Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Сложение (вычитание) комплексных чисел

Примеры:

1.

$$z_1 = 4 + 2i$$

$$z_2 = -5 + 3i$$

$$z_1 + z_2 = (4 - 5) + (2 + 3)i = -1 + 5i$$

2.

$$z_1 = 3 - 5i$$

$$z_2 = 2 - 7i$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 2) + (-5 - (-7)i = 1 + 2i$$

Произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме.

Произведение:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 3 + 4i$$

$$z_1 z_2 = (1 + 2i) \cdot (3 + 4i) =$$

$$= 1 \cdot 3 + 2i \cdot 3 + 1 \cdot 4i + 2i \cdot 4i =$$

$$= 4 + 6i + 4i + 8i^2 = 4 + 10i - 8 =$$

$$= -4 + 10i$$

$$z_1 z_2 = -4 + 10i$$

Частное:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 1 + i$$

$$\frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{1 + 2i - i + 2}{1+1} = \frac{3+i}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

- Комплексное число $z = a + bi$ изображается на координатной плоскости точкой M(a;b) или вектором $\vec{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой M(a;b).

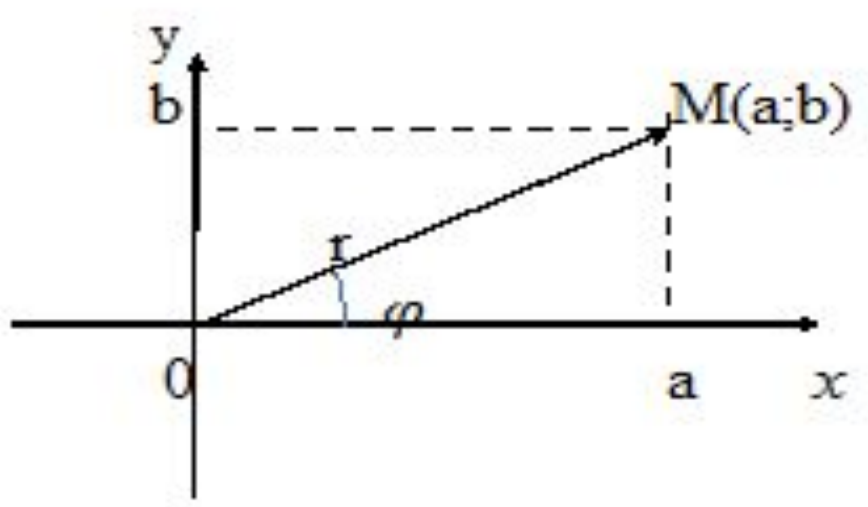


Рис. 1.

Модуль и аргумент комплексного числа

• **Определение .** *Модулем комплексного числа называется абсолютная величина вектора, соответствующего этому числу.*

Модуль числа $z = a + bi$ обозначается $|z|$ или $|a+bi|$ или r. На основании теоремы Пифагора (см. рис.1) получается формула

$$\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$$

Например, комплексное число $z = 8 – 6i$ имеет модуль равный 10, так как $|z|=\sqrt{8}2+(-6)2=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$.

Определение. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением оси Ох и вектором, соответствующим этому числу (см. рис. 1).

Аргумент обозначается φ, arg z или arg (a+bi).

Аргумент комплексного числа z=a+bi определяется *неоднозначно*, т.е. *одному комплексному числу соответствует бесконечное множество аргументов.*

Правило нахождения аргумента комплексного числа

1. Найти tg $\alpha = |b/a|$.
2. Найти $\alpha = \operatorname{arctg}|b/a|$.
3. Выяснив, в какой четверти лежит вектор, соответствующий числу, найти аргумент φ.

Если $\varphi \in$ 1 четверти, то $\varphi = \alpha$

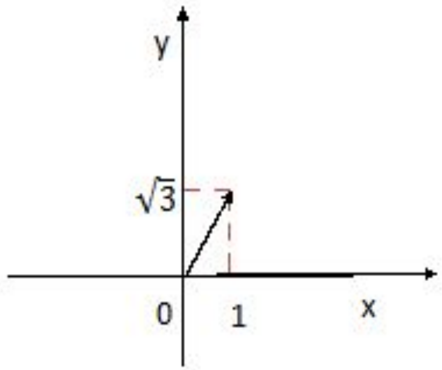
$\varphi \in$ 2 четверти, то $\varphi = 180 - \alpha$

$\varphi \in$ 3 четверти, то $\varphi = 180 + \alpha$

$\varphi \in$ 4 четверти, то $\varphi = 360 - \alpha$

Примеры:

Найти модуль и аргумент комплексного числа.



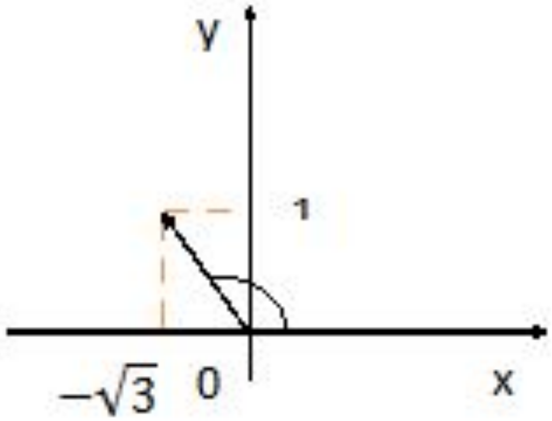
а) $z = 1 + \sqrt{3}j$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^0$$

$$\mathrm{M}\,(1; \sqrt{3}) \Rightarrow \varphi = \alpha = 60^0 (1 \text{ четверть})$$



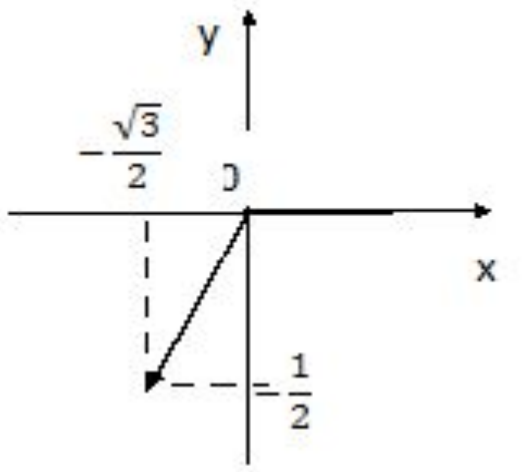
б) $z = -\sqrt{3} + j$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^0, \quad M(-\sqrt{3}; 1) - 2 \text{ четверть}$$

$$\varphi = 180^0 - \alpha = 180^0 - 30^0 = 150^0$$



в) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$

$$z = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\text{tg}\,\alpha = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} * (-\frac{2}{1})\right| = \sqrt{3}, \quad \alpha = \text{arctg}\sqrt{3} = 60^0$$

$$\varphi = 180^0 + \alpha = 180^0 + 60^0 = 240^0$$

или $\varphi = -(180^0 - \alpha) = -(180^0 - 60^0) = -120^0$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть дано комплексное число $z=a+b\mathrm{i}$

Из Δ ОМА можно выразить действительные числа a и b через модуль r и аргумент φ числа z следующим образом:

$a=r\cos\varphi, b=r\sin\varphi$.

Таким образом, комплексное число можно записать в виде

$$\boldsymbol{z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)},$$

где r – модуль комплексного числа, φ - один из его аргументов.

Представление комплексного числа z в виде

$$z = r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа.

Правило перехода от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической

Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи к тригонометрической **нужно**:

1. Найти модуль комплексного числа по формуле: $\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$

2. Найти один из аргументов комплексного числа, пользуясь правилом нахождения аргумента.

3. Записать комплексное число в тригонометрической форме.

Пример. Записать число $z = -\sqrt{3} - j$ в тригонометрической форме.

Решение:

1. $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$
2. $\operatorname{tg} \alpha = \left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \sqrt{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^0$, $\varphi = 180^0 + 60^0 = 240^0$
3. $z = 2(\cos 240^0 + j \sin 240^0)$

Примечание

Модули и аргументы действительных чисел и чисто мнимых чисел надо находить непосредственно исходя из их геометрического изображения, а не используя приведенное выше правило (тем более, что для чисто мнимых чисел это правило вообще нельзя применять).

Например:

1. $z = -4$, значит $M(-4; 0)$. Тогда $r = 4$, $\varphi = 180^0$ и $z = 4(\cos 180^0 + j \sin 180^0)$
2. $z = 2j$, значит $M(0; 2)$. Тогда $r = 2$, $\varphi = 90°$ и $z = 2(\cos 90^0 + j \sin 90^0)$

Чтобы перейти от тригонометрической формы записи обратно к алгебраической форме нужно найти значения sinφ и cosφ при данном аргументе и умножить на модуль.

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

Например: z=3(cos120°+i sin120°)=

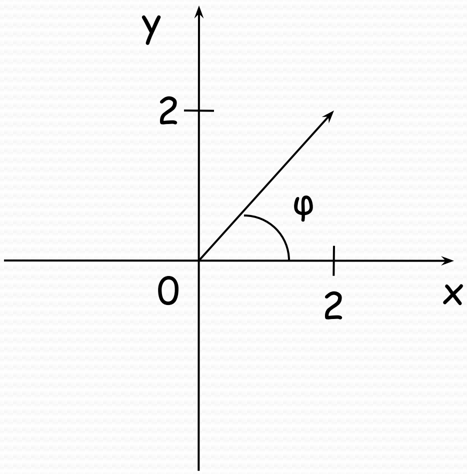
=3*(−1/2+√3/2i)=−3/2+3√3/2i

Пример: Комплексное число изобразить на плоскости и записать в тригонометрической форме

$$z = 2 + 2i$$

$x = 2$ $\qquad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = 2$ $\qquad r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$



Для I четверти

$$\arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{2}{2} = arctg1$$

$$\varphi = \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1. ***Умножение***

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$

Тогда $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Таким образом, *при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

2. Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Таким образом, *при делении комплексных чисел модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент – разности их аргументов.*

Пример:

$z_1 = 8\,(\cos 120^0 + j\sin 120^0)$, $z_2 = 2(\cos 30^0 + j\sin 30^0)$

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2}(\cos(120° - 30°) + j\sin(120° - 30°)) = 4(\cos 90^0 + j\sin 90^0)$

Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме.

Произведение:

$$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$z_1 z_2 = 3\cdot 5(\cos(\frac{\pi}{3}+\pi) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\pi))$$

$$z_1 z_2 = 15(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$$

Частное:

$$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}(\cos(\frac{\pi}{3}-\pi) + i\sin(\frac{\pi}{3}-\pi))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$$

3. Возведение в степень

$z^n = (r(\cos\varphi + j\sin\varphi))^n = r^n(\cos\varphi n + j\sin\varphi n)$ – это формула Муавра.

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень нужно его модуль возвести в данную степень, а аргумент умножить на показатель степени.*

Пример:

$z = (\cos 10^0 + j\sin 10^0)$

$z^5 = 2^5(\cos 10^0 * 5 + j\sin 10^0 * 5) = 32(\cos 50^0 + j\sin 50^0)$

4. Извлечение корня из комплексного числа.

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

Пример:

$$\sqrt[4]{81(\cos 180^0 + j\sin 180^0)} = \sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{180^0 + 360^0 k}{4} + j\sin\frac{180^0 + 360^0 k}{4}\right) =$$

$$= 3(\cos(45^0 + 90^0 k) + \ j\sin(45^0 + 90^0 k))$$

При k = 0, 1, 2, 3 получим

$z_0 = 3(\cos 45^0 + j\sin 45^0) = 3(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$

$z_1 = 3(\cos(45^0 + 90^0) + j\sin(45^0 + 90^0)) = 3(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$

$z_2 = 3(\cos(225^0 + j\sin 225^0) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}j$

$z_3 = 3(\cos 315^0 + j\sin 315^0) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - j\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Комплексное в показательной (или экспонентной) форме

$$z = re^{i\varphi}$$

Где $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$

В силу формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

функция $e^{i\varphi}$ периодическая с основным периодом 2π.

Для записи комплексного числа в показательной форме надо

определить главное значение аргумента и модуль.

Произведение и частное комплексных чисел в показательной форме.

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 z_2 = 6e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Возведение комплексных чисел в степень.

Правило умножения комплексных чисел позволяет возвести число в n-степень:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots}_{n}$$

Получим Формулу Муавра: $$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}$$

Для показательной формы используют формулу:

$$\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi}}$$

Возведение комплексных чисел в степень. *Пример.*

Найти $(1+\sqrt{3}i)^9$

Запишем число в тригонометрической форме:

$$r=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\arg z = arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

$$z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z^9=(1+\sqrt{3}i)^9=2^9(\cos 9\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 9\cdot\frac{\pi}{3})=$$

$$=2^9(\cos 3\pi+\sin 3\pi)=2^9\cdot(-1)=-512.$$

Домашнее задание

1. Изобразить на координатной плоскости числа:

1. $z = 5$;
2. $z = -3i$;
3. $z = 3 + 2i$;
4. $z = 5 - 2i$;
5. $Z = -3 + 2i$;
6. $z = -1 - 5i$.

2.Записать в тригонометрической показательной форме комплексные числа:

1. $z=1+i$.
3. $z=-2+2i$.
4. $z=\sqrt{3}+i$
5. $z=-3+3i$
6. $z=-\sqrt{3}i$
7. $z=-10$.

3. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме

Найти произведение комплексных чисел z_1 и z_2:

16. $z_1=2(\cos\frac{5\pi}{6}+j\sin\frac{5\pi}{6})$; $z_2=0{,}4(\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2})$.

17. $z_1=(\cos 45^0+j\sin 45^0)$; $z_2=3(\cos 180^0+j\sin 180^0)$.

18. $z_1=0{,}6(\cos\frac{2\pi}{3}+j\sin\frac{2\pi}{3})$; $z_2=5(\cos\frac{5\pi}{6}+j\sin\frac{5\pi}{6})$.

Найти частное комплексных чисел z_1 и z_2:

19. $z_1=0{,}6(\cos 120^0+j\sin 120^0)$; $z_2=3(\cos 240^0+j\sin 240^0)$.

20. $z_1=3(\cos 225^0+j\sin 225^0)$; $z_2=5(\cos 45^0+j\sin 45^0)$.

4. Выполнить действия № 29, 31, 34, 39, 40

Вычислить, пользуясь формулой Муавра:

28. $(3(\cos 45^0 + j\sin 45^0))^6$.

29. $(2(\cos 15^0 + j\sin 15^0))^4$.

30. $(\cos 30^0 - j\sin 30^0)^8$.

31. $(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4})^{10}$.

32. $(2(\cos 60^0 + j\sin 60^0))^6$.

33. $(-\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4})^8$.

34. $(\cos 150^0 + j\sin 150^0)^{10}$.

35. $(\cos 30^0 + j\sin 30^0)^5$.

36. $(1 + j)^{10}$.

37. $(3 - j\sqrt{3})^5$.

38. $(-2 - 2j)^8$.

39. $(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})^9$.

40. $\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$.

41. $(1 - j)^{10}$.