ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 6

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (продолжение)

Экономическое приложение систем уравнений

§ 1. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 1. Предположим, что некоторое предприятие выпускает три вида продукции, при этом, используя сырье трех видов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице 1.

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Задачи такого рода типичны при прогнозах и оценках функционирования предприятий, экспертных оценках проектов освоения месторождения полезных ископаемых, а также в планировании микроэкономики предприятий.

Таблица 1

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.			Запас сырья, вес. ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

- <u>Решение.</u> Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x_1, x_2 и x_3. Тогда, при условии полного расхода запасов каждого вида сырья можно записать балансовое соотношение, которое образует систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений любым способом, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составляют по каждому виду соответствие (в условных единицах):

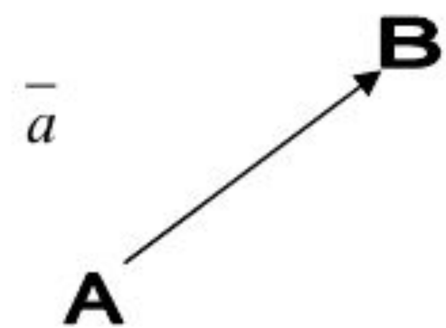
- $x_1 = 150$, $x_2 = 250$, $x_3 = 100$.

Лекция 7

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ ЛГЕБРЫ

• § 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

- Различают величины скалярные и векторные.
- Величина, которая полностью характеризуется одним числовым значением, выражающим отношение этой величины к соответствующей единице измерения, называется ***скалярной величиной*** или ***скаляром.***
- Таковы, например, масса тела, температура среды и т.п.
- Величина, которая кроме числового значения характеризуется еще и направлением, называется ***векторной величиной*** или ***вектором.***
- К числу их относятся сила, перемещение, скорость.
- Вектор определяется числом и направлением
- Векторы будем обозначать $\overline{a}$ или $\boldsymbol{a}$.



Геометрически вектор изображается направленным отрезком пространства; при этом используется обозначение $\overline{a} = \overline{AB}$

- Под ***модулем*** (длиной) вектора $\left|\overline{a}\right| = a$
- понимается его численное значение, без учета направления.
- Вектор, модуль которого равен нулю, называется ***нулевым*** или ***нуль-вектором***. Направление нулевого вектора произвольно.
- Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ считаются равными, если они расположены на параллельных или совпадающих прямых, имеют одинаковую длину и одинаково направлены.
- Мы условимся не различать равные векторы и, таким образом, приходим к понятию ***свободного вектора***. Иными словами, свободный вектор допускает перенос его в любую точку пространства, при условии сохранения длины и направления. В частности, для свободных векторов всегда можно обеспечить их общую начальную точку.

- *§ 2. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ*
- **Сумма векторов**

Суммой нескольких векторов, например, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ называется вектор

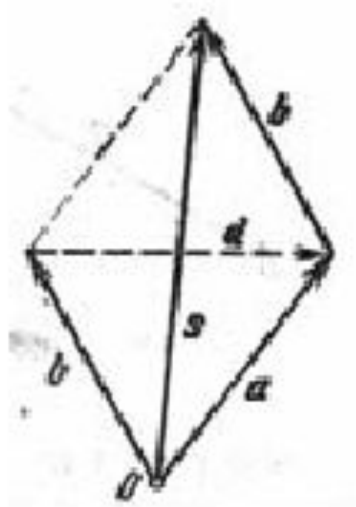
$$\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$$

по величине и направлению равный замыкающей пространственной ломаной линии, построенной на данных векторах. $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$

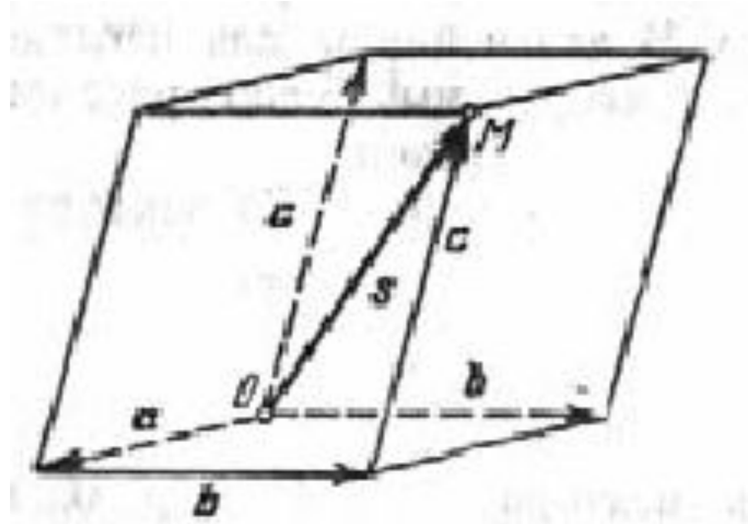
- Для случая двух векторов $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}$ их суммой является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки их приложения (правило параллелограмма).

Так как в любом треугольнике длина одной стороны не превышает суммы длин двух других сторон, то из рис. следует

$$\left|\bar{a} + \bar{b}\right| \le \left|\bar{a}\right| + \left|\bar{b}\right|$$



- Для случая трех векторов $\overline{s} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ их суммой является диагональ ОМ параллелепипеда, построенного на этих векторах ***(правило параллелепипеда).***



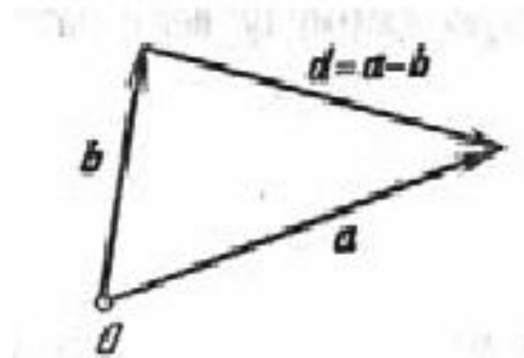
Легко проверить, что для векторного сложения справедливы следующие ***свойства***:

- 1) переместительное свойство: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$,
- 2) сочетательное свойство: $\overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$,
- Для каждого вектора $\overline{a} = \overline{OA}$ существует противоположный вектор, $-\overline{a} = \overline{AO}$ имеющий ту же длину, но противоположное направление

По правилу параллелограмма имеем $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$, где 0 - нуль-вектор. Легко проверить, что $a + (-a) = 0$

Разность векторов

Под разностью векторов ***a*** и ***b*** будем понимать вектор ***d = a - b*** , такой что ***b + d = a*** .



Отметим, что в параллелограмме, построенном на данных векторах ***a*** и ***b*** , их разностью является соответственно направленная вторая диагональ параллелограмма.

Легко проверить, что справедливо следующее правило вычитания:

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$$

Умножение вектора на скаляр.

- Определение. Произведением вектора ***a*** на скаляр k
- называется вектор, имеющий длину ***b*** =|k| ***a*** , направление, которого:
- 1) совпадает с направлением вектора ***a*** , если k > 0;
- 2) противоположно ему, если k < 0;
- 3) произвольно, если k = 0.
- Нетрудно убедиться, что данная векторная операция обладает следующими свойствами:

1) $(k+l)\overline{a} = k\overline{a} + l\overline{a}$,

2) $k\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = k\overline{a} + k\overline{b}$,

3) $k\left(l\overline{a}\right) = (kl)\overline{a}$

4) $1^{*}\overline{a} = \overline{a}$, $(-1)\overline{a} = -\overline{a}$, $0^{*}\overline{a} = 0$,

(k, l - скаляры).

<u>Пример 1</u>. $\left(\overline{a} + 2\overline{b}\right) - \left(3\overline{a} - \overline{b}\right) = -2\overline{a} + 3\overline{b}$

Если ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$ разделить на его длину $a = |\boldsymbol{a}|$, то мы получим единичный вектор $\boldsymbol{e}$, так называемый ***орт***, того же направления: $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a} / a$

Отсюда имеем стандартную формулу вектора: $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}$.

§ 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Два вектора ***a* и *b*** называются ***коллинеарными,*** если они расположены или на параллельных прямых, или же на одной и той же прямой.

Так как направление нулевого вектора произвольно, то можно считать, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Справедлива **Теорема 1.** Два ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. $\boldsymbol{b} = \mathrm{k}\boldsymbol{a}$, где k — скаляр.

1) Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$) коллинеарны и e,e′— их орты. Имеем $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{e}'$, где $\boldsymbol{e}' = \pm\boldsymbol{e}$.

Знак плюс соответствует векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одинакового направления, а знак минус — векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ противоположного направления.

Тогда получаем, что $\boldsymbol{b} = \pm b\boldsymbol{e} = \pm b/a\ (a\boldsymbol{e}) = \pm\ (b/a)\ \boldsymbol{a}$

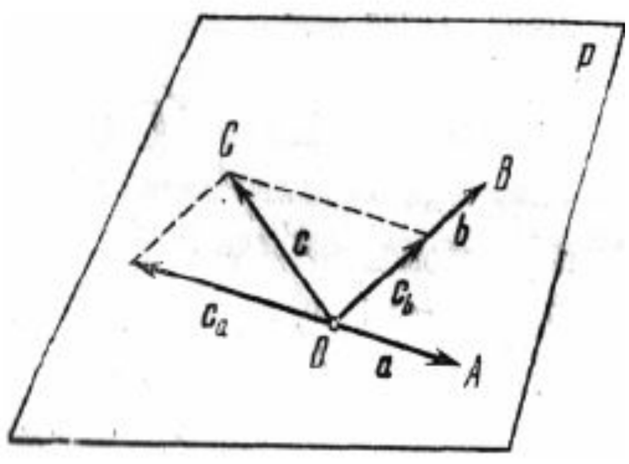
Отсюда вытекает формула $\boldsymbol{b} = \mathrm{k}\boldsymbol{a}$ где $\mathrm{k} = \pm b\,/\,a$.

2) Если выполнено равенство, то коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ непосредственно следует из смысла умножения вектора на скаляр.

Определение. Три вектора ***a, b*** и ***c*** называются ***компланарными***, если они параллельны некоторой плоскости или лежат в ней.

Тогда можно сказать также, что векторы ***a, b*** и ***c*** компланарны тогда и только тогда, когда после приведения их к общему началу они лежат в одной плоскости.

- По смыслу определения тройка векторов, среди которых имеется хотя бы один нулевой вектор, компланарна.
- **Теорема 2.** Три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией других, т. е., например $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$.
- *Доказательство.* 1)Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны, расположены в плоскости Р и имеют общую точку приложения О.



Предположим сначала, что эти векторы не все попарно коллинеарны, например, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Тогда, производя разложение вектора $\boldsymbol{c}$ в сумму векторов $\boldsymbol{c}_a$ и $\boldsymbol{c}_b$ коллинеарных, соответственно, векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, будем иметь, $c = \boldsymbol{c}_a + \boldsymbol{c}_b = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ где k и l — соответствующие скаляры.

- Если же векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ попарно коллинеарны, то можно написать
- $\boldsymbol{c} = \mathrm{k}\,\boldsymbol{a} = \mathrm{k}\,\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{b}$, и таким образом, снова вы полнено условие теоремы
- 2) Обратно, если для векторов $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{OB}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{OC}$ выполнено условие теоремы, то, на основании смысла соответствующих векторных операций, вектор $\boldsymbol{c}$ расположен в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. эти векторы компланарны.