Свойства тригонометрических функций и их графики

Цель урока: изучить тригонометрические функции.

Задачи урока:

1. Изучить свойства тригонометрических функций.
2. Построить графики функций: y= sin x, y=cos x, y=tg x.
3. Научиться решать тригонометрические уравнения и неравенства с помощью графиков.

Тригонометрические функции и их свойства

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ называются **тригонометрическими функциями.**

Областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

Областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество чисел $\mathbb{R}/\{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\}$.

Областью определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество $\mathbb{R}/\{x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\}$.

Множеством значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является отрезок $-1 \leq y \leq 1$.

Множеством значений функций $y = \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

Функция $y = \cos x$ – **четная**, а $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ – **нечетные.**

Функция $f(x)$ называется **периодической,** если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.
Минимальное положительное такое T называют **периодом** функции $f(x)$.

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ – периодические с периодом 2π, а $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ – с периодом π.

Фоксфорд

Задание 1

Найдите множество значений функции:

1) $y = \dfrac{1 + 7\cos^2 x}{5}$;

2) $y = 1 - 3|\cos x|$.

Фоксфорд

Задание 2

Определите, является функци
чётной, нечётной или я
общего вида: функцией

1) $y=\sin(\cos x)$;
2) $y=\sin\sqrt{x}$;
3) $y=|x|+\cos x$;
4) $y=x^2+\sin x$.

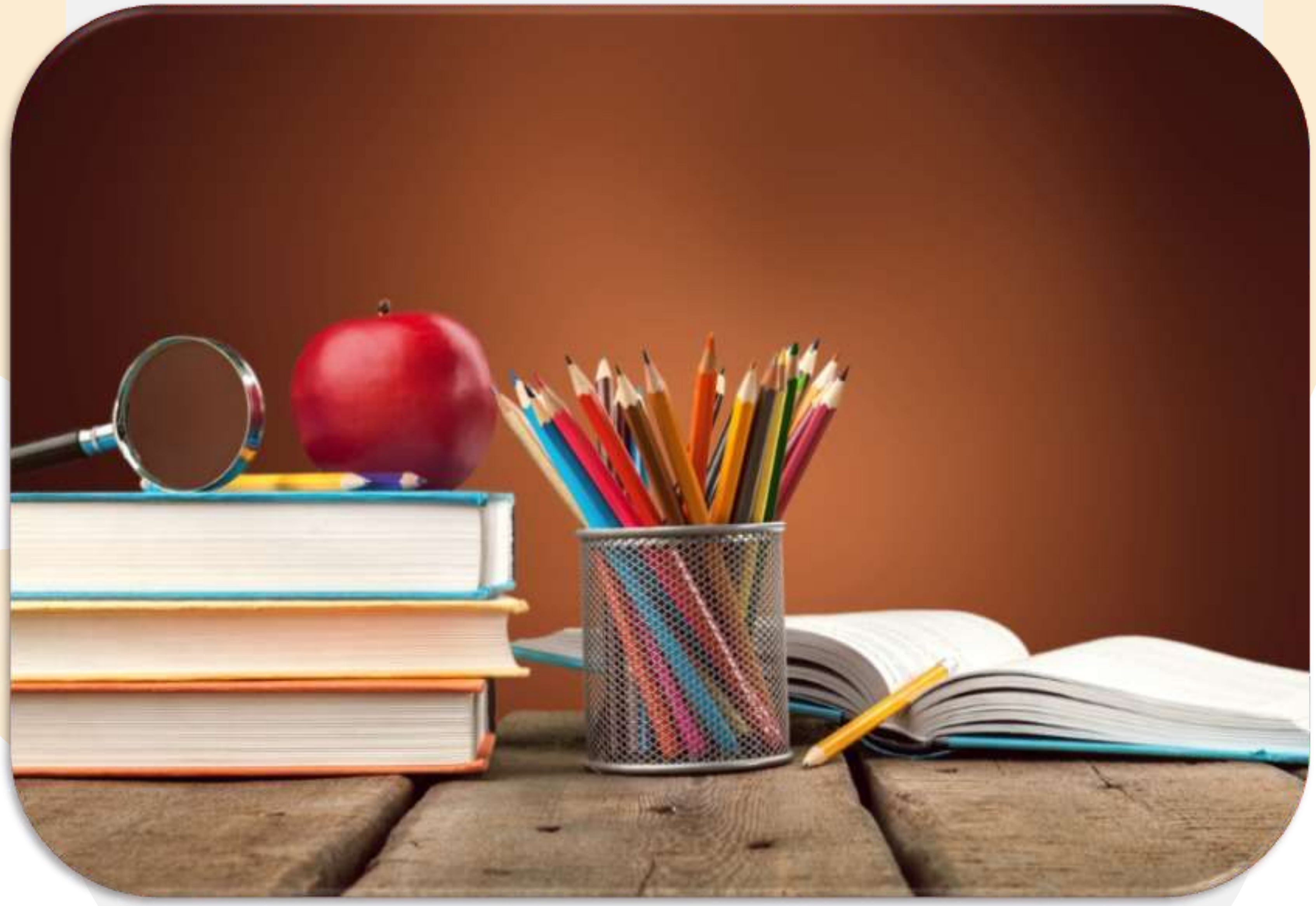
Фоксфорд

Задание 3

Доказать, что число *T* является периодом функции:

1) $y=\dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$, $T=\pi$;

2) $y=\dfrac{\cos x}{4+\sin^2 x}$, $T=2\pi$.



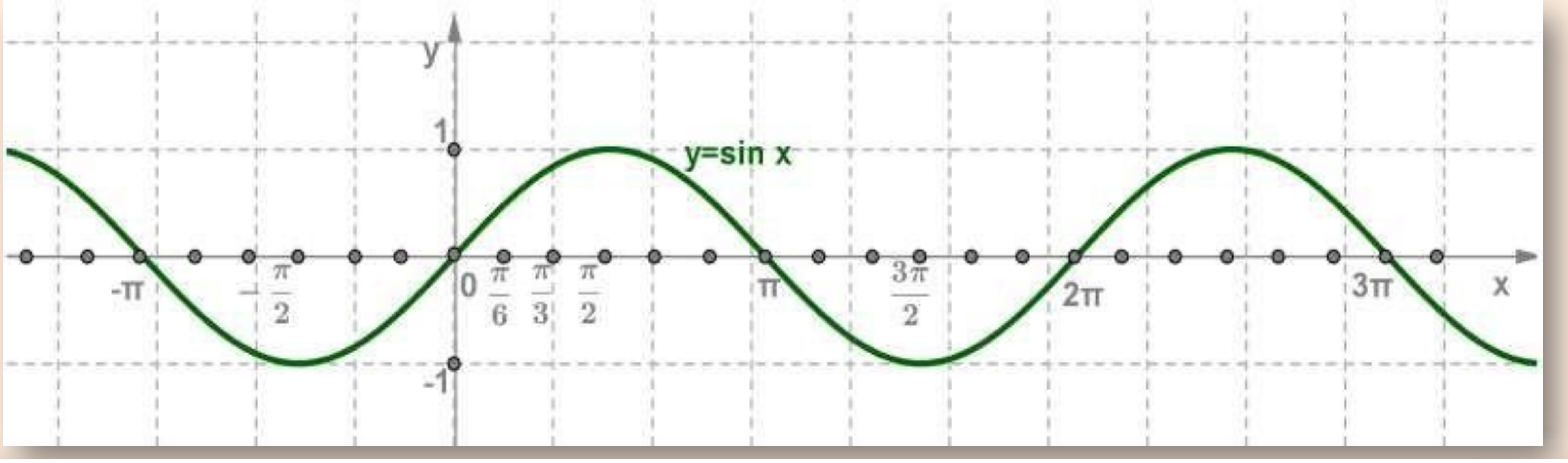
Фоксфорд

Задание 4

Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = \cos\frac{2}{5}x$; 2) $y = \sin\frac{3}{2}x$.

Функция y=sin x



Свойства функции

1. Область определения: $x \in \mathbb{R}$.
2. Множество значений: $y \in [-1; 1]$.
3. Периодическая с наименьшим периодом $T = 2\pi$.
4. Нечётная.
5. Функция принимает:

- значение, равное 0, при $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
- наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
- наименьшее значение, равное (-1), при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
- положительные значения на интервалах $(2\pi n; \pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$;
- отрицательные значения на интервалах $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$.

6. Возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$;

- убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

Задание 5

Используя свойства возрастания и убывания функции y=sin x, сравните:

$1)\ \sin\frac{9\pi}{10}$ и $\sin\frac{11\pi}{10}$;

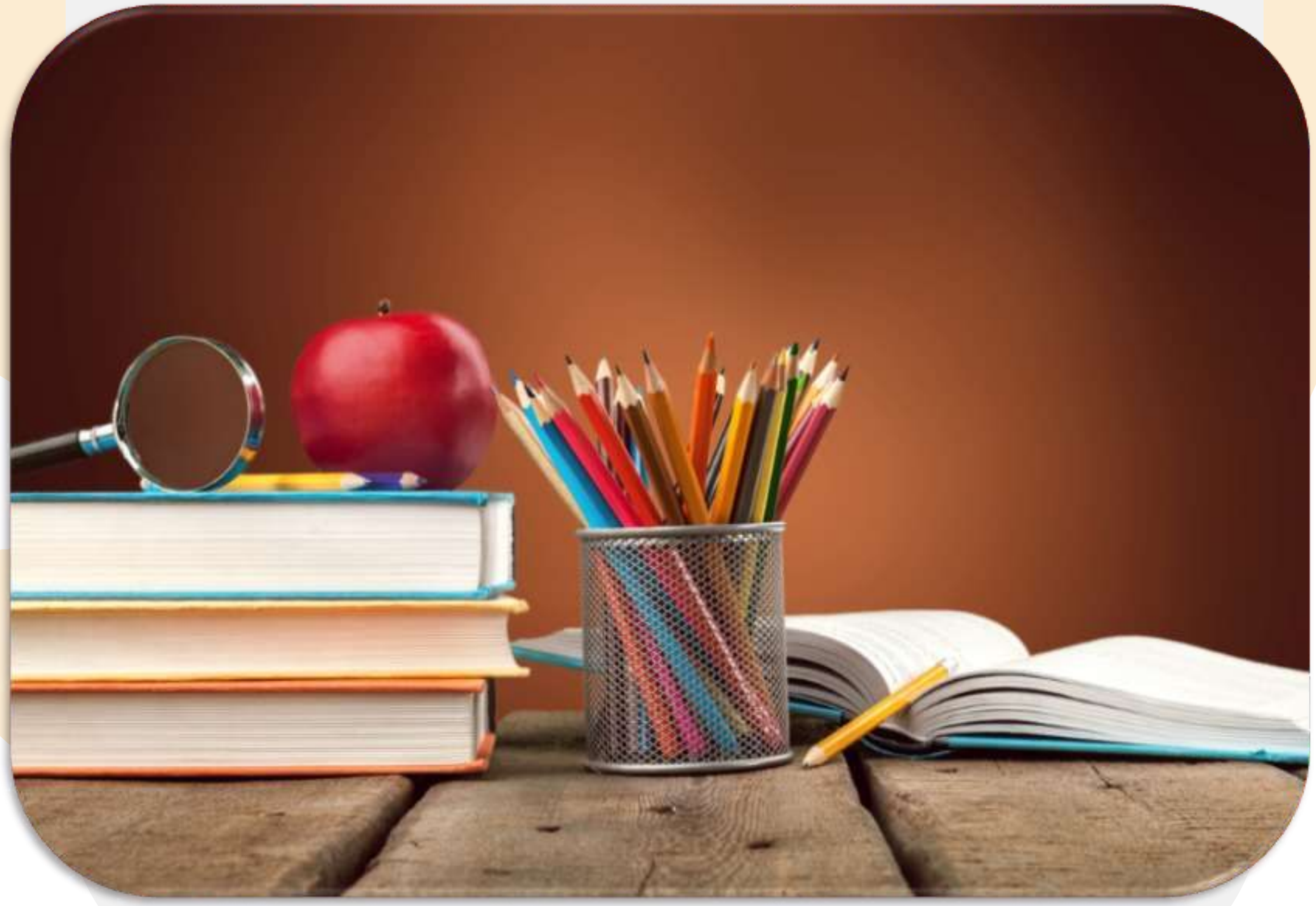
$2)\ \sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$.

Фоксфорд

Задание 6

Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку [-π;2π]:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Фоксфорд

Задание 7

Найдитевсе решения неравенства, принадлежащие промежутку [-π;2π]:

$$\sin x > \frac{1}{2}.$$

Онлайн-школа
foxford.ru

Фоксфорд

Задание 8

Найдите область определения и постройте график функции

$$y = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}.$$

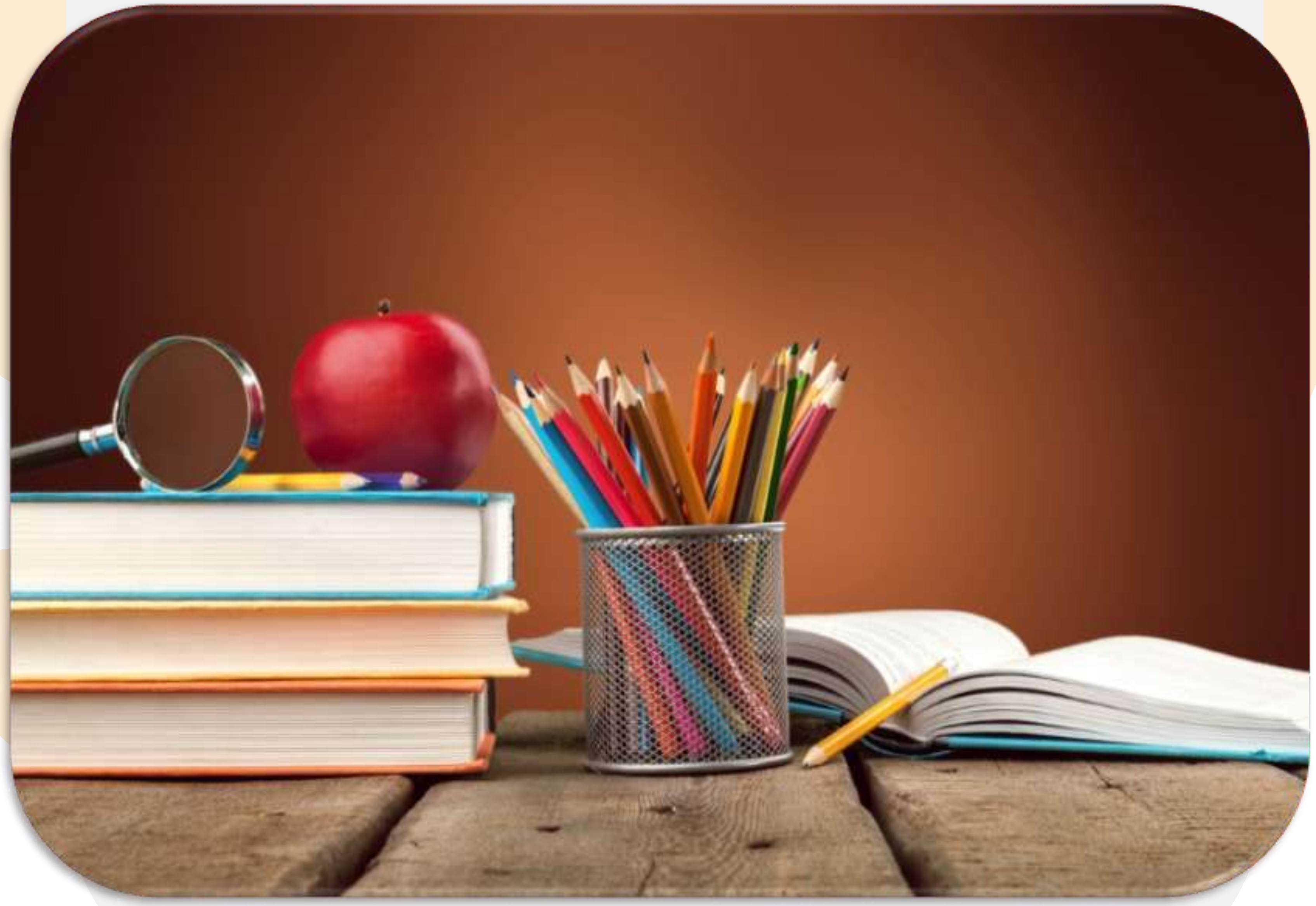
Задание 9

Постройте графики указанных функций, преобразуя графики функции y=sin x

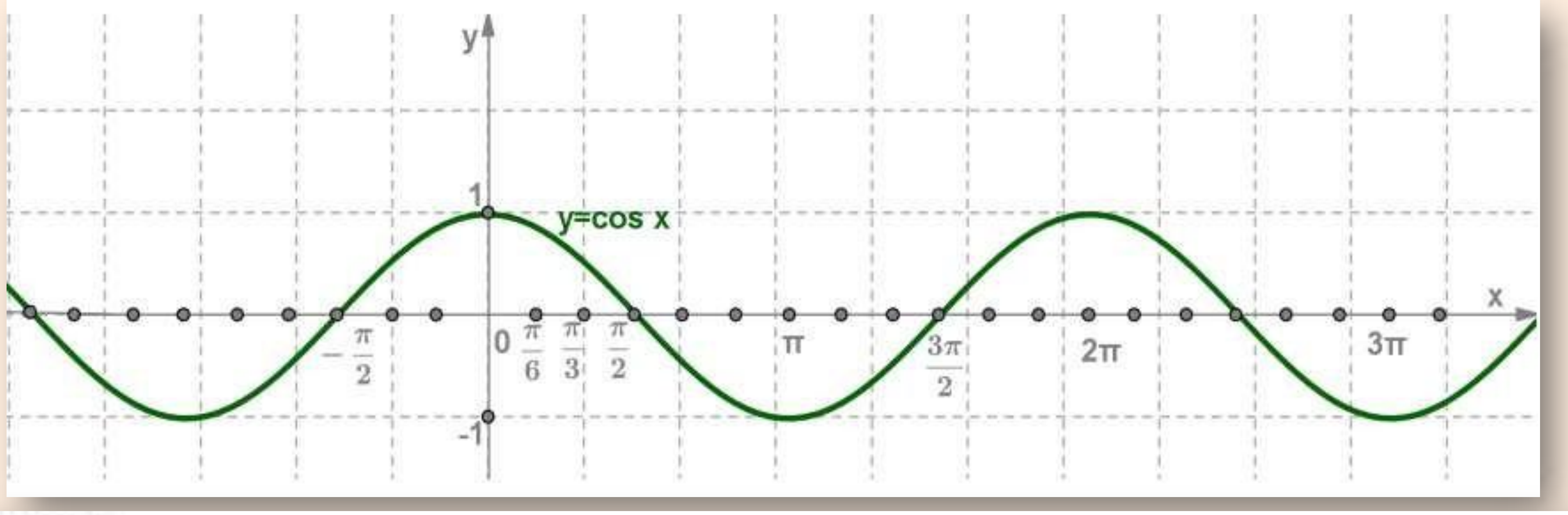
1) $y = 1 + \sin x$;

2) $y = -\sin x$;

3) $y = |\sin x|$.



Функция y=cos x



Свойства функции

1. Область определения: $x \in \mathbb{R}$.
2. Множество значений: $y \in [-1; 1]$.
3. Периодическая с наименьшим периодом $T = 2\pi$.
4. Чётная.
5. Функция принимает:

- значение, равное 0, при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
- наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
- наименьшее значение, равное (-1), при $x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
- положительные значения на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$;
- отрицательные значения на интервале $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

6. Возрастает на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$;

- убывает на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Фоксфорд

Задание 10

Используя свойства возрастания и убывания функции y=cos x,

1) $\cos\frac{11\pi}{8}$ и $\cos\frac{13\pi}{8}$;

2) $\cos -\frac{7\pi}{6}$ и $\cos -\frac{-6\pi}{5}$.

Онлайн-школа
foxford.ru

Фоксфорд

Задание 11

Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку [-3π;π]:

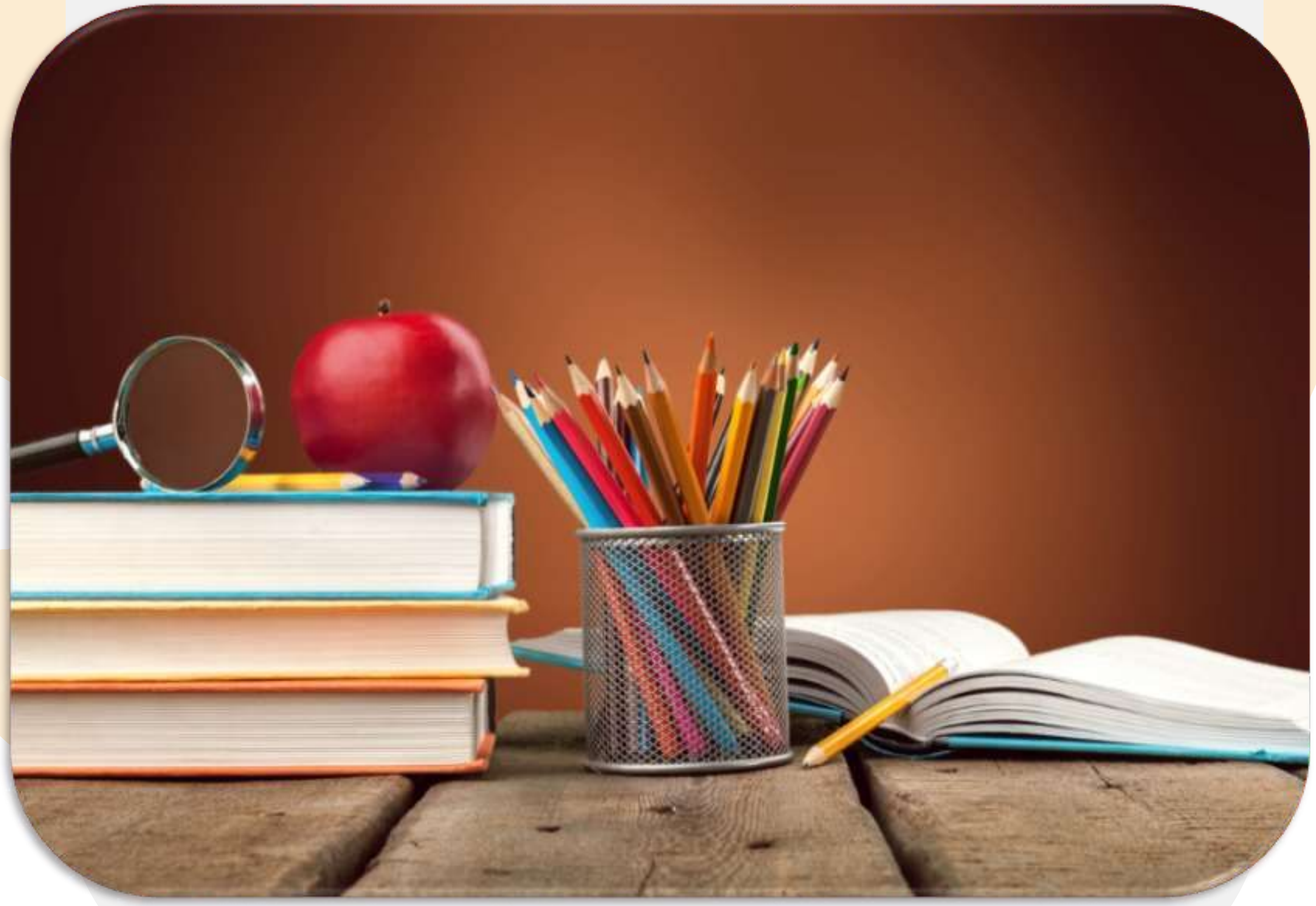
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Фоксфорд

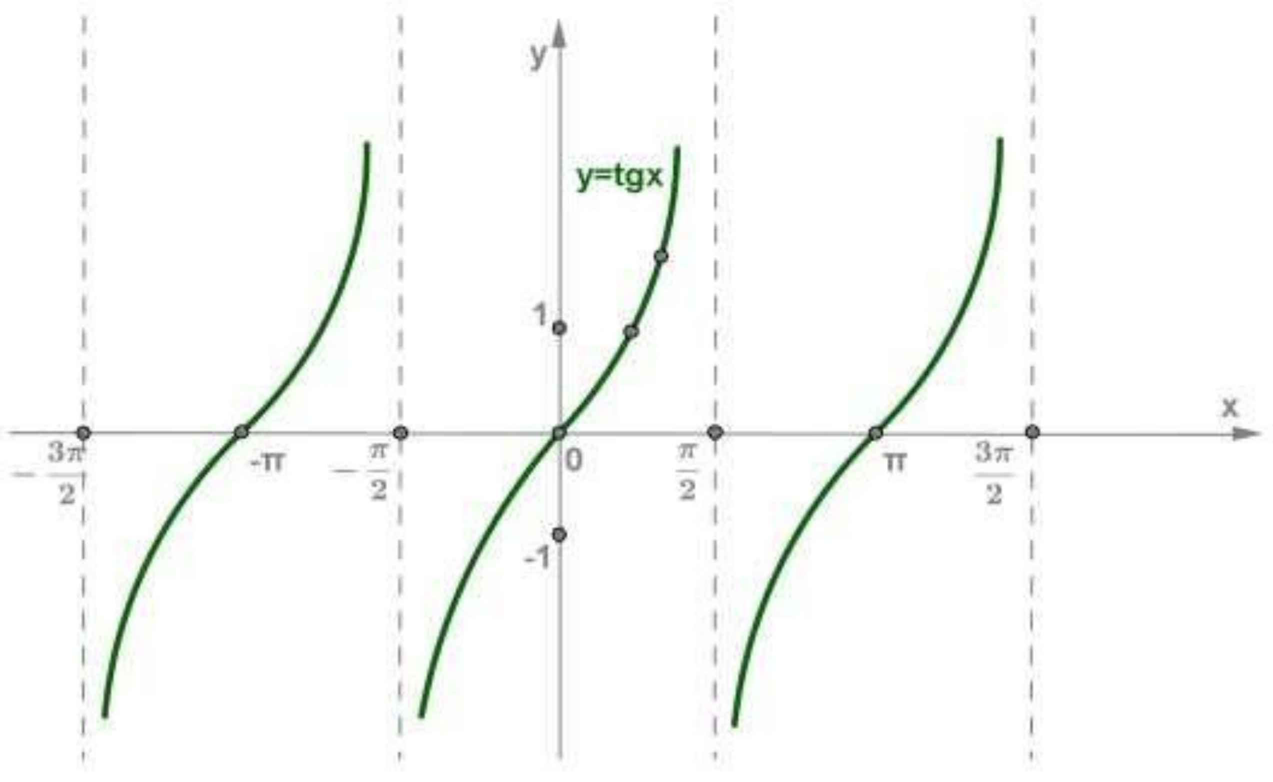
Задание 12

Найдитевсе решения неравенства, принадлежащие промежутку [-3π; π]:

$$\cos x < \frac{1}{2}.$$



Функция y=tg x



Свойства функции

1. Область определения: $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.
2. Множество значений: $y \in \mathbb{R}$.
3. Периодическая с наименьшим периодом $T = \pi$.
4. Нечётная.
5. Функция принимает:

- значение, равное 0, при $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
- положительные значения на интервалах $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$;
- отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$.

6. Возрастает на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$.

Задание 13

Укажите наименьший положительный период функций:

1) $y = tg\ 2x;$

2) $y = 2tg\ x;$

3) $y = -3tg\ x;$

4) $y = tg\ \left(0,5x + \frac{\pi}{4}\right).$

Онлайн-школа
foxford.ru

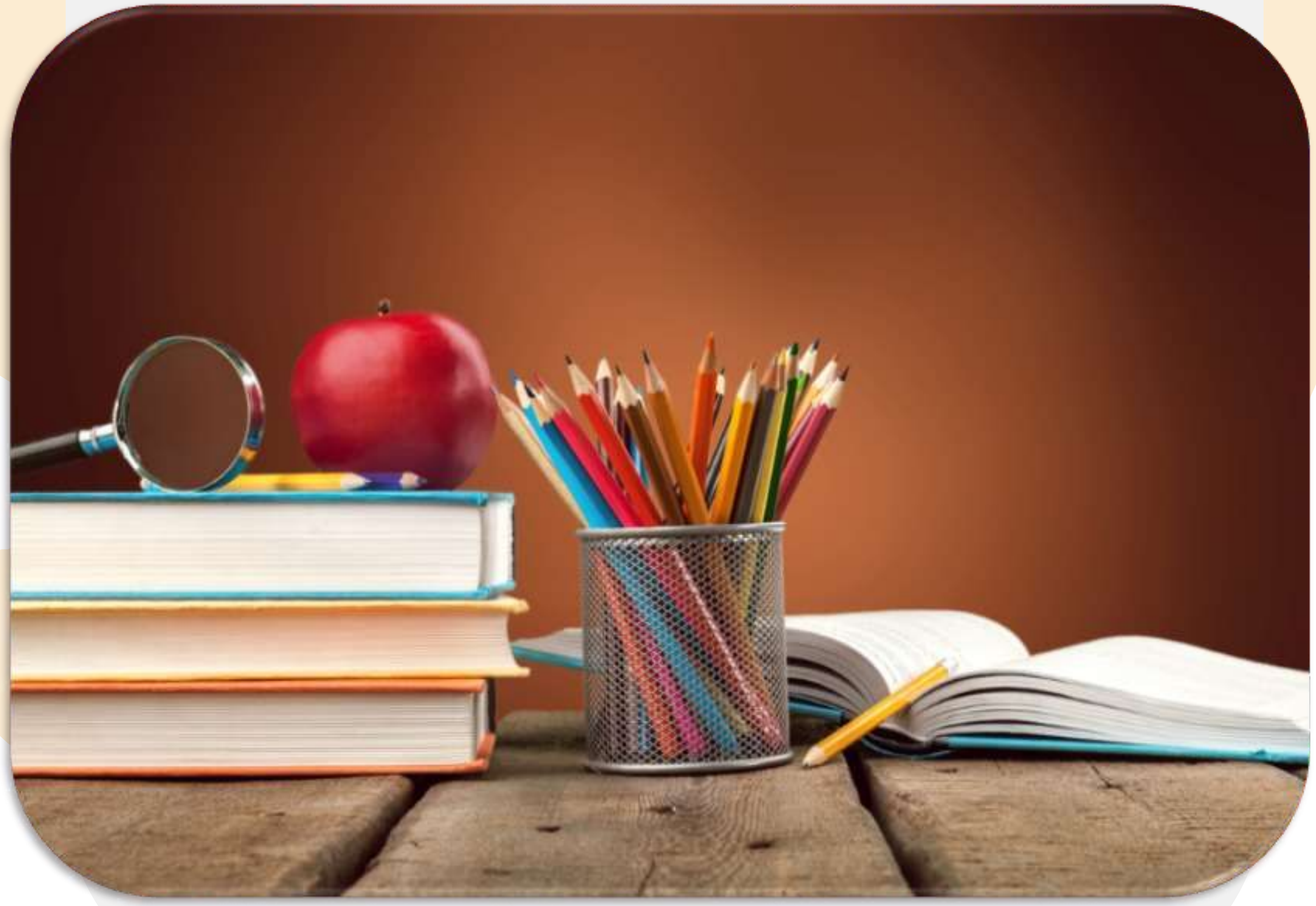
Фоксфорд

Задание 14

Найдите множество значений функции y=tg x, если x принадлежит промежутку $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Задание 15

Выясните, является ли функция $y = |tg\ 2x|$ чётной и постройте её график.



Фоксфорд

Задание 16

Найдите все корни

$tg\ x = 1$ия

,

принадлежащие промежутку (-2π;π).

Задание 17

Найдите все решения неравенства $tg\, x \leq \sqrt{3}$, принадлежащие промежутку [0; 3π].

Онлайн-школа
foxford.ru

На уроке мы:

1. Изучили свойства тригонометрических функций.
2. Построили графики функций: $y= \sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$.
3. Научились решать тригонометрические уравнения и неравенства с помощью графиков.

Спасибо за внимание!

Анна Эккерман

преподаватель кафедры математики