Уравнение $cos x = a$

Сегодня на уроке

1. Научимся решать простейшие тригонометрические уравнения вида $\cos x = a$.
2. Введём понятие арккосинуса числа a.
3. Выведем общую формулу нахождения корней уравнения $\cos x = a$.

Тригонометрические уравнения

Уравнение, которое содержит переменную под знаком тригонометрических функций, называется тригонометрическим уравнением.

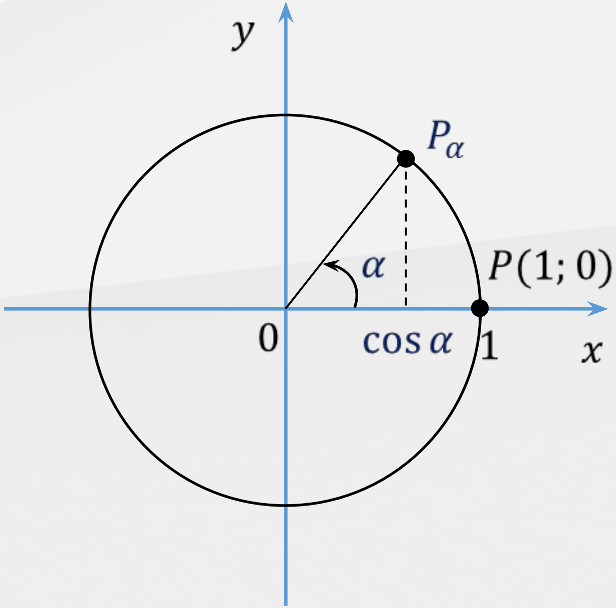
Уравнения вида $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$,
где x – переменная, а число $a \in \mathbb{R}$,
называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

Вспомним

Косинусом угла α называется абсцисса точки $\boldsymbol{P_\alpha}$, полученной поворотом точки $P(1;0)$ вокруг начала координат на угол α.

Так как координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ точек единичной окружности удовлетворяют неравенствам $\boldsymbol{-1 \leq y \leq 1}$, $\boldsymbol{-1 \leq x \leq 1}$, то для $\alpha \in (0; 360°)$ справедливо неравенство $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Из этого следует, что уравнение $\cos x = a$ имеет корни только при $\boldsymbol{-1 \leq a \leq 1}$.

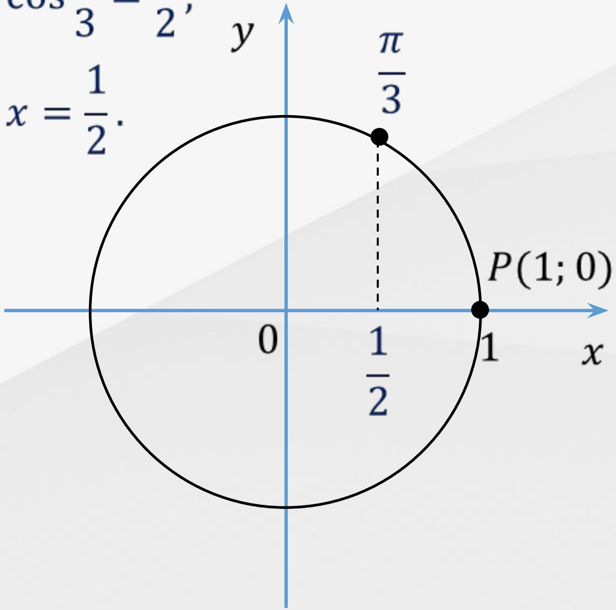


Уравнение $\cos x = a$

$\cos\frac{\pi}{3} = x,$ $\qquad\qquad$ $\cos x = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$

$x = \frac{1}{2}.$



Уравнение $\cos x = a$

$\cos\frac{\pi}{3} = x,$

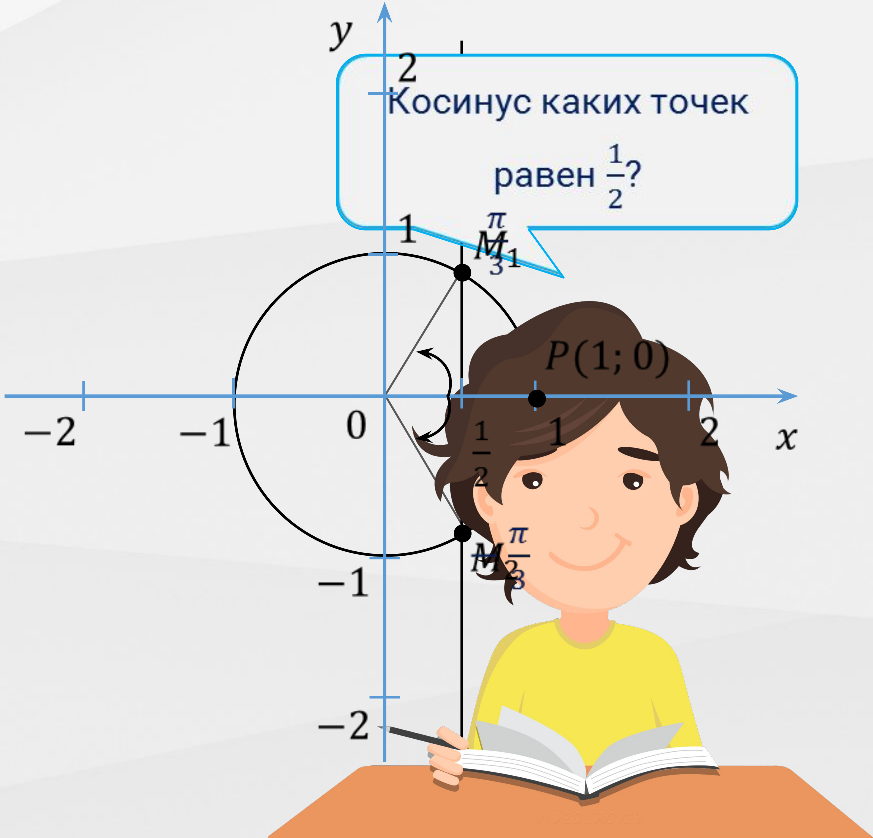
$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$

$x = \frac{1}{2},$

$\cos x = \frac{1}{2},$

$x_1 = \frac{\pi}{3},$

$x_2 = -\frac{\pi}{3},$



Уравнение $\cos x = a$

$\cos\frac{\pi}{3} = x,$

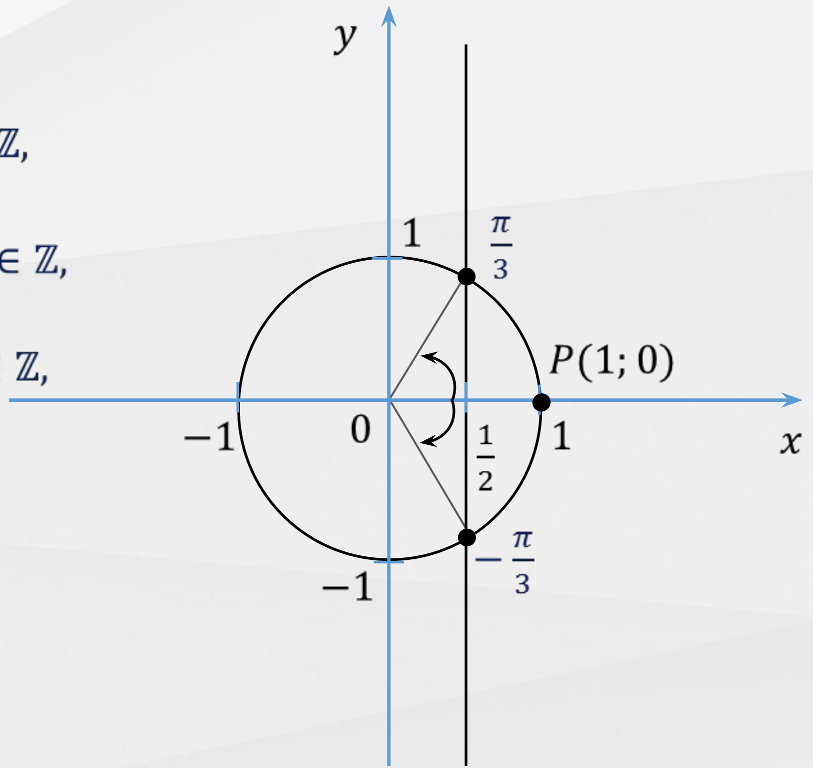
$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$

$x = \frac{1}{2},$

$\cos x = \frac{1}{2},$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right.$$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$



Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|\boldsymbol{a}| < \mathbf{1}$.

$-1 < a < 1$

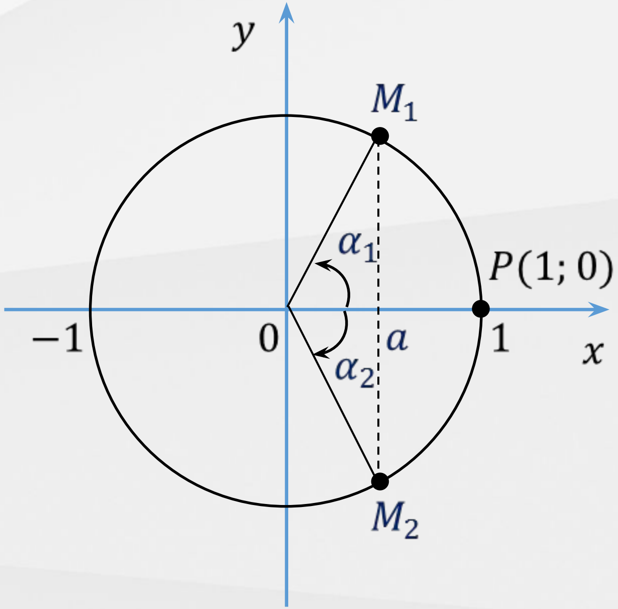
$\cos x = a,$

$x_1 = \alpha_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$

$x_2 = \alpha_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$

$\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha,$

$x = \pm\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$



Задание

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решите уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

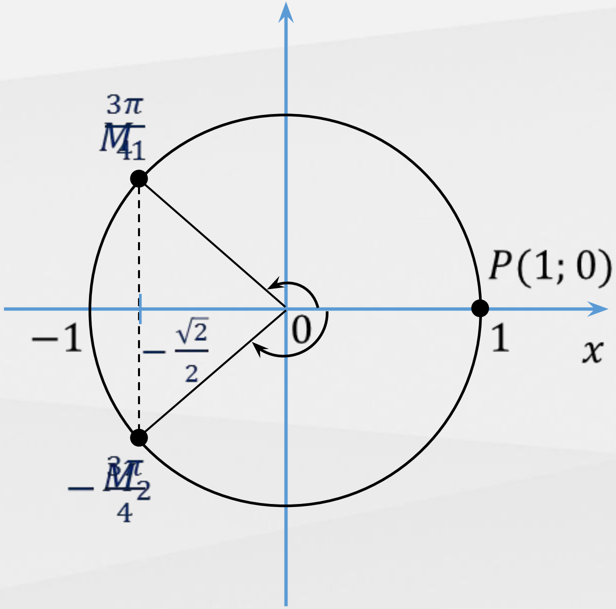
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x_1 = \frac{3\pi}{4}$,

$x_2 = -\frac{3\pi}{4}$,

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$,

Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Задание

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решите уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x_1 = \frac{3\pi}{4}$,

$x_2 = -\frac{3\pi}{4}$,

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$,

Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

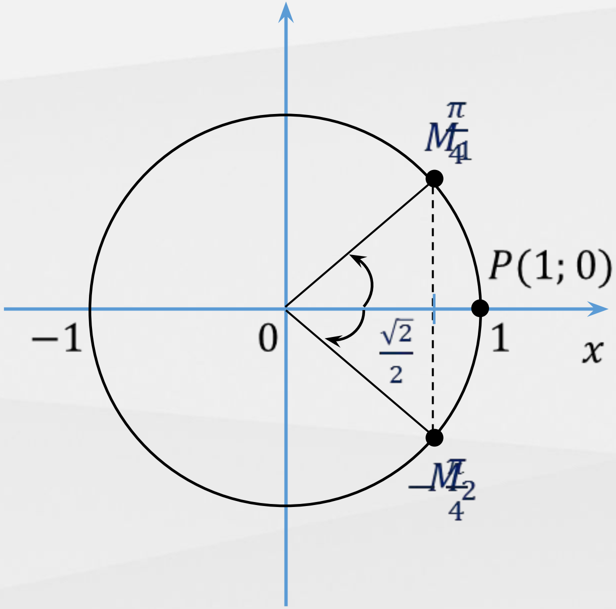
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x_1 = \frac{\pi}{4}$,

$x_2 = -\frac{\pi}{4}$,

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$,

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Решение уравнения $\cos x = a$

Каждое из уравнений $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет бесконечное множество корней.

На отрезке $[0; \pi]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень.

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\boxed{x_1 = \frac{3\pi}{4},}$

$x_2 = -\frac{3\pi}{4}$,

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Число $\frac{3\pi}{4}$ называют арккосинусом числа $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{4},}$

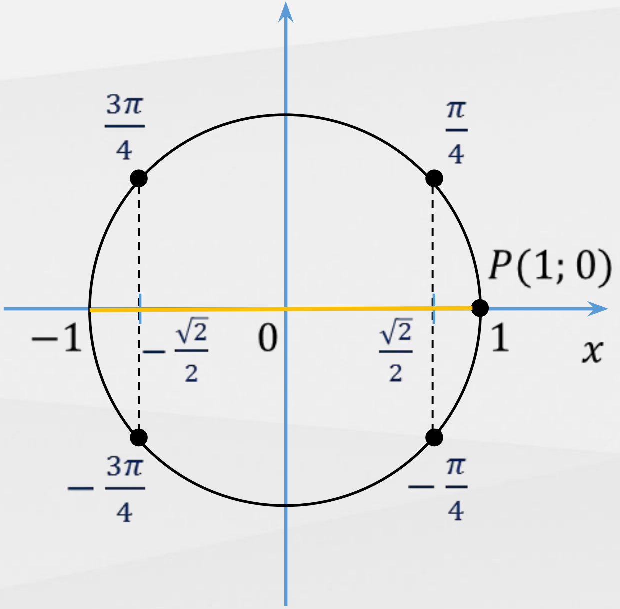
$x_2 = -\frac{\pi}{4}$,

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Число $\frac{\pi}{4}$ называют арккосинусом числа $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Решение уравнения $\cos x = a$

Каждое из уравнений $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет бесконечное множество корней.

На отрезке $[0; \pi]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень.

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\boxed{x_1 = \frac{3\pi}{4},}$

Число $\frac{3\pi}{4}$ называют арккосинусом числа $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{4},}$

Число $\frac{\pi}{4}$ называют арккосинусом числа $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

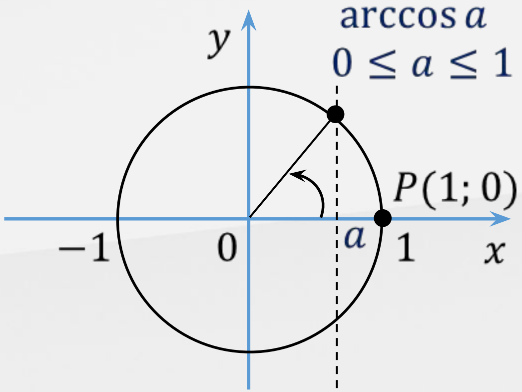
Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|\boldsymbol{a}| \le \mathbf{1}$.

$-1 \le a \le 1$

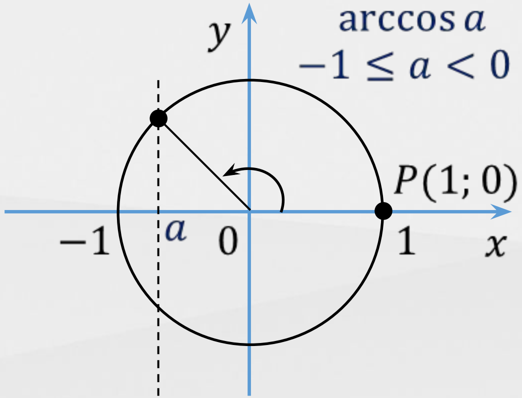
$\cos x = a,$

$x = \pm\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$



Уравнение $\cos x = a$, где $|\boldsymbol{a}| \le \mathbf{1}$,
на отрезке $[\mathbf{0}; \boldsymbol{\pi}]$ имеет только один корень.

Если $\boldsymbol{a} \ge \mathbf{0}$, то этот корень заключён в промежутке $\left[\mathbf{0}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$.



Если $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, то корень располагается в промежутке $\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}; \boldsymbol{\pi}\right]$.

Этот корень называют арккосинусом числа a
и обозначают так: $\arccos a$.

Запомните!

Арккосинусом числа $\boldsymbol{a}$, $|\boldsymbol{a}| \leq \mathbf{1}$,
называется такое число $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}; \boldsymbol{\pi}]$,
косинус которого равен $\boldsymbol{a}$.

$\arccos a = \boldsymbol{x}$, если $\cos \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ и $0 \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{\pi}$.

Арккосинус числа a

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \frac{\pi}{4} \leq \pi.$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi.$$

Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|\boldsymbol{a}| \le \mathbf{1}$.

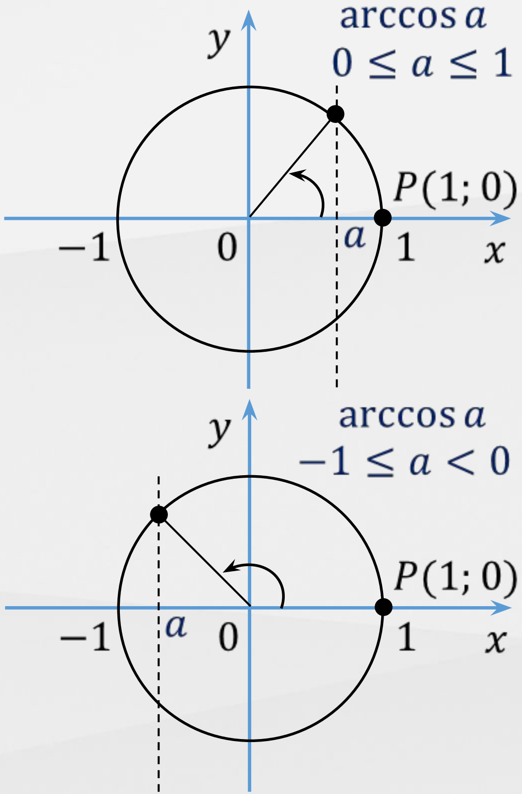
$-1 \le a \le 1$

$\cos x = a,$

$x = \pm\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Все корни уравнения $\cos x = a$ можно найти по формуле:

$$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$$



Запомните!

Для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула:

$$\boxed{\arccos a + \arccos(-a) = \pi}$$

Эта формула позволяет находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел.

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Решение уравнения $\cos x = a$

2. $|\boldsymbol{a}| > \mathbf{1}$.

$a < -1,\ a > 1,$

$-1 \leq \cos \alpha \leq 1,$

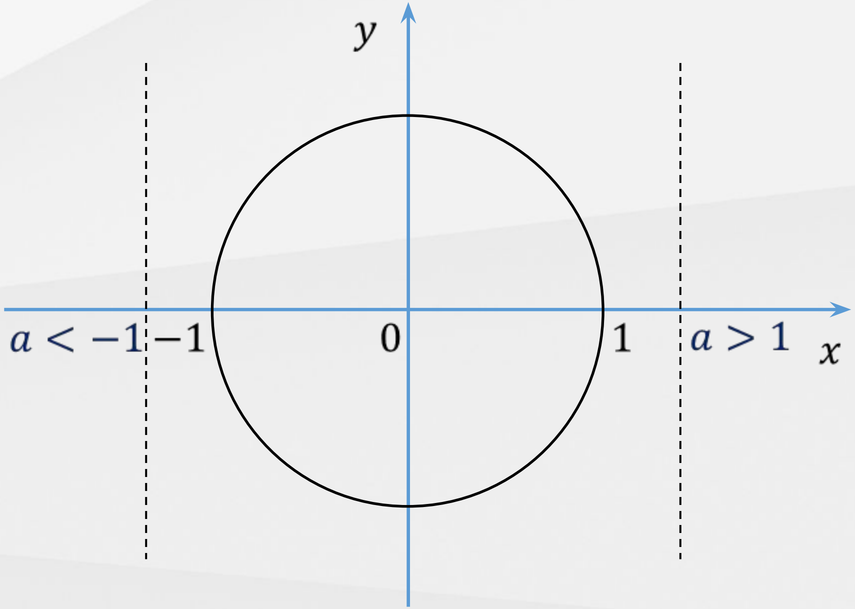
Уравнение $\cos x = a$ не имеет корней.

$\cos x = -2{,}5,$

$x = \emptyset.$

$\cos x = 7,$

$x = \emptyset.$



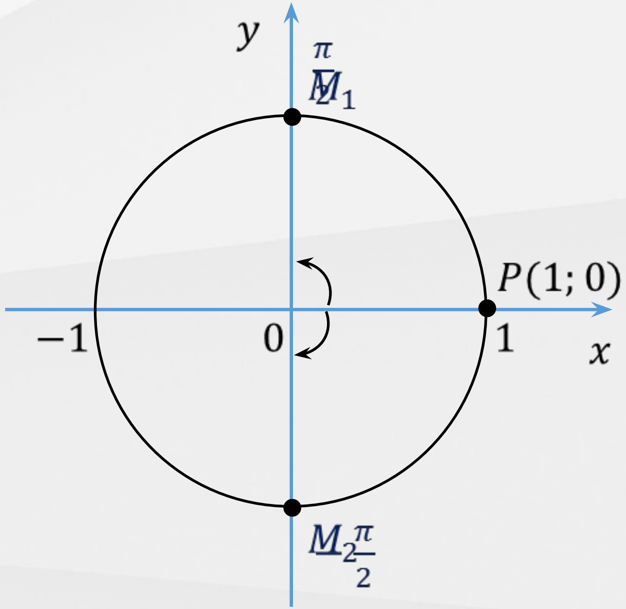
Решение уравнения $\cos x = a$

3. $\boldsymbol{a = 0}$.

$\cos x = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}}$$



Решение уравнения $\cos x = a$

4. $|\boldsymbol{a}| = \mathbf{1}$.

$a = -1,\ a = 1$

$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$

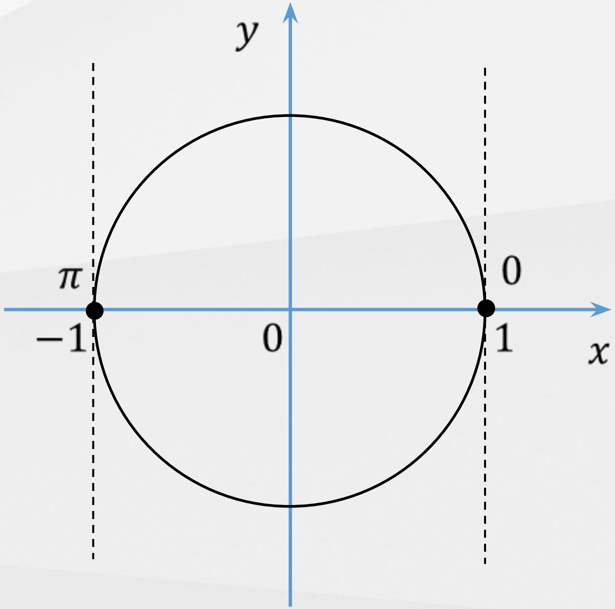
$x = 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$\cos x = -1,$

$\boxed{x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

$\cos x = 1,$

$\boxed{x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$



Задание № 1

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение $\cos x = 0{,}3$.

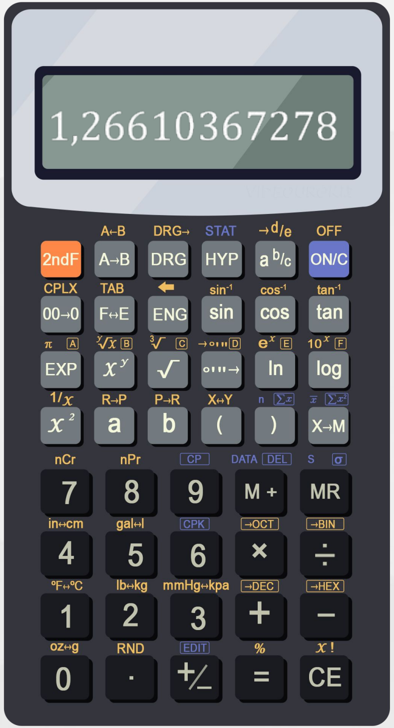
Решение:

$\cos x = 0{,}3,$

$x = \pm \arccos 0{,}3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$

$x \approx \pm 1{,}266 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$

Ответ: $x \approx \pm 1{,}266 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$



$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Задание № 2

Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$2x = \pm\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.