Элементы теории вероятностей и математической статистики и их применение в расчетах надежности

Лекция №2

Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей - математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях. Одним из основных понятий является понятие случайного события (в дальнейшем просто событие).

Отказ – событие случайное.

Событием называется всякий факт (исход), который в результате опыта (эксперимента) может произойти или не произойти. Каждому из таких событий можно поставить в соответствие определенное число, называемое его ***вероятностью*** и являющееся мерой возможного совершения этого события.

Множество – это любая совокупность объектов произвольной природы, каждый из которых называется элементом множества. Множества обозначаются по-разному: или одной большой буквой или перечислением его элементов, данным в фигурных скобках, или указанием (в тех же фигурных скобках) правила, по которому элемент относится к множеству.

Вероятностные и статистические оценки случайных событий и величин

2

<u>Случайное событие</u> – называется качественный
результат опытов, который может произойти или непроизойти.

<u>Вероятность случайного события</u> – называется
степень объективной возможности этого события,
выраженная числом.

<u>Вероятность события А</u> – отношение числа достоверных этому событию исходов к общему числу исходов

$$P(A) = m / n$$

- вероятность достоверного события равна 1

$$P(A) = m / n = n / n = 1$$

- вероятность невозможного события равна 0

$$P(A) = m / n = 0 / n = 0$$

<u>Математическая вероятность</u> появления события обозначается $P[A]$

<u>Случайная величина</u> - переменная величина,
которая в результате опыта принимает одно из возможных заранее неизвестных значений.

- дискретная (прерывная)
- непрерывная

<u>Закон распределения случайной величиной</u> задается **<u>функцией распределения, F(x)</u>**

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

<u>Производная от функции распределения</u>

называется плотностью распределения случайной величины

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Статистическая вероятность события А обозначается - **P*[A]**

Статистическую вероятность события *А* вычисляют как отношение числа благоприятных случаев ***m*** к общему числу случаев ***n***:

$$P^*[A] = \frac{m}{n}(m \le n)$$

Числовые характеристики случайных величин:

- ✔ математическое ожидание;
- ✔ дисперсия;
- ✔ среднее квадратичное отклонение;
- ✔ коэффициент вариации

Математическое ожидание случайной величины X характеризует некоторое число, около которого группируются возможные значения случайной величины:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины называют сумму произведений всех возможных значений на их вероятности

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Числовые характеристики случайных величин:

Дисперсией называется числовая характеристика, применяемая для оценки разброса значений случайной величины около ее среднего значения.

Дисперсия обозначается символом $D[X]$

и определяется как математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от ее математического ожидания.

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M[X]^2\right) \cdot f(x) dx \qquad D[X] = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

Коэффициентом вариации случайной величины называется отношение:

$$V[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]}$$

Решение задач

Пример 1

Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение:

Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9$$

Решение задач

Пример 2

Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение:

1. Определим математическое ожидание M(X):

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5$$

2. Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

3. Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3$$

4. Определим дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05$$