ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Числовые ряды

- **Числовой ряд** – *это сумма членов числовой последовательности вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

где $\sum$ *- математический значок суммы*

a$_k$ – *общий член числового ряда*

k – *переменная – «счетчик».*

Пример 1.

Записать первые три члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2-1\right)$

Решение:

$$n=1, a_1=1^2-1=0;$$

$$n=2, a_2=2^2-1=3;$$

$$n=3, a_3=3^2-1=8.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2-1\right)=0+3+8+\ldots$$

***Частичной суммой ряда* называется выражение вида:**

$$\sum_{n=1}^{k} a_n$$

, где k – конечное натуральное число.

говорят что данный ряд сходится, если существует конечный предел

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

который называют суммой ряда.

- ✔ *Если предел последовательности частичных сумм числового ряда **не существует** или **бесконечен**, то ряд называется **расходящимся**.*

Основные свойства сходящихся рядов

✔ ***Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится, т.е.*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

Пример 3. Доказать что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2-1\right)$ ***расходится.***

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n^2-1\right) = \infty$$

т.е. ряд является расходящимся.

$$\text{Ответ}: \sum_{n=1}^{\infty}\left(a^2-1\right) - \text{расходится.}$$

Пример 2.

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n+2}$

Решение: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{0}{1} = 0$

Ответ: ***ряд сходится.***

- ***Однако в подавляющем большинстве случаев <u>найти сумму ряда</u> не так-то просто, и поэтому на практике для исследования сходимости ряда используют специальные признаки.***

Существует несколько признаков сходимости ряда:

- ✔ ***Необходимый признак сходимости ряда***
- ✔ ***Признаки сравнения***
- ✔ ***Признак Даламбера***
- ✔ ***Признаки Коши***
- ✔ ***другие признаки***

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется **гармоническим рядом**.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

но в теории математического анализа доказано, что гармонический ряд расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ***называется обобщенным гармоническим рядом.***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

- ✔ ***Данный ряд расходится при $\alpha \leq 1$***
- ✔ ***Данный ряд сходится при $\alpha > 1$***

Признак сравнения

- ***Рассмотрим два положительных числовых ряда [illegible] и [illegible].***
- ***Если известно, что ряд [illegible] – сходится, и выполнено неравенство [illegible] (n = 1, 2, 3, …), то ряд [illegible] тоже сходится.***

Предельный признак сравнения числовых положительных рядов

- ***Рассмотрим два положительных числовых ряда*** [illegible] ***и*** [illegible]**.**
- ***Если предел отношения общих членов этих рядов равен конечному, отличному от нуля числу А:*** [illegible] **,** ***то оба ряда сходятся или расходятся одновременно*****.**

Пример 3.

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$

Решение: *Сравним данный ряд со сходящимся рядом* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Используем предельный признак сравнения.

Известно, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *– сходится.*

Если нам удастся показать, что $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ *равен конечному, отличному от нуля числу, то будет доказано, что ряд* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$ *– тоже сходится.*

Пример 4.

Получено конечное, отличное от нуля число, значит, исследуемый ряд сходится вместе с рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$Ответ: \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} - ряд \quad сходится.$$

Предельный признак сравнения применяется тогда, когда в общем члене ряда:

1) В знаменателе находится многочлен.

2) Многочлены находятся и в числителе и в знаменателе.

3) Один или оба многочлена могут быть под корнем.

Основные же предпосылки для применения признака Даламбера следующие:

1) ***В общий член ряда («начинку» ряда) входит какое-нибудь число в степени.***

2) ***В общий член ряда входит факториал.***

Признак Даламбера

Рассмотрим положительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$$

Признак Даламбера

а) ***При $D < 1$, ряд сходится. В частности, ряд сходится при $D = 0$.***

б) При $D > 1$, ряд расходится. В частности, ряд расходится при $D = \infty$.

в) При $D = 1$, признак не дает ответа.

Нужно использовать другой признак.

Чаще всего единица получается в том случае, когда признак Даламбера пытаются применить там, где нужно использовать предельный признак сравнения.

Пример 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$

Исследовать ряд на сходимость

Решение: ***Используем признак Даламбера:***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot \left((n+1)^2+(n+1)-1\right)}{4^{n+1}\cdot\left(n^2+n-1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot \left(n^2+2n+1+n+1-1\right)}{4\cdot 4^n \cdot \left(n^2+n-1\right)} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right) = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4} < 1$$

таким образом, исследуемый ряд сходится.

Пример 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$

Исследовать ряд на сходимость.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1+1}}{\sqrt{3(n+1)+5}}}{\dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 2^n \cdot \sqrt{3n+5}}{2 \cdot 2^n \cdot \sqrt{3n+8}} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n+5}{3n+8}} = \frac{\infty}{\infty} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3+\dfrac{5}{n}}{3+\dfrac{8}{n}}} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{1} = 2 \cdot 1 = 2 > 1$$ ***следовательно исследуемый ряд расходится.***

Интегральный признак Коши

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Данный ряд сходится или расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Пример 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$

Исследовать ряд на сходимость.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[6]{(2x+3)^7}}=\int_1^{\infty}(2x+3)^{-\frac{7}{6}}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}(2x+3)^{-\frac{7}{6}}d(2x+3)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2x+3}}\right)=-3\cdot 0=0$$

Получено конечное число, значит, исследуемый ряд сходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Спасибо
за
внимание!