

$$1 - \cos^2 \alpha = 1$$

Уравнение  $\cos x = a$

## Сегодня на уроке

1. Научимся решать простейшие тригонометрические уравнения вида  $\cos x = a$ .
2. Введём понятие арккосинуса числа  $a$ .
3. Выведем общую формулу нахождения корней уравнения  $\cos x = a$ .

# Тригонометрические уравнения

Уравнение, которое содержит переменную под знаком тригонометрических функций, называется тригонометрическим уравнением.

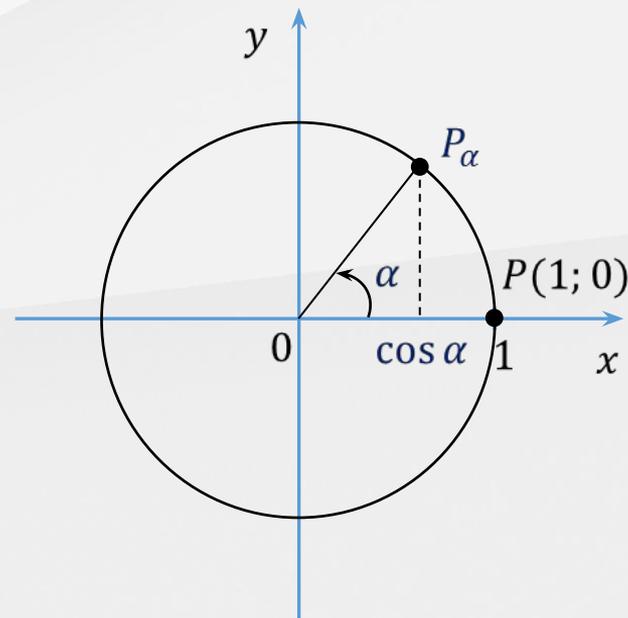
Уравнения вида  $\cos x = a$ ,  $\sin x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$  и  $\operatorname{ctg} x = a$ , где  $x$  – переменная, а число  $a \in \mathbb{R}$ , называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

# Вспомним

Косинусом угла  $\alpha$  называется абсцисса точки  $P_\alpha$ , полученной поворотом точки  $P(1; 0)$  вокруг начала координат на угол  $\alpha$ .

Так как координаты  $x$  и  $y$  точек единичной окружности удовлетворяют неравенствам  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , то для  $\alpha \in (0; 360^\circ)$  справедливо неравенство  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ .

Из этого следует, что уравнение  $\cos x = a$  имеет корни только при  $-1 \leq a \leq 1$ .



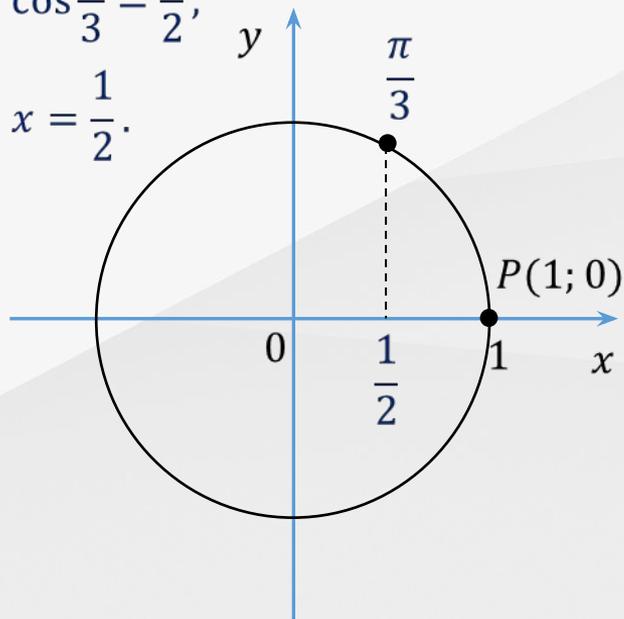
# Уравнение $\cos x = a$

$$\cos \frac{\pi}{3} = x,$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$



Чему равен косинус

точки  $\frac{\pi}{3}$ ?



# Уравнение $\cos x = a$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

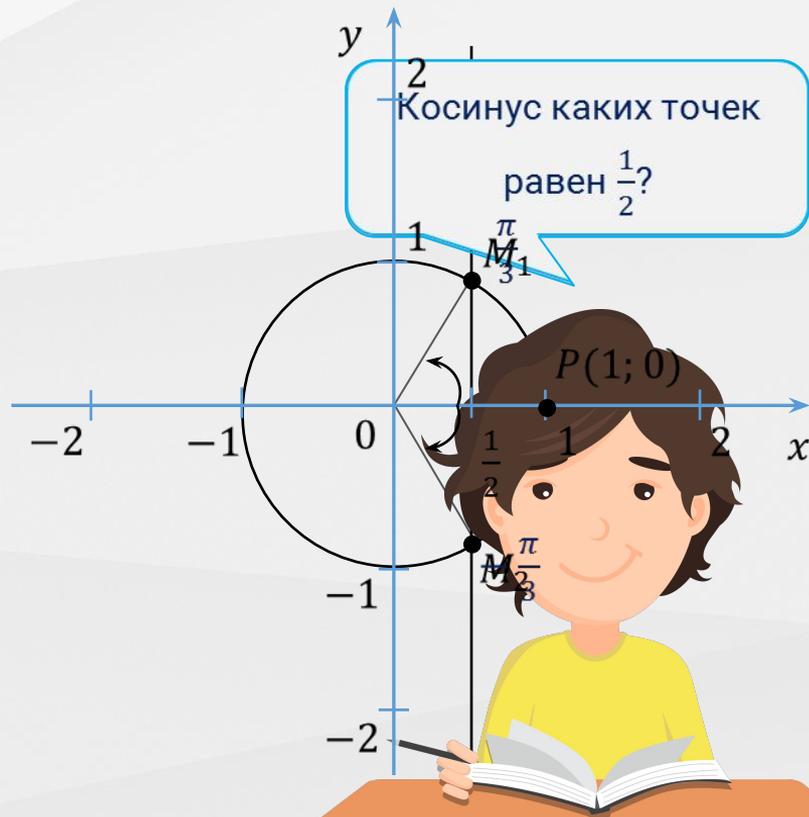
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{3},$$

$$\cos x = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3},$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3},$$



# Уравнение $\cos x = a$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

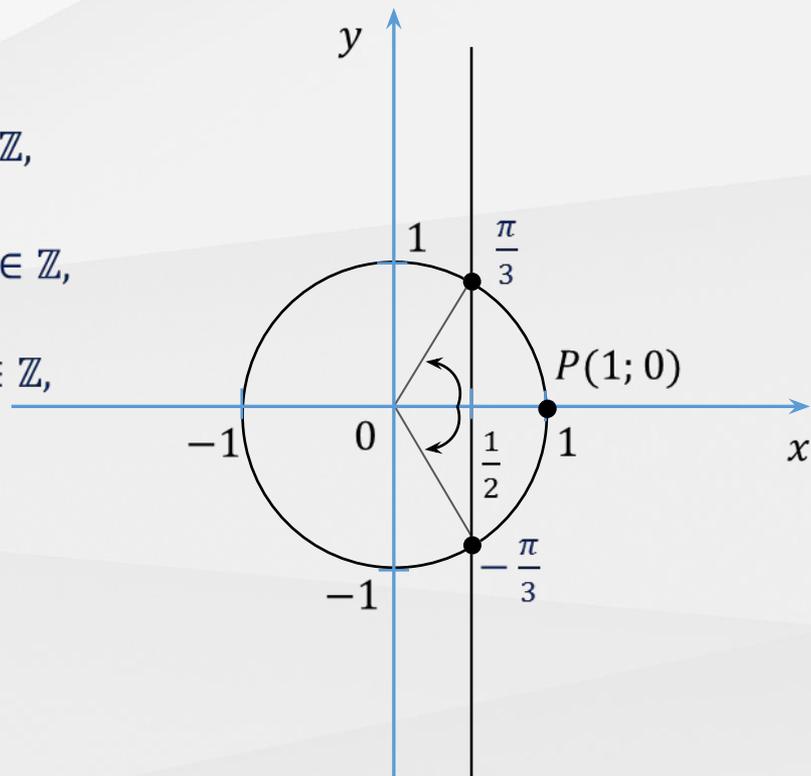
$$x = \frac{\pi}{3},$$

$$\cos x = \frac{1}{2},$$

$$\left[ \begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right.$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$



# Решение уравнения $\cos x = a$

1.  $|a| < 1$ .

$$-1 < a < 1$$

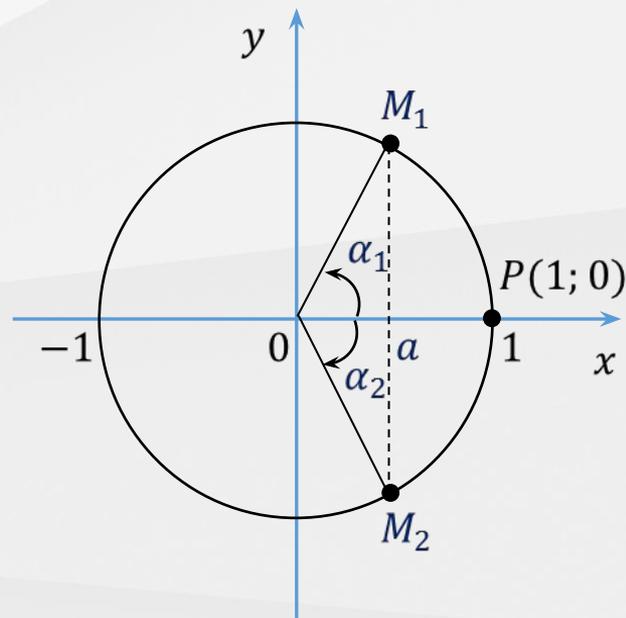
$$\cos x = a,$$

$$x_1 = \alpha_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = \alpha_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha,$$

$$x = \pm\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



# Задание

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решите уравнения  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Решение:**

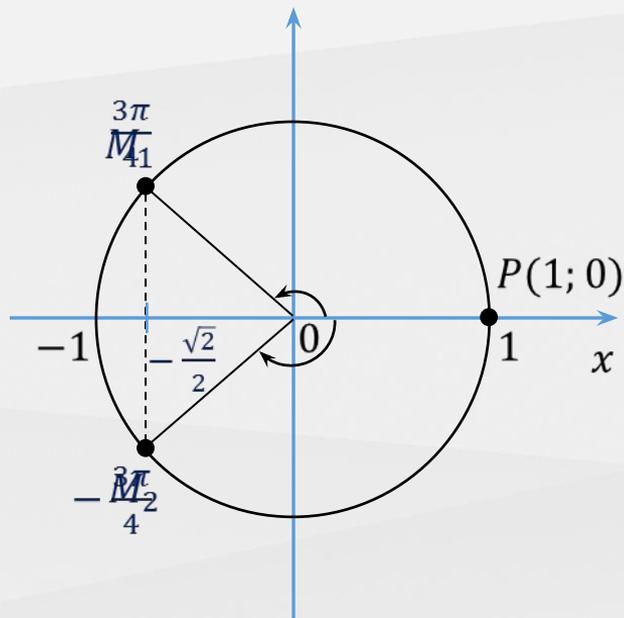
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4},$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

**Ответ:**  $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$



# Задание

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решите уравнения  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Решение:**

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4},$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

**Ответ:**  $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

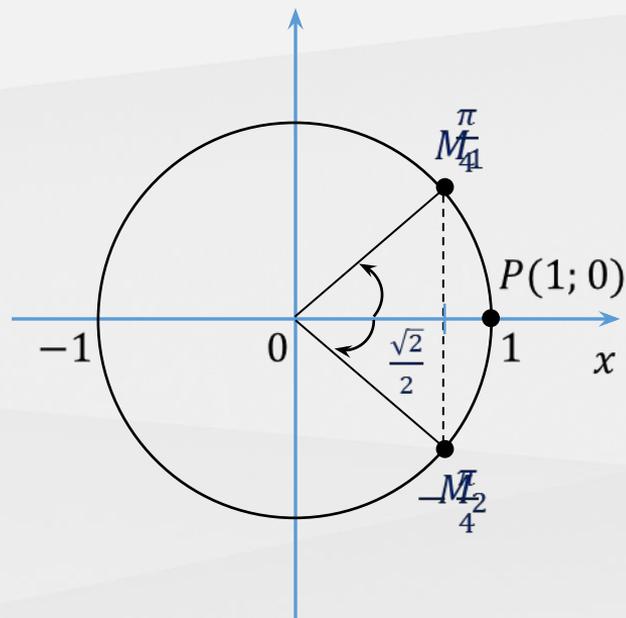
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

**Ответ:**  $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$



# Решение уравнения $\cos x = a$

Каждое из уравнений  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  имеет бесконечное множество корней.

На отрезке  $[0; \pi]$  каждое из этих уравнений имеет только один корень.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

Число  $\frac{3\pi}{4}$  называют

арккосинусом числа  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Ответ:  $x = 2\pi \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

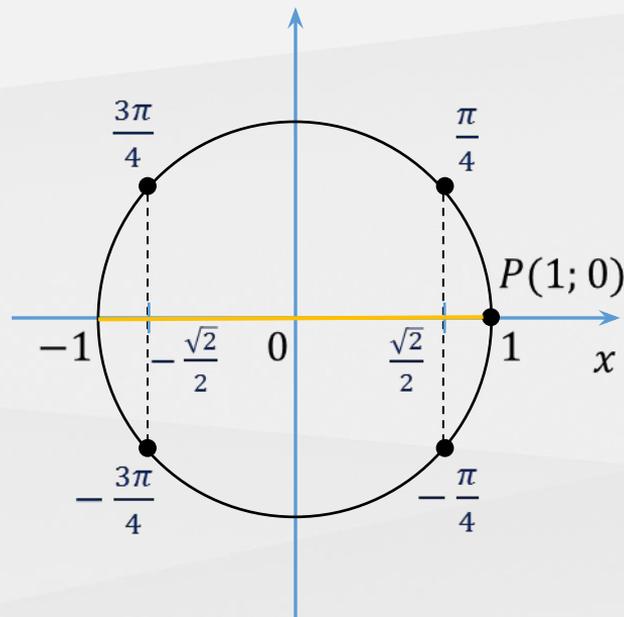
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4},$$

Число  $\frac{\pi}{4}$  называют

арккосинусом числа  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Ответ:  $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .



# Решение уравнения $\cos x = a$

Каждое из уравнений  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  имеет бесконечное множество корней.

На отрезке  $[0; \pi]$  каждое из этих уравнений имеет только один корень.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

Число  $\frac{3\pi}{4}$  называют  
арккосинусом числа  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4},$$

Число  $\frac{\pi}{4}$  называют  
арккосинусом числа  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

«Арккосинус» в переводе с латинского означает «дуга» и «косинус».



# Решение уравнения $\cos x = a$

1.  $|a| \leq 1$ .

$$-1 \leq a \leq 1$$

$$\cos x = a,$$

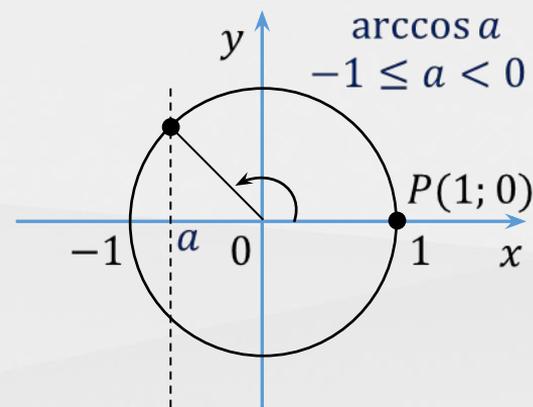
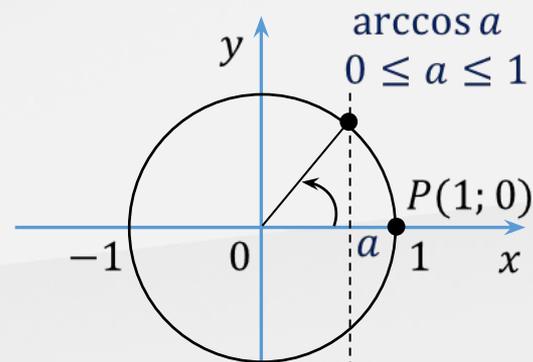
$$x = \pm \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение  $\cos x = a$ , где  $|a| \leq 1$ ,  
на отрезке  $[0; \pi]$  имеет только один корень.

Если  $a \geq 0$ , то этот корень заключён в промежутке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Если  $a < 0$ , то корень располагается в промежутке  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

Этот корень называют арккосинусом числа  $a$   
и обозначают так:  $\arccos a$ .



# Запомните!

Арккосинусом числа  $a$ ,  $|a| \leq 1$ , называется такое число  $x \in [0; \pi]$ , косинус которого равен  $a$ .

$\arccos a = x$ , если  $\cos x = a$  и  $0 \leq x \leq \pi$ .

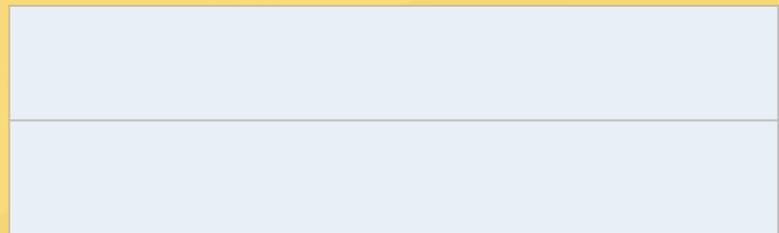
# Арккосинус числа $a$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \frac{\pi}{4} \leq \pi.$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi.$$



# Решение уравнения $\cos x = a$

1.  $|a| \leq 1$ .

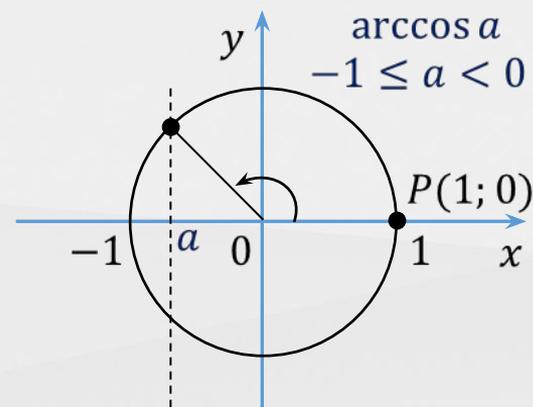
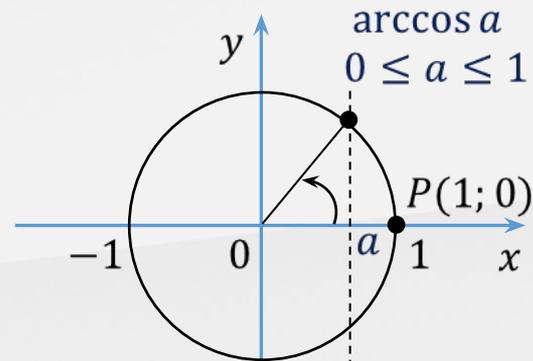
$$-1 \leq a \leq 1$$

$$\cos x = a,$$

$$x = \pm \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Все корни уравнения  $\cos x = a$  можно найти по формуле:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



## Запомните!

Для любого  $a \in [-1; 1]$  справедлива формула:

$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi$$

---

Эта формула позволяет находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел.

---

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

# Решение уравнения $\cos x = a$

2.  $|a| > 1$ .

$$a < -1, a > 1,$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1,$$

Уравнение  $\cos x = a$  не имеет корней.

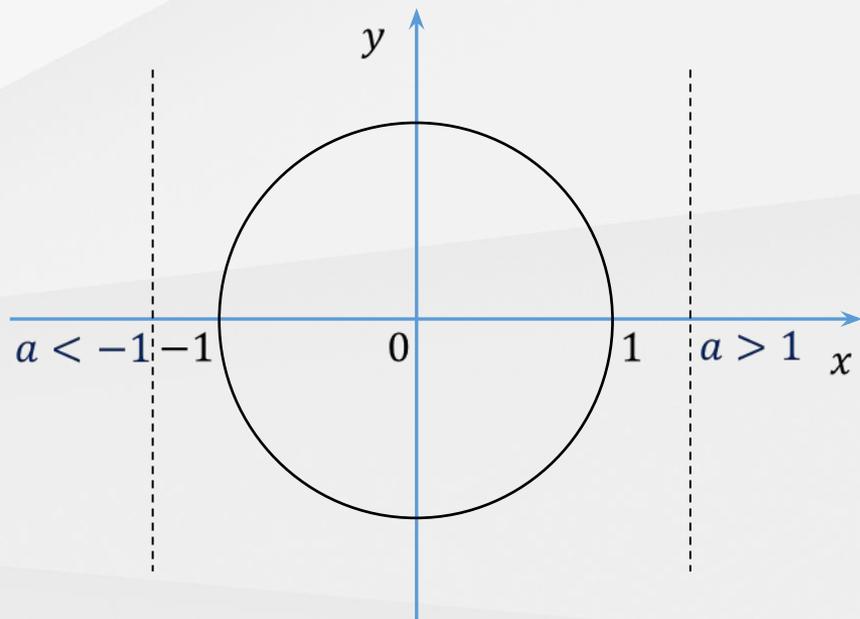
---

$$\cos x = -2,5,$$

$$x = \emptyset.$$

$$\cos x = 7,$$

$$x = \emptyset.$$



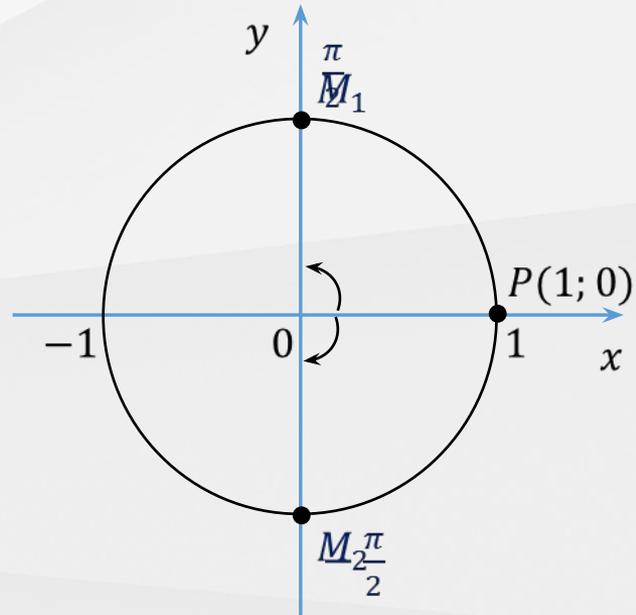
# Решение уравнения $\cos x = a$

3.  $a = 0$ .

$$\cos x = 0,$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



# Решение уравнения $\cos x = a$

4.  $|a| = 1$ .

$$a = -1, a = 1$$

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

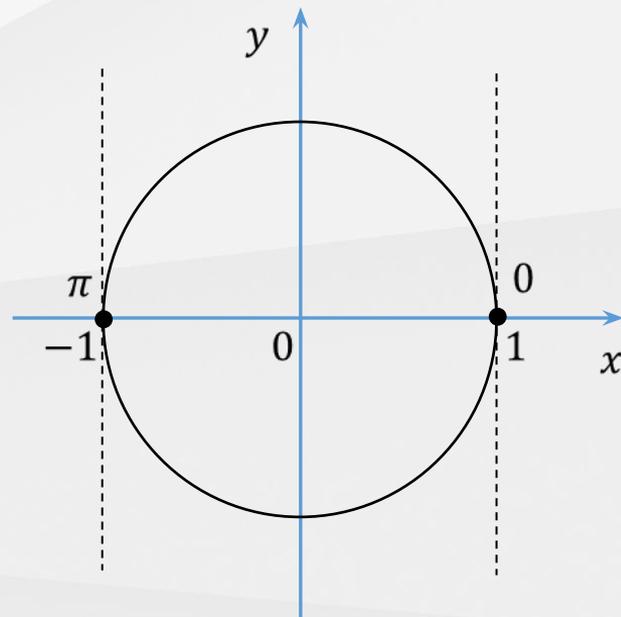
$$x = 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -1,$$

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1,$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



# Задание № 1

Решите уравнение  $\cos x = 0,3$ .

**Решение:**

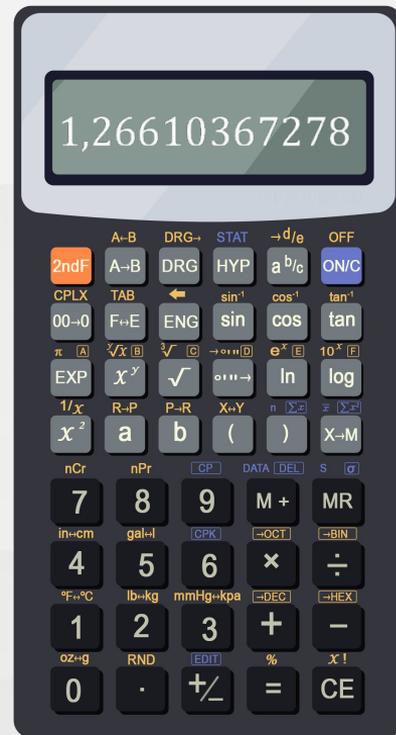
$$\cos x = 0,3,$$

$$x = \pm \arccos 0,3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x \approx \pm 1,266 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

**Ответ:**  $x \approx \pm 1,266 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



## Задание № 2

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

---

**Решение:**

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$2x = \pm \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

**Ответ:**  $x = \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .