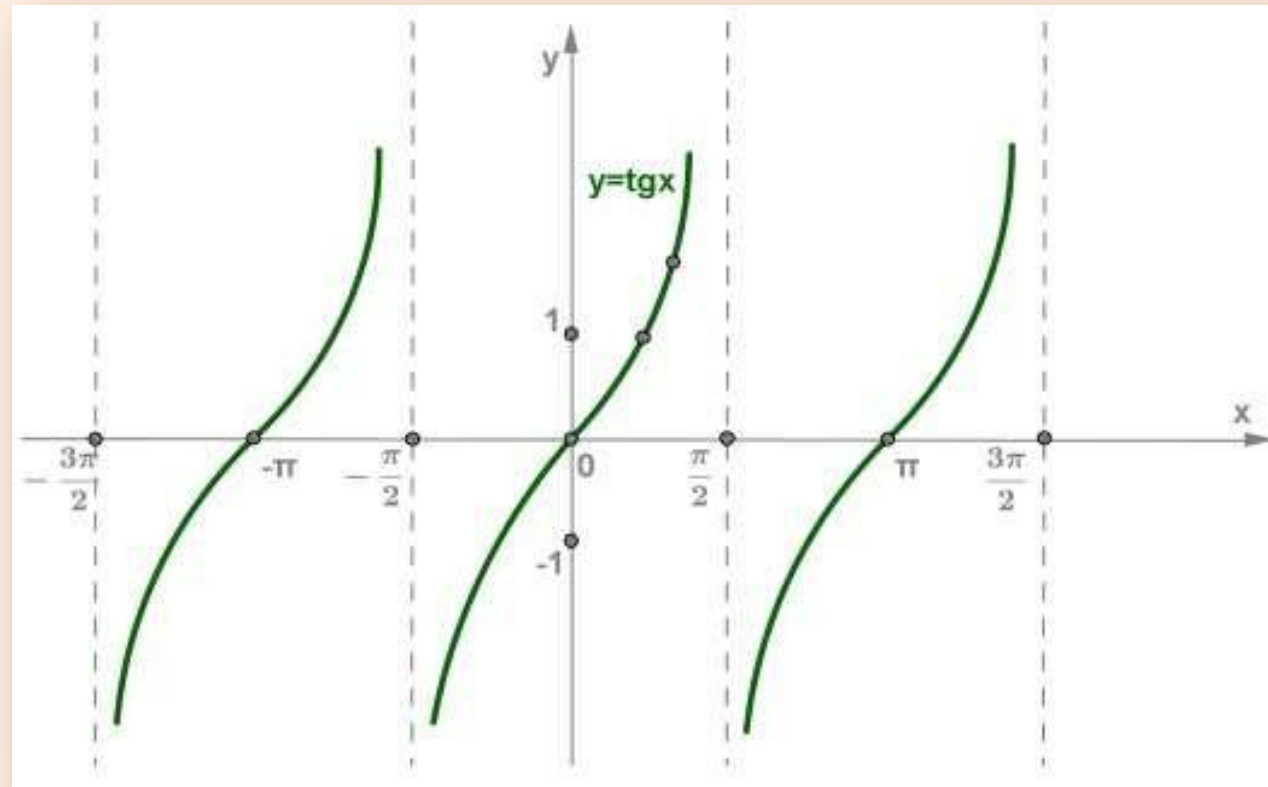
12

Найдите все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[-3\pi; \pi]$:

$$\cos x < \frac{1}{2}.$$



Функция $y = \operatorname{tg} x$



Свойства функции

1. Область определения: $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2. Множество значений: $y \in \mathbb{R}$.
3. Периодическая с наименьшим периодом $T = \pi$.
4. Нечётная.
5. Функция принимает:
 - значение, равное 0, при $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 - положительные значения на интервалах $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$;
 - отрицательные значения на интервалах $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
6. Возрастает на интервалах $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Задание

13

Укажите наименьший
положительный период функций:

1) $y = \operatorname{tg} 2x$;

2) $y = 2\operatorname{tg} x$;

3) $y = -3\operatorname{tg} x$;

4) $y = \operatorname{tg} \left(0,5x + \frac{\pi}{4} \right)$.



Задание

14

Найдите множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$.





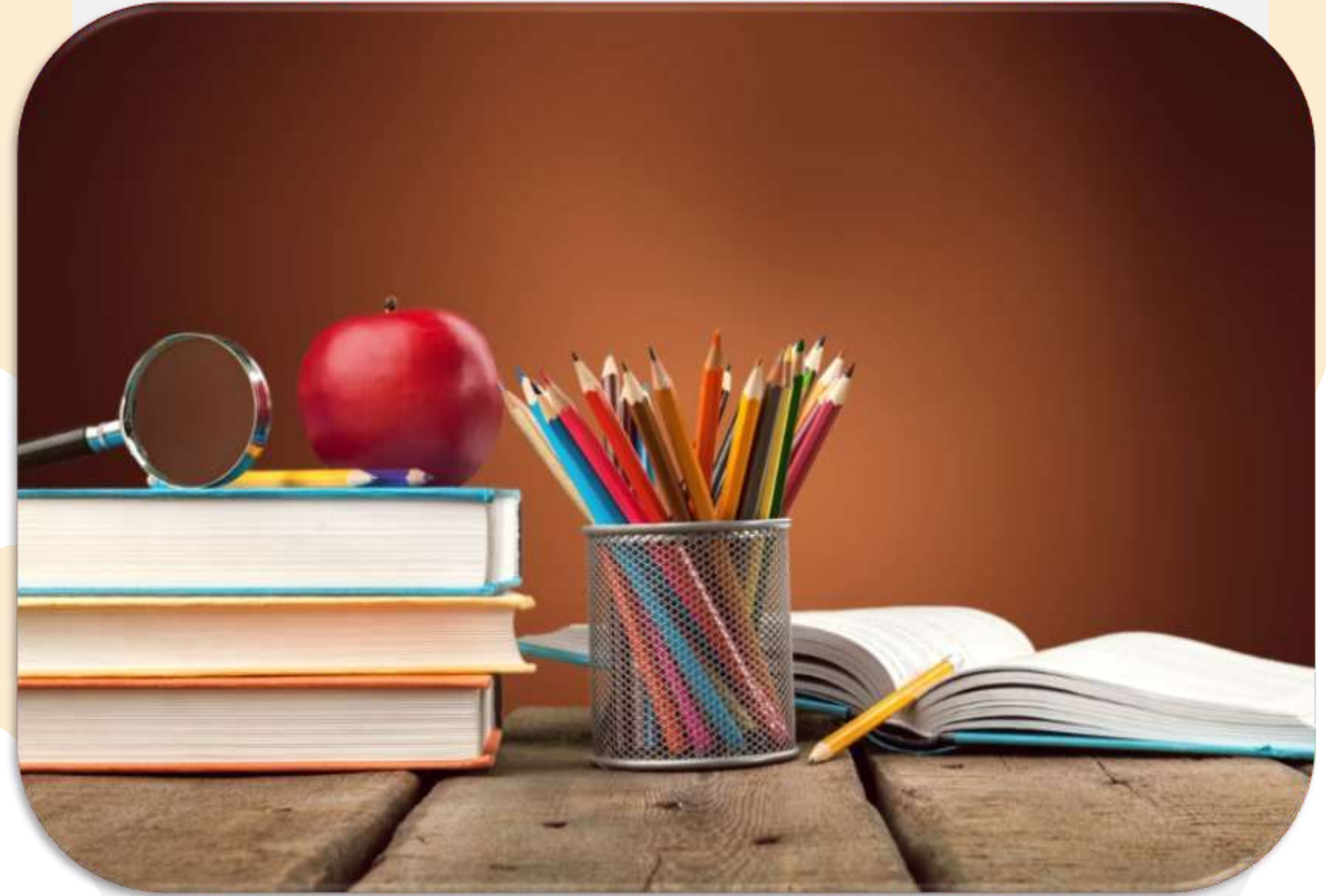
Задание

15

Выясните, является ли функция

$y = |\operatorname{tg} 2x|$ чётной и постройте её

график.





Фоксфорд

Задание

16

Найдите все корни

$$\operatorname{tg} x = 1$$

,

принадлежащие

промежутку $(-2\pi; \pi)$.





Фоксфорд

Задание

17

Найдите все решения неравенства

$\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$, принадлежащие
промежутку

$[0; 3\pi]$.





На уроке мы:

1. Изучили свойства тригонометрических функций.
2. Построили графики функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.
3. Научились решать тригонометрические уравнения и неравенства с помощью графиков.





Спасибо за внимание!



Анна Эккерман

преподаватель кафедры
математики

