



Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Сложение (вычитание) комплексных чисел

Примеры:

1. $z_1 = 4 + 2i$

$$z_2 = -5 + 3i$$

$$z_1 + z_2 = (4 - 5) + (2 + 3)i = -1 + 5i$$

2.

$$z_1 = 3 - 5i$$

$$z_2 = 2 - 7i$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 2) + (-5 - (-7))i = 1 + 2i$$

Произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме.

Произведение:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 3 + 4i$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = \\ &= 1 \cdot 3 + 2i \cdot 3 + 1 \cdot 4i + 2i \cdot 4i = \\ &= 4 + 6i + 4i + 8i^2 = 4 + 10i - 8 = \\ &= -4 + 10i \end{aligned}$$

$$z_1 z_2 = -4 + 10i$$

Частное:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 1 + i$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(1 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \\ &= \frac{1 + 2i - i + 2}{1 + 1} = \frac{3 + i}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$i^2 = -1$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

- Комплексное число $z=a+bi$ изображается на координатной плоскости точкой $M(a;b)$ или вектором OM , начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой $M(a;b)$.

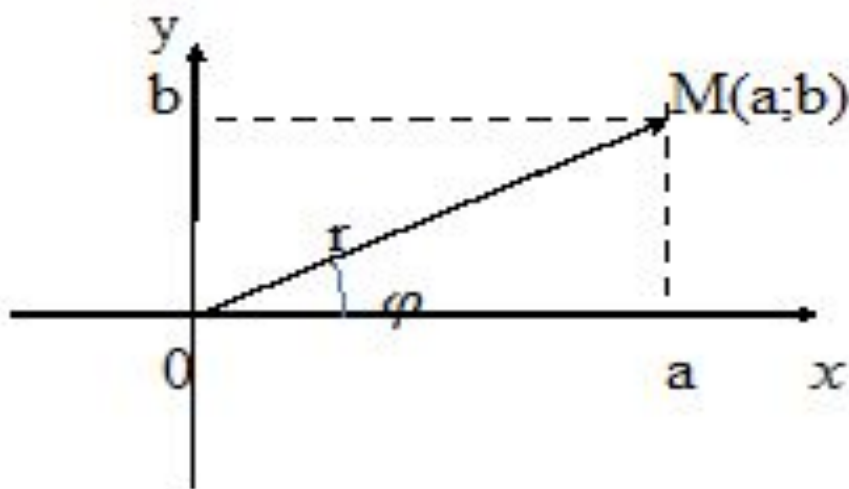


Рис. 1.

Модуль и аргумент комплексного числа

• **Определение** . Модулем комплексного числа называется абсолютная величина вектора, соответствующего этому числу.

Модуль числа $z = a + bi$ обозначается $|z|$ или $|a+bi|$ или r .
На основании теоремы Пифагора (см. рис.1) получается формула

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Например, комплексное число $z = 8 - 6i$ имеет модуль равный 10, так как $|z| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

Определение. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением оси Ox и вектором, соответствующим этому числу (см. рис. 1).

Аргумент обозначается φ , $\arg z$ или $\arg (a+bi)$.

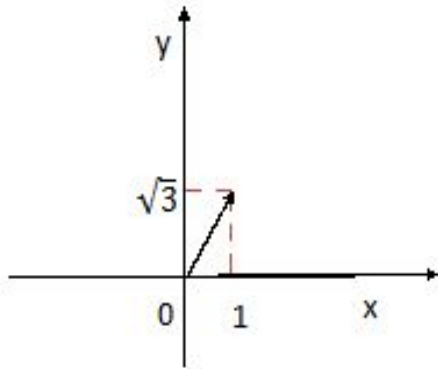
Аргумент комплексного числа $z=a+bi$ определяется неоднозначно, т.е. одному комплексному числу соответствует бесконечное множество аргументов.

Правило нахождения аргумента комплексного числа

1. Найти $\operatorname{tg} \alpha = |b/a|$.
2. Найти $\alpha = \operatorname{arctg} |b/a|$.
3. Выяснив, в какой четверти лежит вектор, соответствующий числу, найти аргумент φ .
Если $\varphi \in 1$ четверти, то $\varphi = \alpha$
 $\varphi \in 2$ четверти, то $\varphi = 180 - \alpha$
 $\varphi \in 3$ четверти, то $\varphi = 180 + \alpha$
 $\varphi \in 4$ четверти, то $\varphi = 360 - \alpha$

Примеры:

Найти модуль и аргумент комплексного числа.



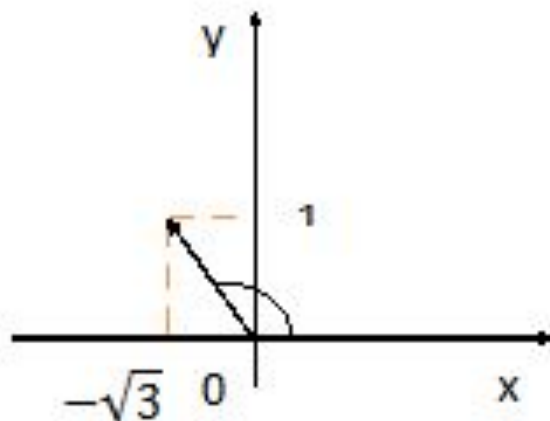
$$\text{a) } z = 1 + \sqrt{3}j$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{1} \right| = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ$$

$$M(1; \sqrt{3}) \Rightarrow \varphi = \alpha = 60^\circ \text{ (1 четверть)}$$



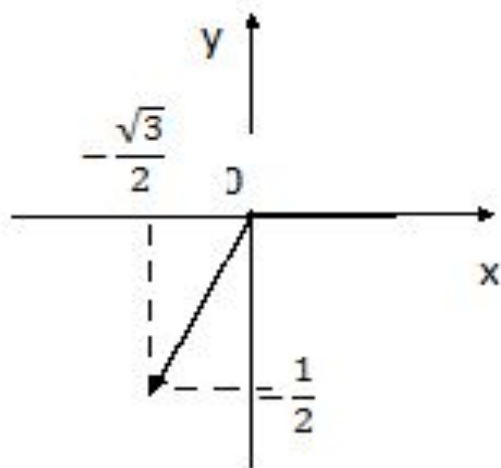
$$6) z = -\sqrt{3} + j$$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{1}{-\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ, \quad M(-\sqrt{3}; 1) - 2 \text{ четверть}$$

$$\varphi = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$



$$\text{в) } z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$z = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} * \left(-\frac{2}{1}\right) \right| = \sqrt{3}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ + \alpha = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

$$\text{или } \varphi = -(180^\circ - \alpha) = -(180^\circ - 60^\circ) = -120^\circ$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть дано комплексное число $z=a+bi$

Из ΔOMA можно выразить действительные числа a и b через модуль r и аргумент φ числа z следующим образом:

$$a=r\cos\varphi, b=r\sin\varphi.$$

Таким образом, комплексное число можно записать в виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где r – модуль комплексного числа, φ - один из его аргументов.

Представление комплексного числа z в виде

$$z = r (\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

называется тригонометрической формой
записи комплексного числа.

Правило перехода от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической

Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи к тригонометрической **нужно**:

1. Найти модуль комплексного числа по формуле: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. Найти один из аргументов комплексного числа, пользуясь правилом нахождения аргумента.
3. Записать комплексное число в тригонометрической форме.

Пример. Записать число $z = -\sqrt{3} - j$ в тригонометрической форме.

Решение:

$$1. r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-\sqrt{3}}{-1} \right| = \sqrt{3}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ, \quad \varphi = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

$$3. z = 2(\cos 240^\circ + j \sin 240^\circ)$$

Примечание

Модули и аргументы действительных чисел и чисто мнимых чисел надо находить непосредственно исходя из их геометрического изображения, а не используя приведенное выше правило (тем более, что для чисто мнимых чисел это правило вообще нельзя применять).

Например:

1. $z = -4$, значит $M(-4; 0)$. Тогда $r = 4$, $\varphi = 180^\circ$ и $z = 4(\cos 180^\circ + j \sin 180^\circ)$

2. $z = 2j$, значит $M(0; 2)$. Тогда $r = 2$, $\varphi = 90^\circ$ и $z = 2(\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ)$

Чтобы перейти от тригонометрической формы записи обратно к алгебраической форме нужно найти значения $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ при данном аргументе и умножить на модуль.

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \qquad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

Например: $z = 3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) =$
 $= 3 * (-1/2 + \sqrt{3}/2i) = -3/2 + 3\sqrt{3}/2i$

Пример: Комплексное число изобразить на плоскости и записать в тригонометрической форме

$$z = 2 + 2i$$

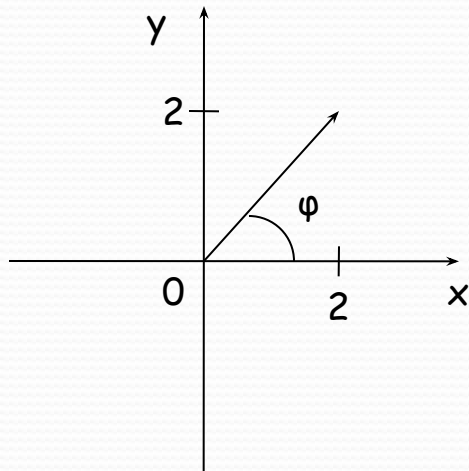
$$x = 2 \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = 2 \quad r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Для I четверти

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{2}{2} = \operatorname{arctg} 1$$

$$\varphi = \arg z = \frac{\pi}{4}$$



$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1. Умножение

Пусть $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$
 $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$

Тогда $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Таким образом, при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2. Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Таким образом, при делении комплексных чисел модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент – разности их аргументов.

Пример:

$$z_1 = 8 (\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ), \quad z_2 = 2 (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)$$

$$\text{Тогда } \frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2} (\cos(120^\circ - 30^\circ) + j \sin(120^\circ - 30^\circ)) = 4 (\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ)$$

Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме.

Произведение:

$$z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$z_1 z_2 = 3 \cdot 5 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = 15 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$$

Частное:

$$z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

3. Возведение в степень

$z^n = (r(\cos \varphi + j \sin \varphi))^n = r^n(\cos \varphi n + j \sin \varphi n)$ – это формула Муавра.

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень нужно его модуль возвести в данную степень, а аргумент умножить на показатель степени.*

Пример:

$$z = (\cos 10^\circ + j \sin 10^\circ)$$

$$z^5 = 2^5(\cos 10^\circ * 5 + j \sin 10^\circ * 5) = 32(\cos 50^\circ + j \sin 50^\circ)$$

4. Извлечение корня из комплексного числа.

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

Пример:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{81(\cos 180^\circ + j \sin 180^\circ)} &= \sqrt[4]{81} \left(\cos \frac{180^\circ + 360^\circ k}{4} + j \sin \frac{180^\circ + 360^\circ k}{4} \right) = \\ &= 3(\cos(45^\circ + 90^\circ k) + j \sin(45^\circ + 90^\circ k)) \end{aligned}$$

При $k = 0, 1, 2, 3$ получим

$$z_0 = 3(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$$

$$z_1 = 3(\cos(45^\circ + 90^\circ) + j \sin(45^\circ + 90^\circ)) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$$

$$z_2 = 3(\cos(225^\circ) + j \sin 225^\circ) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}j$$

$$z_3 = 3(\cos 315^\circ + j \sin 315^\circ) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - j \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Комплексное в показательной (или экспонентной) форме

$$z = r e^{i\varphi}$$

Где $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$

В силу формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
функция $e^{i\varphi}$ периодическая с основным периодом 2π .

Для записи комплексного числа в показательной форме
надо
определить главное значение аргумента и модуль.

Произведение и частное комплексных чисел в показательной форме.

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 z_2 = 6e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Возведение комплексных чисел в степень.

Правило умножения комплексных чисел позволяет возвести число в n -степень:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n$$

Получим Формулу Муавра: $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

Для показательной формы используют формулу:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Возведение комплексных чисел в степень.

Пример.

Найти $(1 + \sqrt{3}i)^9$

Запишем число в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\arg z = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} z^9 &= (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 \left(\cos 9 \cdot \frac{\pi}{3} + i \sin 9 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 2^9 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 2^9 \cdot (-1) = -512. \end{aligned}$$

Домашнее задание

1. Изобразить на координатной плоскости числа:

1. $z = 5$;
2. $z = -3i$;
3. $z = 3 + 2i$;
4. $z = 5 - 2i$;
5. $Z = -3 + 2i$;
6. $z = -1 - 5i$.

2. Записать в тригонометрической показательной форме комплексные числа:

1. $z = 1 + i$.
2. $z = -2 + 2i$.
3. $z = \sqrt{3} + i$
4. $z = -3 + 3i$
5. $z = -\sqrt{3}i$
6. $z = -10$.
- 7.

3. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме

Найти произведение комплексных чисел z_1 и z_2 :

16. $z_1 = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6}); \quad z_2 = 0,4(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}).$

17. $z_1 = (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ); \quad z_2 = 3(\cos 180^\circ + j \sin 180^\circ).$

18. $z_1 = 0,6(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3}); \quad z_2 = 5(\cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6}).$

Найти частное комплексных чисел z_1 и z_2 :

19. $z_1 = 0,6(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ); \quad z_2 = 3(\cos 240^\circ + j \sin 240^\circ).$

20. $z_1 = 3(\cos 225^\circ + j \sin 225^\circ); \quad z_2 = 5(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ).$

4. Выполнить действия № 29, 31, 34, 39, 40

Вычислить, пользуясь формулой Муавра:

28. $(3(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ))^6$.

29. $(2(\cos 15^\circ + j \sin 15^\circ))^4$.

30. $(\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ)^8$.

31. $(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})^{10}$.

32. $(2(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ))^6$.

33. $(-\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})^8$.

34. $(\cos 150^\circ + j \sin 150^\circ)^{10}$.

35. $(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)^5$.

36. $(1 + j)^{10}$.

37. $(3 - j\sqrt{3})^5$.

38. $(-2 - 2j)^8$.

39. $(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})^9$.

40. $(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})^{12}$.

41. $(1 - j)^{10}$.