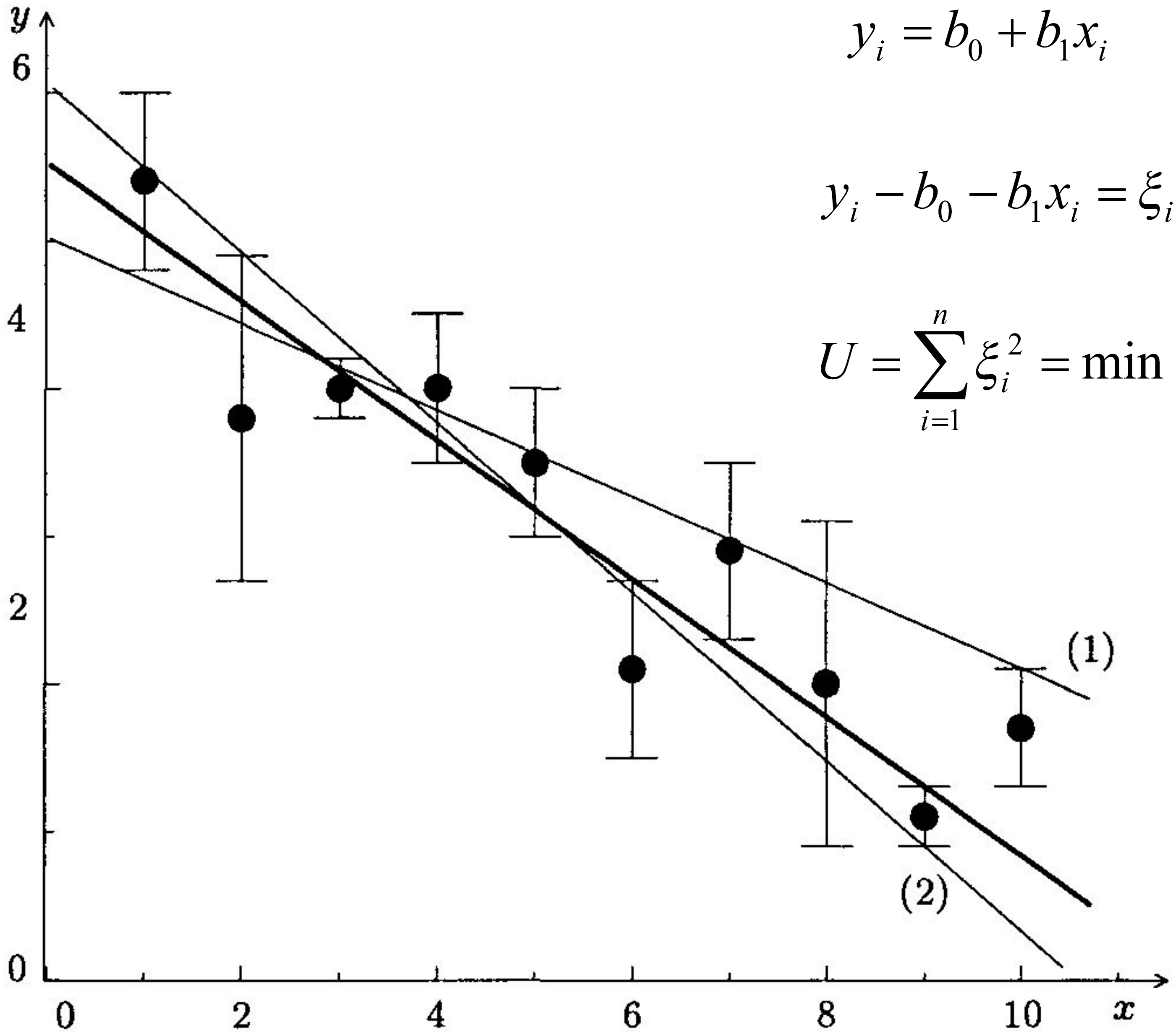


$$y_i = b_0 + b_1 x_i$$

$$y_i - b_0 - b_1 x_i = \xi_i$$

$$U = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \min$$

Расчет коэффициентов регрессии (МНК)

$$U=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_i)^2=\min$$

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{db_0}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_i)=0\\[2ex]\dfrac{dU}{db_1}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_i)x_i=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}nb_0+b_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\\[2ex]b_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i\end{cases}$$

$$b_0=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

$$b_1=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

Коэффициент корреляции Пирсона

$$R = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Условия применения коэффициента корреляции Пирсона:

1. Переменные *x* и *y* должны быть распределены нормально.
2. Переменные *x* и *y* должны быть измерены в интервальной шкале или шкале отношений.
3. Количество значений в исследуемых переменных *x* и *y* должно быть одинаковым.

Значение коэффициента корреляции не зависит от масштаба измерения.

Коэффициент корреляции принимает значения от –1,0 (строгая отрицательная корреляция) до +1,0 (строгая положительная корреляция). Значение 0,0 означает отсутствие корреляции. Связи между переменными могут быть слабыми и сильными (тесными). Их критерии можно оценивать по различным шкалам, из которых наиболее часто применяют шкалы Чеддока и Е.П.Голубкова

Шкала Чеддока		**Шкала Е.П.Голубкова**	
R	**Интерпретация**	**R**	**Интерпретация**
0,1 – 0,3	Слабая	0,00 - 0,20	Отсутствует
0,3 – 0,5	Умеренная	0,21 - 0,40	Очень слабая
0,5 – 0,7	Заметная	0,41 - 0,60	Слабая
0,7 – 0,9	Высокая	0,61 - 0,80	Умеренная
0,9 – 1,0	Весьма высокая	0,81 - 1,00	Сильная

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2}$$

$$\sigma_{b_0} = \sigma_0 \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}}$$

$$\sigma_{b_1} = \sigma_0 \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}}$$

$$\Delta b_j = \frac{\sigma_{b_j} t_{P,n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$b_j = \bar{b}_j \pm \Delta b_j$$

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2$$

$$U = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)^2 = \min$$

$$\begin{cases} n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \end{cases}$$

Линеаризация зависимостей

$$v = ku + z$$

Вид зависимости	Замены				Ограничения
	v	u	k	z	
Парабола второго (или высшего) порядка $y = ax^2 + b$	y	x^2	a	b	
Гипербола $y = \frac{a}{x} + b$	y	$\frac{1}{x}$	a	b	$x \neq 0$
Логарифмическая функция $y = a\ln x + b$	y	$\ln x$	a	b	$x > 0$
Показательная функция $y = ba^x$	$\ln y$	x	$\ln a$	$\ln b$	$y > 0$ $a > 0$ $b > 0$
Степенная функция $y = bx^a$	$\ln y$	$\ln x$	a	$\ln b$	$y > 0$ $x > 0$ $b > 0$
Экспоненциальная функция $y = be^{ax}$	$\ln y$	x	a	$\ln b$	$y > 0$ $b > 0$
Экспоненциальная функция $y = be^{a/x}$	$\ln y$	$\frac{1}{x}$	a	$\ln b$	$y > 0$ $b > 0$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	a	b	$y \neq 0$ $x \neq 0$
$y = \frac{b}{x + a}$	y	xy	$-\frac{1}{a}$	$\frac{b}{a}$	
$y = \frac{1}{b + ae^{-x}}$	$\frac{1}{y}$	e^{-x}	a	b	$y \neq 0$

$$I = I_0\left(e^{U/U_0} - 1\right)$$

$U_0 \sim 10$ мВ

Вольт-амперная характеристика диода Д 223

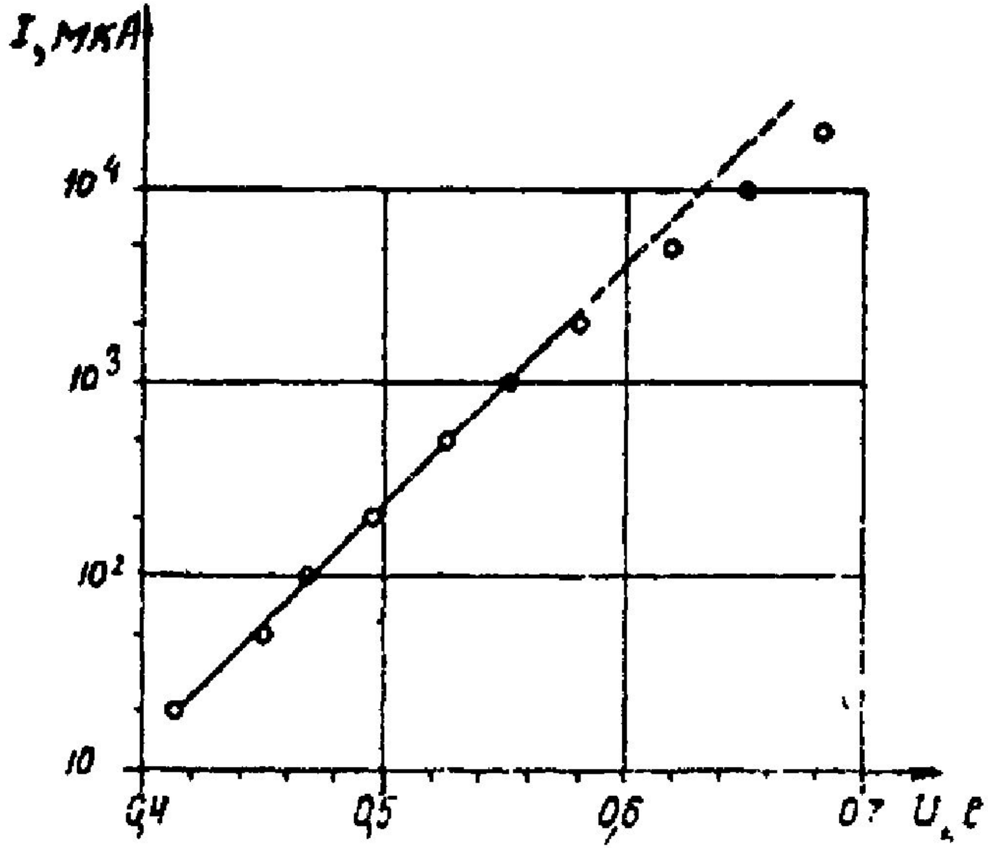
№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U, мВ	413	450	468	495	527	552	581	620	651	683
I, мкА	20,0	50,0	100	200	500	100.10	200.10	500.10	100.10^2	200.10^2

$$U \gg U_0$$

$$I \approx I_0 e^{U/U_0}$$

$$\ln I = \ln I_0 + \frac{1}{U_0}\cdot U$$

$$x = U;\quad y = \ln I$$



№ измерения	1	2	3	4	5	6
x	413	450	468	495	527	552
y	2,996	3,912	4,605	5,298	6,215	6,908

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \kappa x_i - b)^2} ;$$

$$\sigma_{\kappa} = \sigma_{\bar{y}} \sqrt{\frac{1}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}} ;$$

$$\sigma_{b} = \sigma_{\bar{y}} \sqrt{\frac{\overline{x^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}} .$$

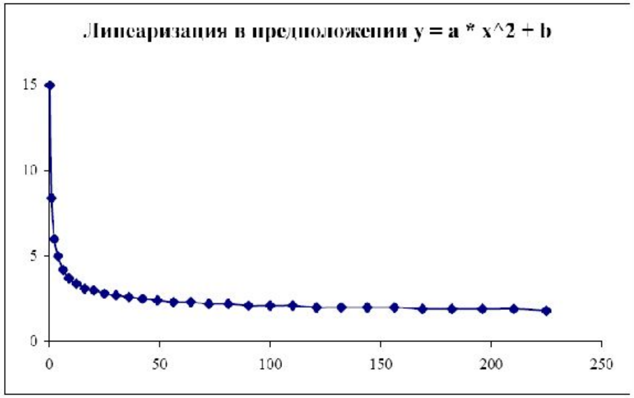
$U_0 = 35{,}0 \pm 0{,}7$ мВ

$I_0 = (1{,}4 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-4}$ мкА.

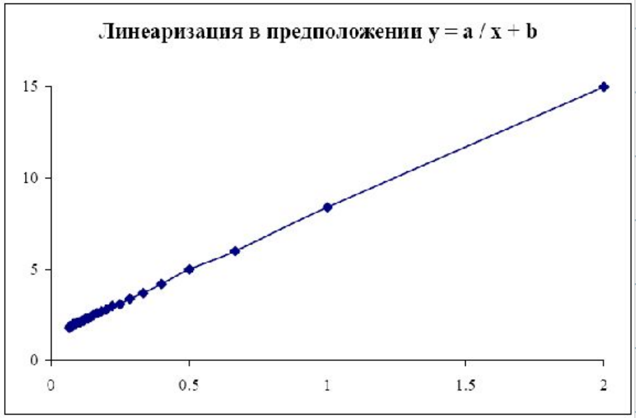
Задание 5. Вариант 47

Исходные данные

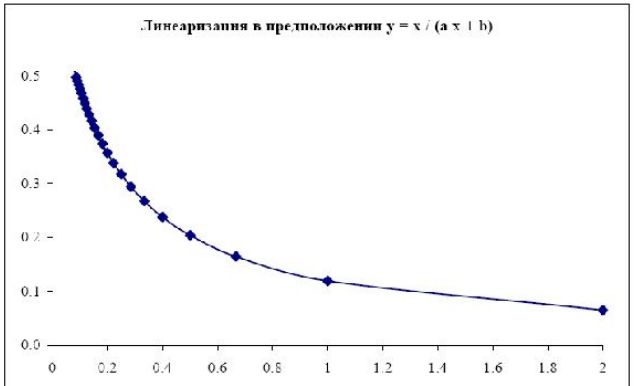
0,5	15,0
1	8,4
1,5	6,0
2	5,0
2,5	4,2
3	3,7
3,5	3,4
4	3,1
4,5	3,0
5	2,8
5,5	2,7
6	2,6
6,5	2,5
7	2,4
7,5	2,3
8	2,3
8,5	2,2
9	2,2
9,5	2,1
10	2,1
10,5	2,1
11	2,0
11,5	2,0
12	2,0
12,5	2,0
13	1,9
13,5	1,9
14	1,9
14,5	1,9
15	1,8



Линеаризация в предположении y = a * x^2 + b



Линеаризация в предположении y = a / x + b



Линеаризация в предположении y = x / (a x + b)

Расчет коэффициента корреляции Пирсона

$$R=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

представление	R
$y=a\,x^2+b$	-0,5126
$y=a/x+b$	0,9998
$y=\dfrac{x}{a\,x+b}$	-0,8259

Наблюдается сильная корреляция экспериментальных данных в представлении $y=a/x+b$

Расчет коэффициентов регрессии

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=6{,}8405 \qquad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=1{,}4281$$

Расчет среднеквадратичных отклонений

$$\sigma_0=\sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\sum_{i=1}^{n}(y_i-b-ax_i)^2}=0{,}0098$$

$$\sigma_a=\sigma_0\sqrt{\frac{n}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}=0{,}0047$$

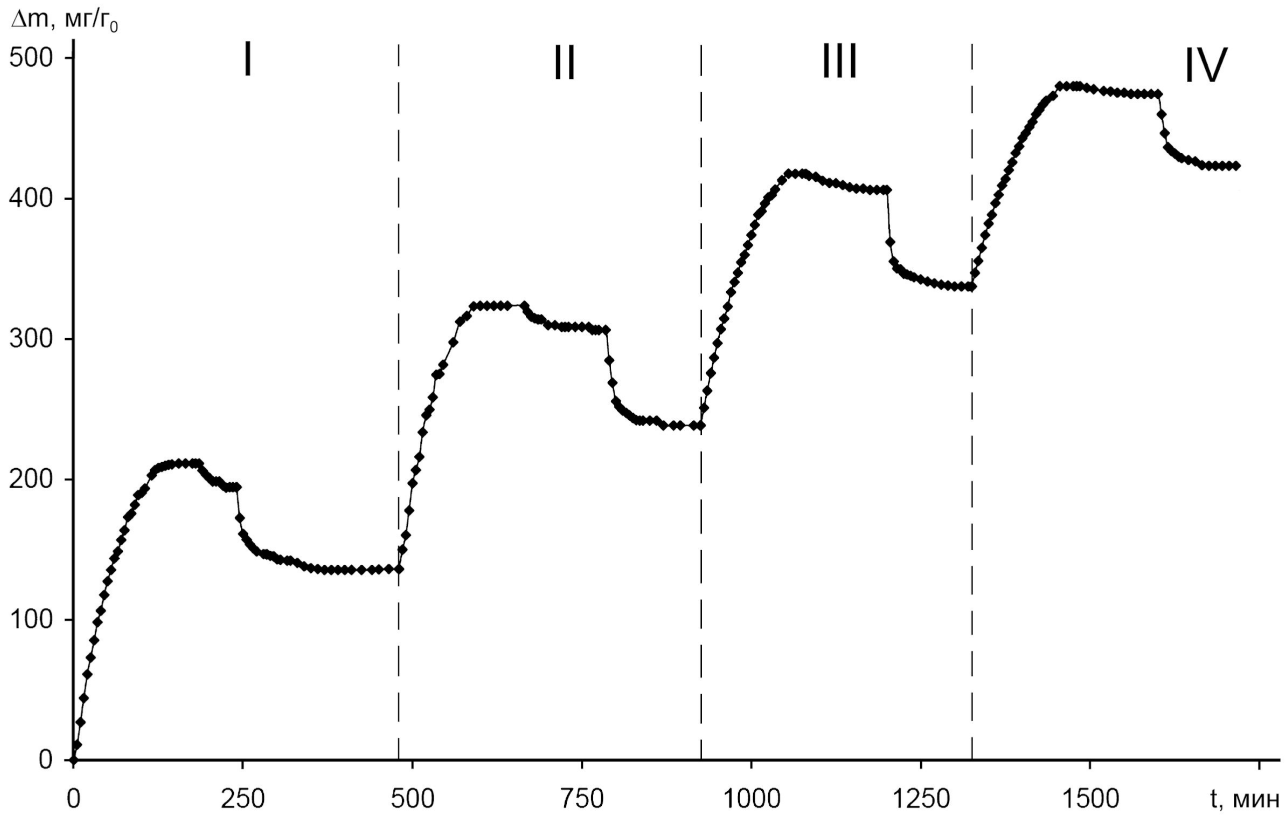
$$\sigma_b=\sigma_0\sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}=0{,}0120$$

Доверительный интервал коэффициентов регрессии при P=0,95

$$\Delta a=\frac{\sigma_a\,t_{P,n-1}}{\sqrt{n}}=0{,}0018 \qquad \Delta b=\frac{\sigma_b\,t_{P,n-1}}{\sqrt{n}}=0{,}0045$$

Уравнение регрессии

$$y=\frac{(a\pm\Delta a)}{x}+(b\pm\Delta b)$$



Δm, мг/г$_0$
500
400
300
200
100
0
I
II
III
IV
0
250
500
750
1000
1250
1500
t, мин

1. *Уравнения ускоряющегося типа*

Степенной закон $\alpha^{1/n} = kt$ **1**

Экспоненциальный закон $\ln \alpha = kt$ **2**

2. *Уравнения сигмоидного типа*

Аврами—Ерофеева $\begin{cases} [-\ln(1-\alpha)]^{1/2} = kt & \mathbf{3} \\ [-\ln(1-\alpha)]^{1/3} = kt & \mathbf{4} \\ [-\ln(1-\alpha)]^{1/4} = kt & \mathbf{5} \end{cases}$

Праута—Томпкинса $\ln[\alpha/(1-\alpha)] = kt$ **6**

3. *Уравнения замедляющегося типа*

3.1. *Диффузионные механизмы*

Одномерная диффузия $\alpha^2 = kt$

Двумерная диффузия $(1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha = kt$

Трехмерная диффузия $[1-(1-\alpha)^{1/3}]^2 = kt$

Гинстлинг—Браунштейн $[1-(2\alpha/3)] - (1-\alpha)^{2/3} = kt$

3.2. *Геометрические модели*

Сжимающаяся площадь $1-(1-\alpha)^{1/2} = kt$ **7**

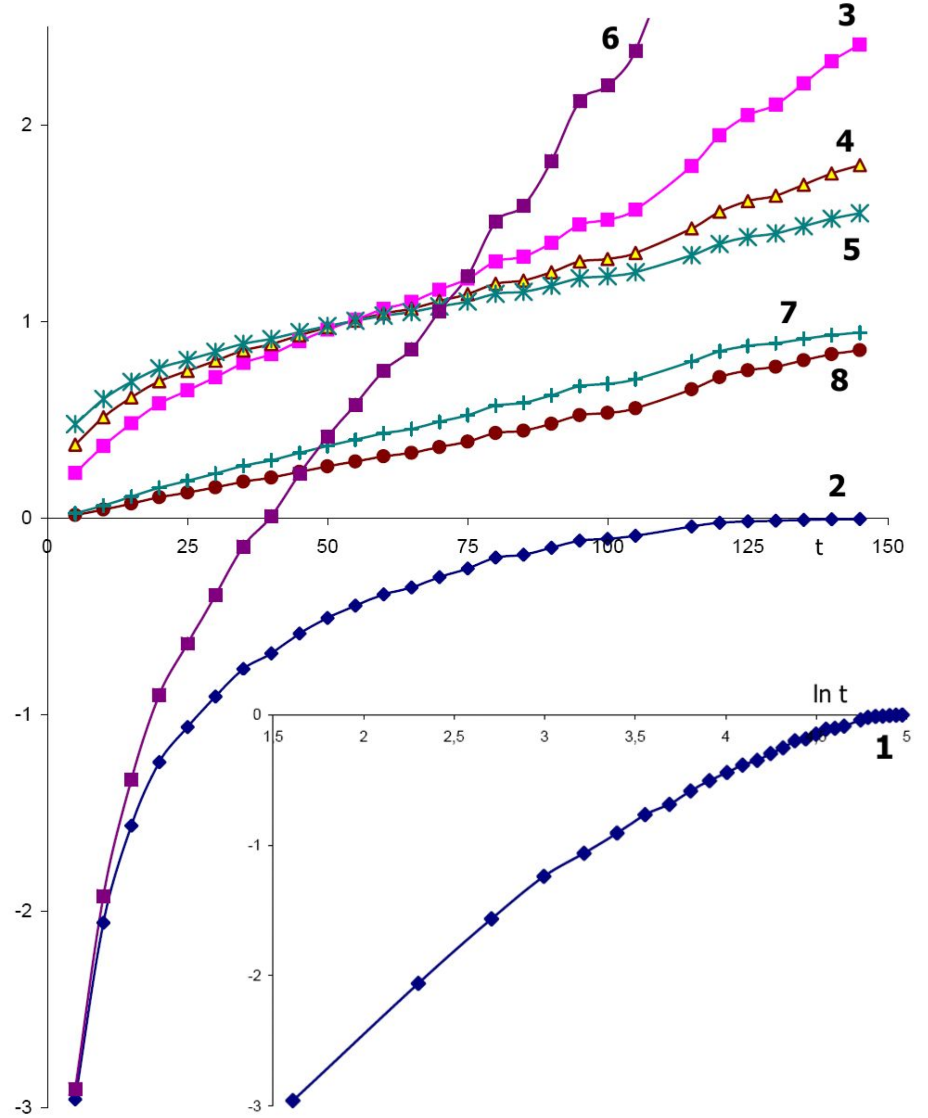
Сжимающийся объем $1-(1-\alpha)^{1/3} = kt$ **8**

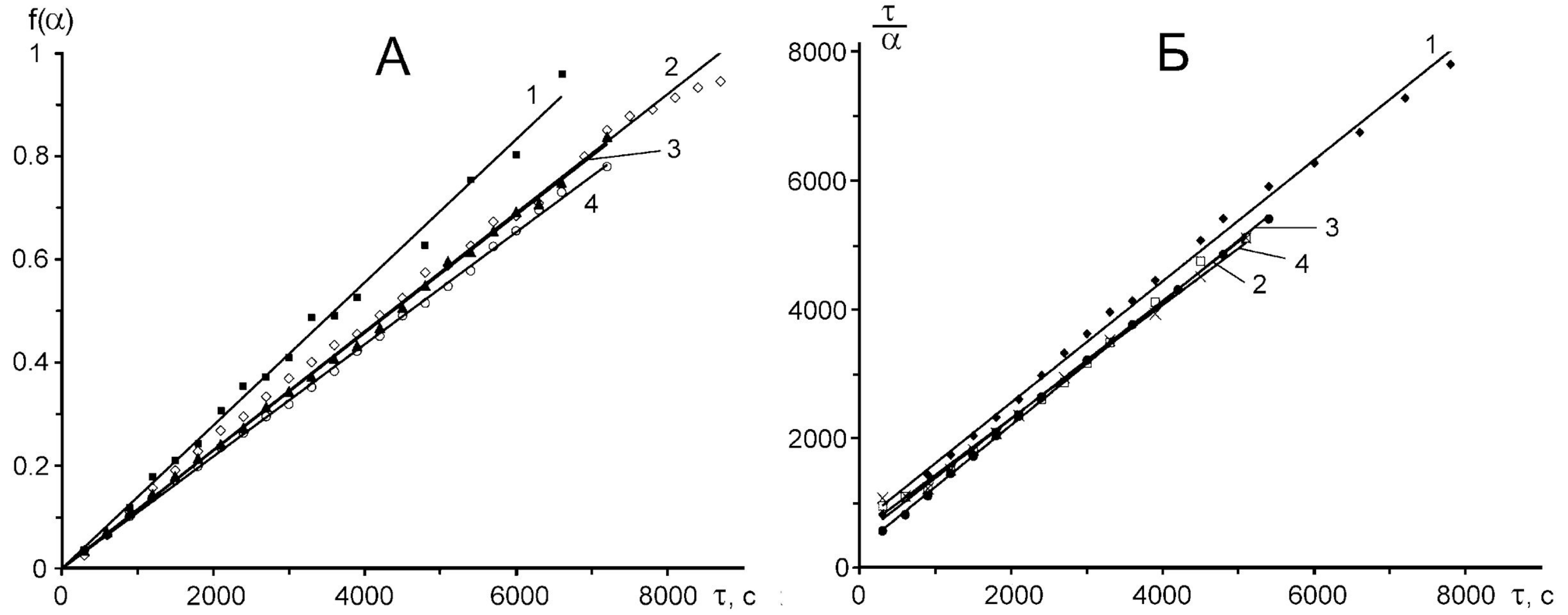
3.3. *Порядок реакции по отношению к* α

Первый $-\ln(1-\alpha) = kt$

Второй $(1-\alpha)^{-1} = kt$

Третий $(1-\alpha)^{-2} = kt$





$$1-(1-\alpha)^{1/2}=k\tau$$

$$\frac{\tau}{\alpha}=\frac{1}{kq_{\max}}+\tau$$