

Пирамида. Площади поверхностей. Объём

Многогранники



Пирамида

Пирамида – это многогранник, в основании которого лежит n -угольник, а остальные n граней – треугольники с общей вершиной.

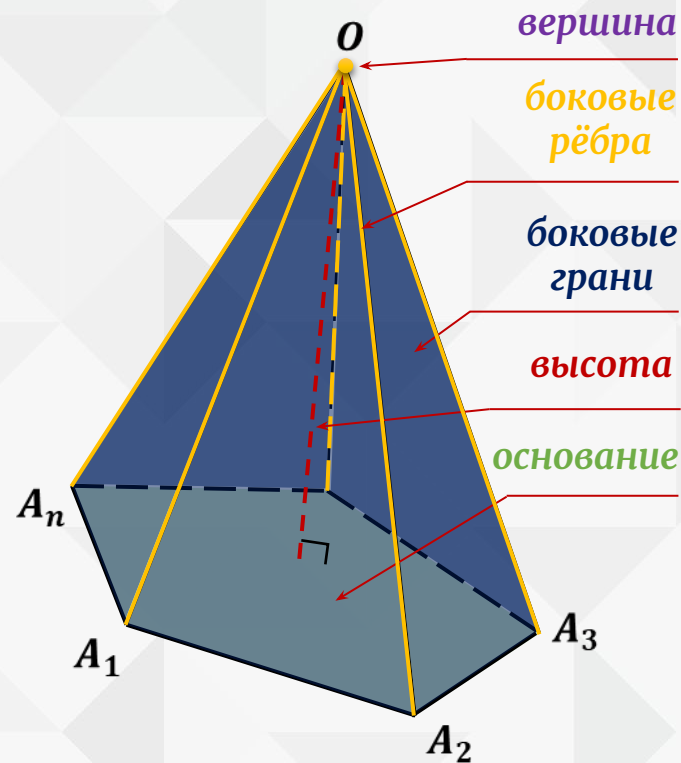
Многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ называется **основанием** пирамиды.

Треугольники $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_{n-1}A_n$ называются **боковыми гранями** пирамиды.

Точка O – **вершиной** пирамиды, а отрезки OA_1, OA_2, \dots, OA_n – её **боковыми рёбрами**.

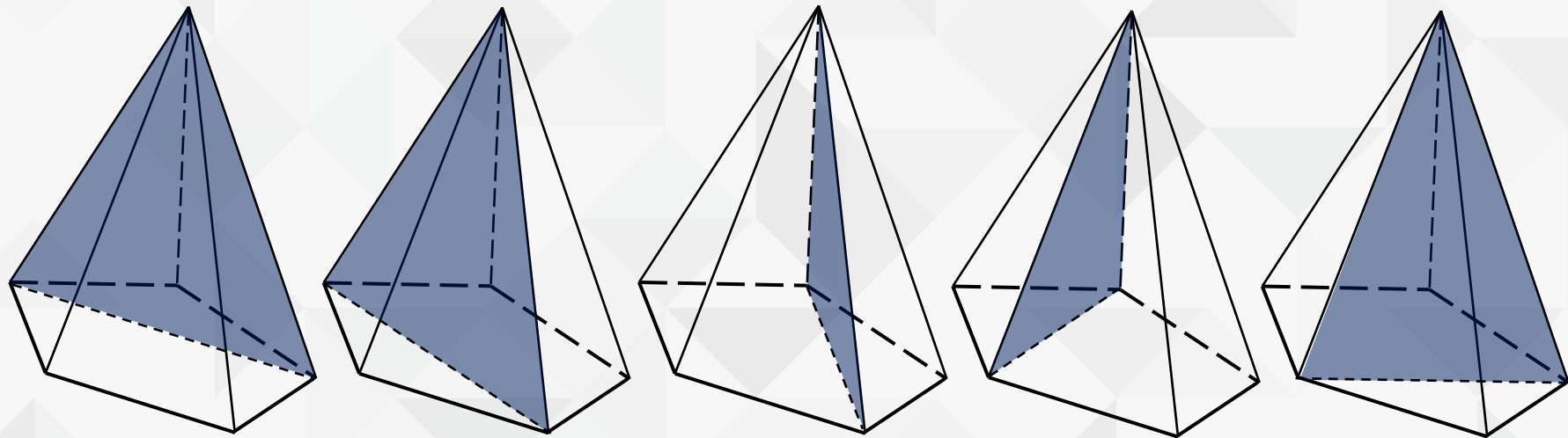
Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с плоскостью её основания и перпендикулярный к этой плоскости, называется **высотой** пирамиды.

Пирамиду с вершиной O и основанием $A_1A_2A_3 \dots A_n$ называют n -угольной пирамидой и обозначают так: $OA_1A_2A_3 \dots A_n$.



Диагональное сечение пирамиды

Диагональное сечение – это сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.



Площади поверхностей и объём пирамиды

Объединение боковых граней называется боковой поверхностью пирамиды.

Объединение всех граней называется полной поверхностью пирамиды.

Площадь боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

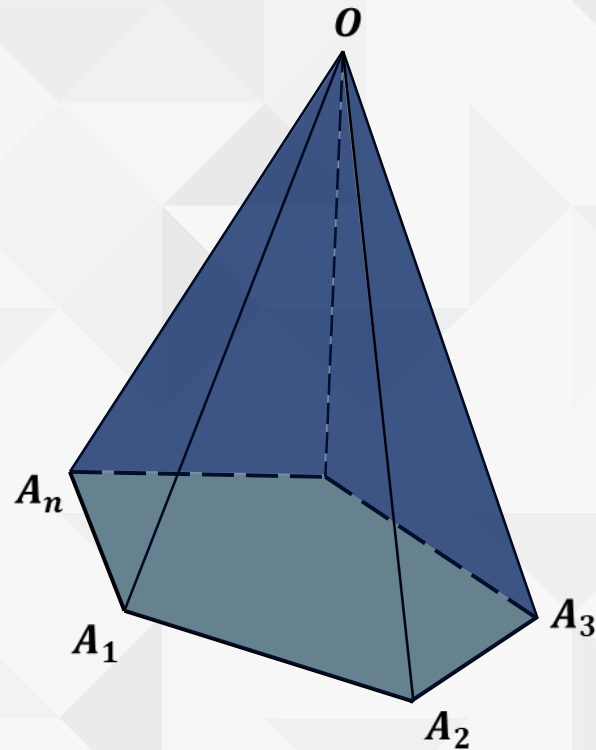
$$S_{\text{бок}} = S_{\Delta O A_1 A_2} + S_{\Delta O A_2 A_3} + \dots + S_{\Delta O A_{n-1} A_n}$$

Площадь полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

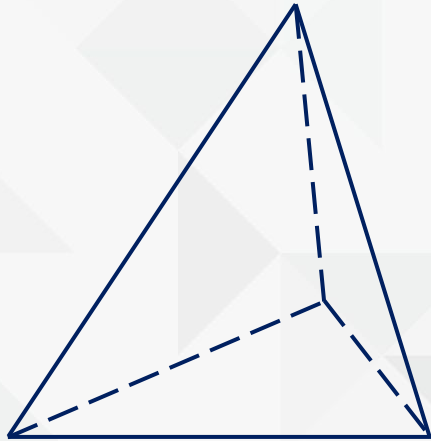
Объём пирамиды равен:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$



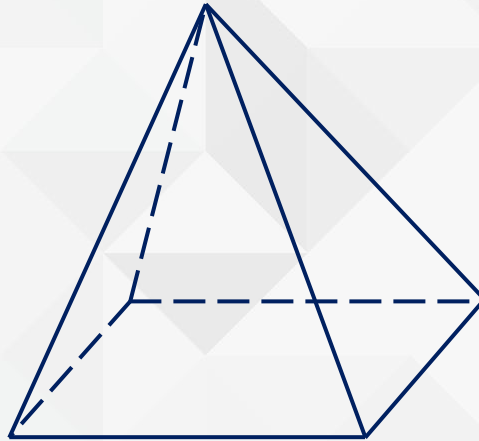
Виды пирамид

Треугольные



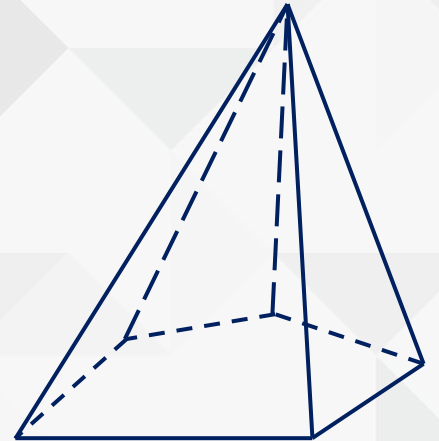
В основании лежит
треугольник.

Четырёхугольные



В основании лежит
четырёхугольник.

n -угольные



В основании лежит
 n -угольник.

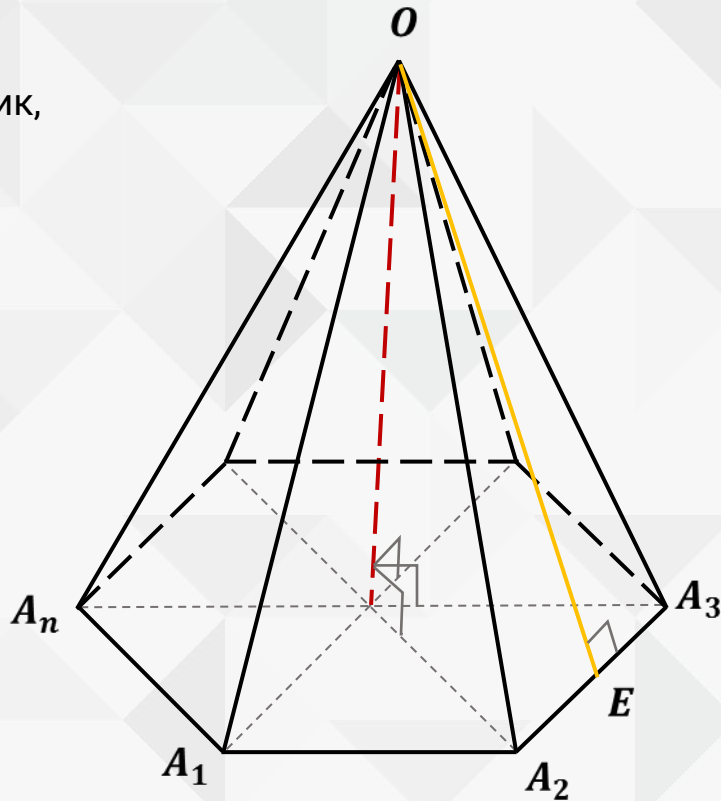
Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если её основанием является **правильный многоугольник**, а все боковые рёбра равны.

Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её **высотой**.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины к ребру основания, называется **апофемой**.

Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.



Свойства правильной n -угольной пирамиды:

1. В правильной n -угольной пирамиде все боковые рёбра равны между собой.

$$OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$$

2. Боковые рёбра равно наклонены к основанию.

3. Из равенства боковых рёбер пирамиды следует и равенство её боковых граней.

$$\Delta OA_1A_2 = \Delta OA_2A_3 = \dots = \Delta OA_nA_1$$

4. Боковые грани равно наклонены к основанию.

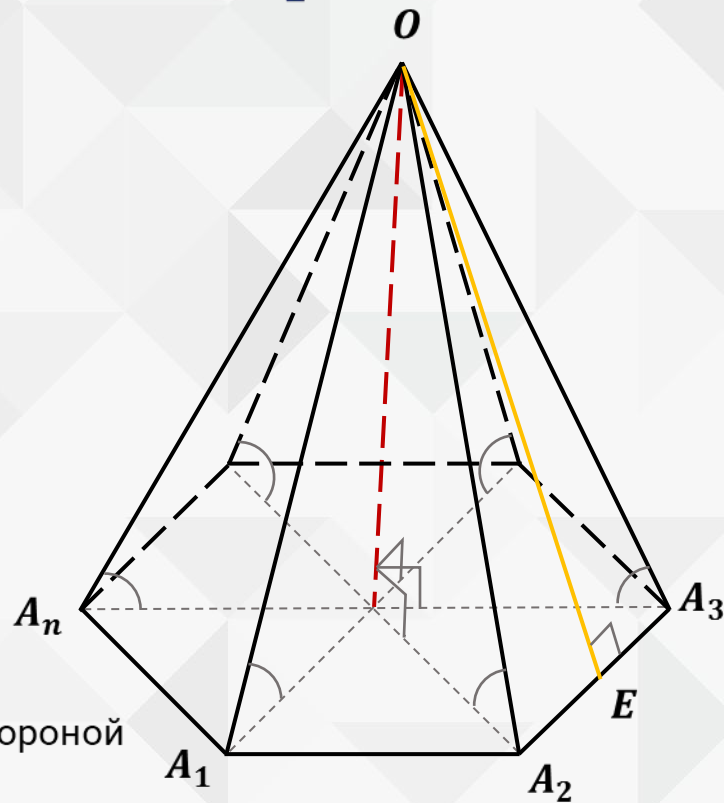
5. Вершина проектируется в центр основания.

6. Площадь боковой поверхности

правильной пирамиды равна: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$.

7. Объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной

основания a и высотой h равен: $V_{4\text{-уг пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$.

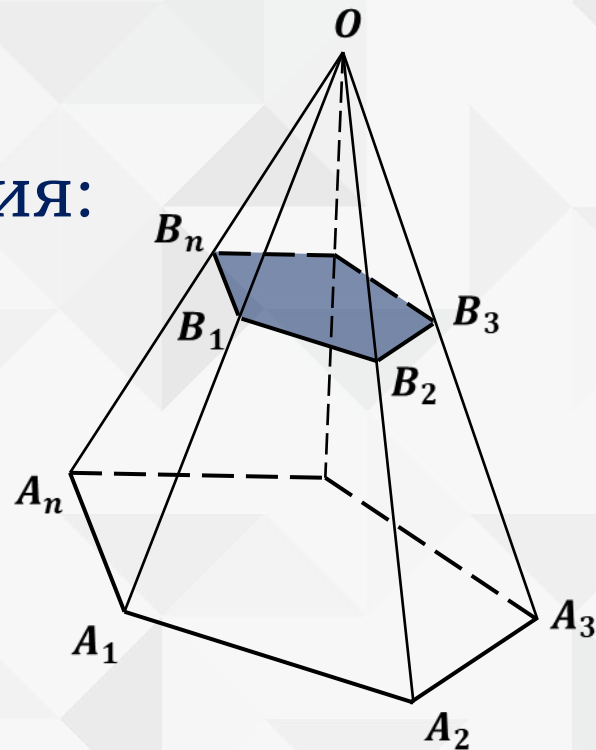


Параллельное сечение пирамиды

Параллельное сечение пирамиды – сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

Свойства параллельного сечения:

1. Сечение, параллельное основанию пирамиды, отсекает на высоте пирамиды и боковых рёбрах пропорциональные отрезки.
2. В сечении получается многоугольник, подобный основанию.
3. Площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний до вершины.



Усечённая пирамида

Усечённая пирамида – это часть пирамиды, заключённая между основанием и параллельным сечением пирамиды.

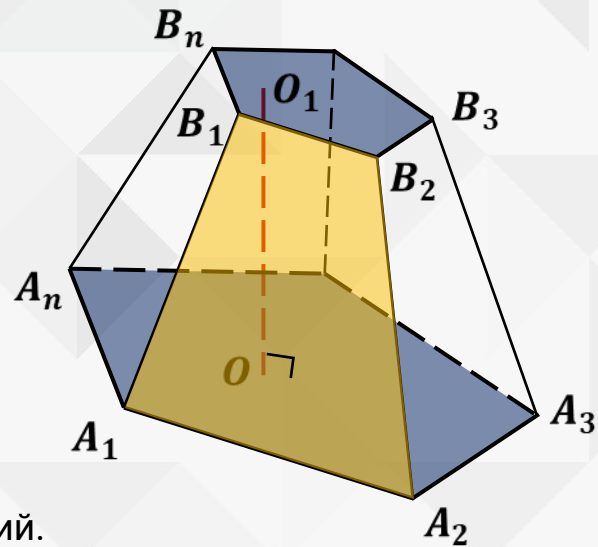
Основания усечённой пирамиды – подобные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.

Боковые грани усечённой пирамиды – трапеции.

Высота усечённой пирамиды – это перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на плоскость нижнего.

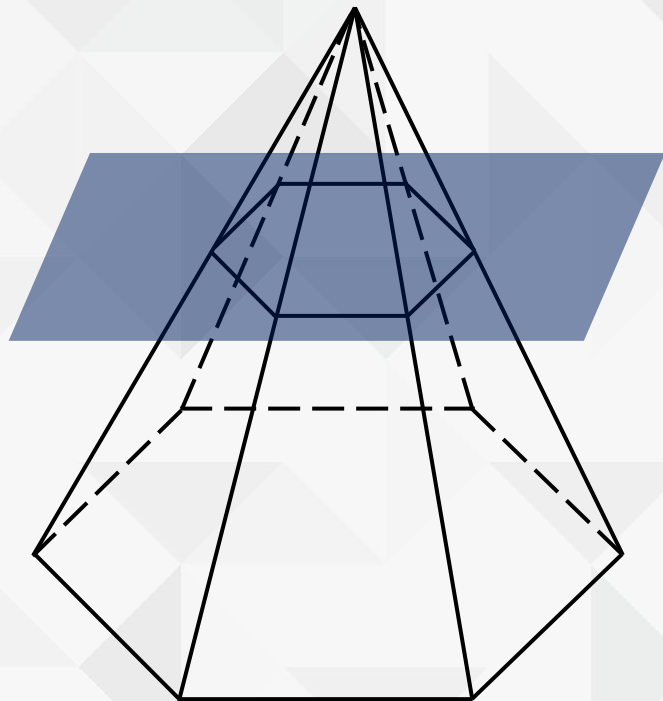
Площадь полной поверхности усечённой пирамиды равна сумме площади боковой поверхности и площадей двух оснований.

Объём усечённой пирамиды равен разности объёмов полной и отсечённой пирамиды, или его ещё можно вычислить по следующей формуле: $V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$.



Правильная усечённая пирамида

Правильная усечённая пирамида
получается из правильной пирамиды.



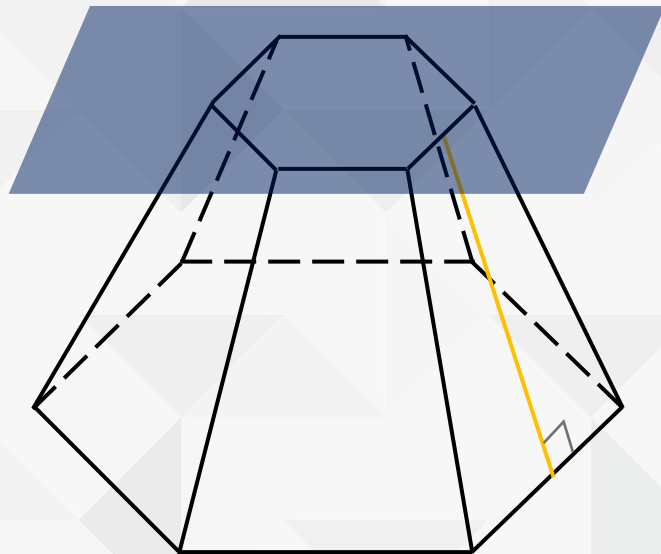
Правильная усечённая пирамида

Правильная усечённая пирамида получается из правильной пирамиды.

Апофема – высота боковой грани правильной усечённой пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна:

$$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$$



Задача № 1

$$S = \frac{ab}{2}$$

Дана треугольная пирамида, боковые рёбра которой взаимно перпендикулярны и равны 4 см, 3 см и 6 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение:

$\triangle ADC$, $\triangle ADB$, $\triangle CDB$ – прямоугольные треугольники.

$$S_{\triangle ADC} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ (см}^2\text{)}$$

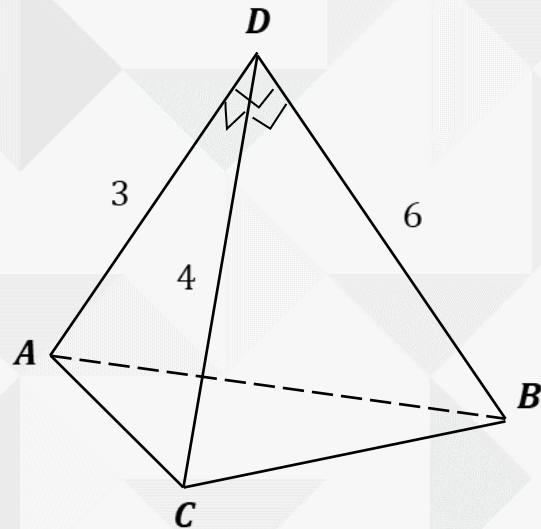
$$S_{\triangle ADB} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\triangle CDB} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{бок}} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ADB} + S_{\triangle CDB}$$

$$S_{\text{бок}} = 6 + 9 + 12 = 27 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: 27 см².



Задача № 2

Дана правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания 6 см и высотой 4 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

Решение:

$ABCD$ – квадрат.

$$S_{\text{осн}} = S_{\text{кв}} = a^2$$

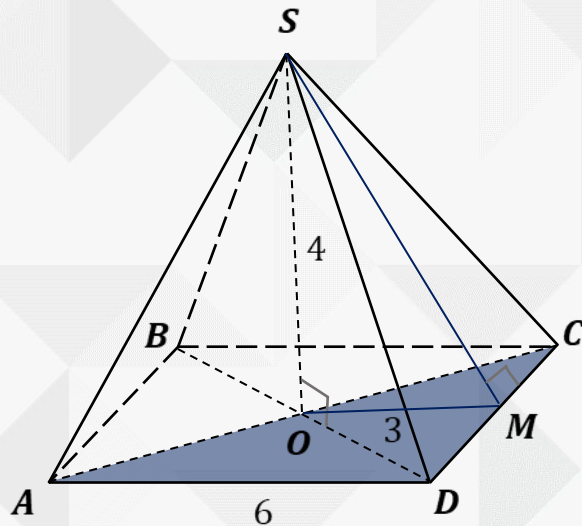
$$S_{\text{осн}} = 6^2 = 36 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCD = \Delta SDA$$

$$DM = MC$$

ΔACD – равнобедренный ($AD = DC$).

$$OM = \frac{1}{2}AD \Rightarrow OM = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ (см)}$$



Задача № 2

Дана правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания 6 см и высотой 4 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение:

$ABCD$ – квадрат.

$$S_{\text{осн}} = S_{\text{кв}} = a^2$$

$$S_{\text{осн}} = 6^2 = 36 \text{ (см}^2\text{)}$$

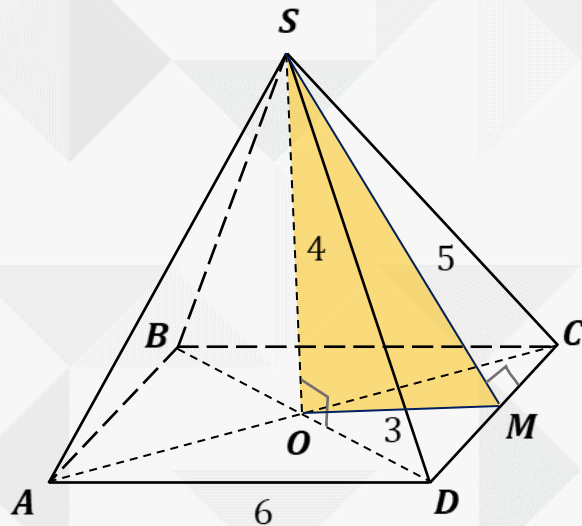
$\triangle SOM$ – прямоугольный ($SO \perp (ABC)$).

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$$

$$SM = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$$



Задача № 2

Дана правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания 6 см и высотой 4 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

Решение:

$ABCD$ – квадрат.

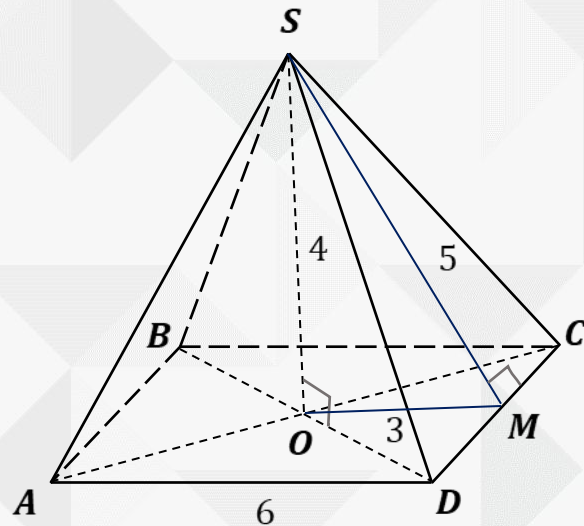
$$S_{\text{осн}} = S_{\text{кв}} = a^2$$

$$S_{\text{осн}} = 6^2 = 36 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{полн}} = 36 + 60 = 96 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: 96 см².



Задача № 3

$$a = R\sqrt{3}$$

Найдите высоту правильной усечённой треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, если стороны её оснований равны $3\sqrt{3}$ см и $6\sqrt{3}$ см, а боковое ребро равно 5 см.

Решение:

$$O_1O = h$$

$$OA = R, O_1A_1 = R_1.$$

$$OA = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6 \text{ (см)}$$

$$O_1A_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 \text{ (см)}$$

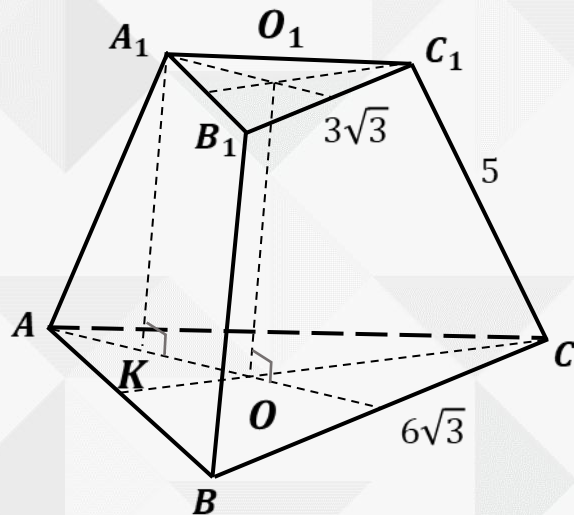
$$A_1K \perp AO$$

KA_1O_1O – прямоугольник.

$$A_1K = O_1O = h$$

$$OK = O_1A_1 = 3 \text{ см}$$

$$AK = OA - OK = 6 - 3 = 3 \text{ (см)}$$



Задача № 3

Найдите высоту правильной усечённой треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, если стороны её оснований равны $3\sqrt{3}$ см и $6\sqrt{3}$ см, а боковое ребро равно 5 см.

Решение:

$$O_1O = h$$

$$OA = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6 \text{ (см)}$$

$$O_1A_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 \text{ (см)}$$

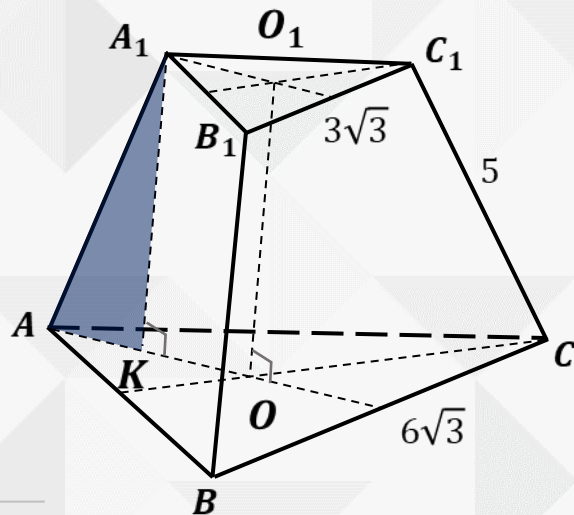
$$AK = OA - O_1K = 6 - 3 = 3 \text{ (см)}$$

$\triangle AK A_1$ - прямоугольный ($A_1K \perp AO$).

$$A_1K = \sqrt{AA_1^2 - AK^2}$$

$$A_1K = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (см)}$$

$$A_1K = O_1O = h = 4 \text{ см}$$



Ответ: 4 см.

Задача № 4

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

В пирамиде $DABC$ боковое ребро DB перпендикулярно основанию и равно ребру AC .
Треугольник ABC – прямоугольный с катетами $AB = 6$ см и $BC = 8$ см.
Найдите объём пирамиды.

Решение:

$\triangle ABC$ – прямоугольный.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}$$

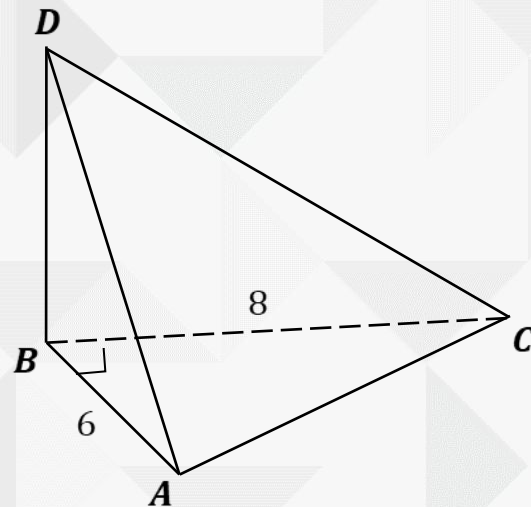
$$S_{\text{осн}} = S_{\triangle ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см)}$$

$$DB = AC = 10 \text{ см}$$

$$DB \perp (ABC) \Rightarrow DB = h$$



Задача № 4

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

В пирамиде $DABC$ боковое ребро DB перпендикулярно основанию и равно ребру AC .
Треугольник ABC – прямоугольный с катетами $AB = 6$ см и $BC = 8$ см.
Найдите объём пирамиды.

Решение:

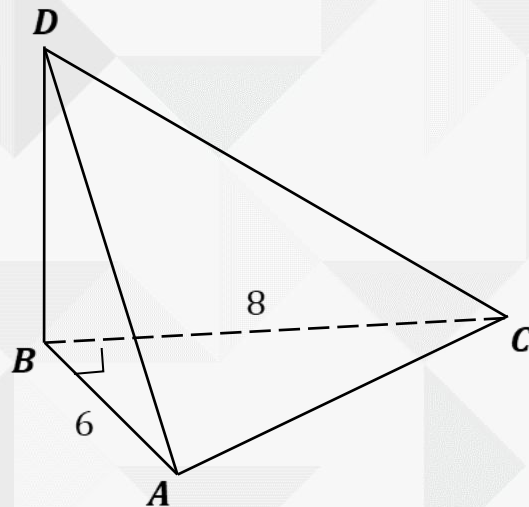
$$S_{\text{осн}} = S_{\triangle ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$DB = AC = 10 \text{ (см)}$$

$$DB \perp (ABC) \Rightarrow DB = h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 10 = 80 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: 80 см³.



Задача № 5

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

Найдите объём правильной треугольной пирамиды с ребром основания равным 6 см и боковым ребром равным 8 см.

Решение:

$\triangle ABC$ – равносторонний.

$$DA = DB = DC$$

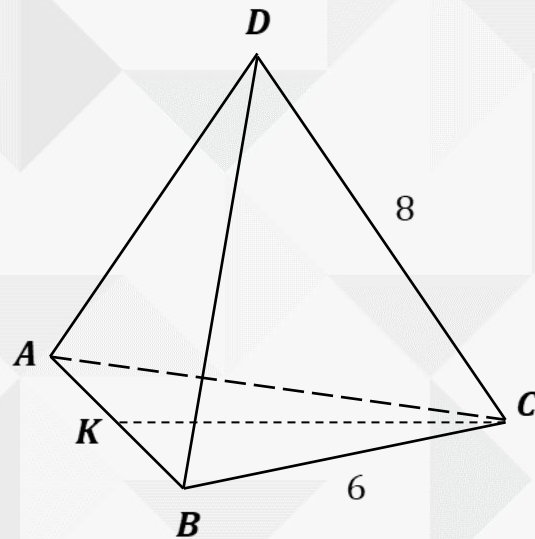
$$AB = BC = AC = 6 \text{ см}, DC = 8 \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{осн}} = S_{\triangle ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$AK = KB$$

$$CK \perp AB$$



Задача № 5

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

Найдите объём правильной треугольной пирамиды с ребром основания равным 6 см и боковым ребром равным 8 см.

Решение:

$$S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$AK = KB$$

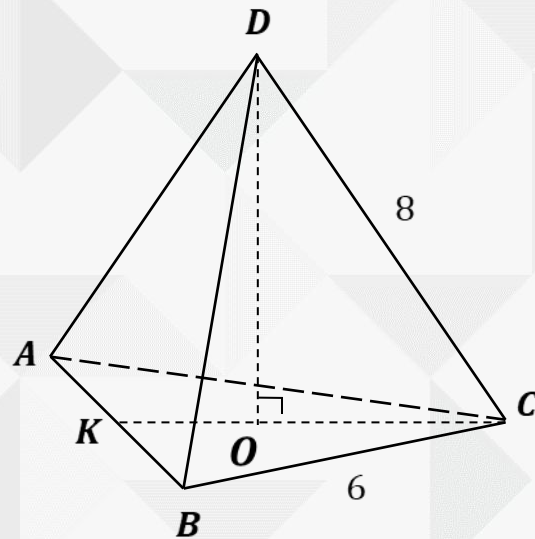
$$CK \perp AB$$

$$CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$CK = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$CO = \frac{2}{3} CK$$

$$CO = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}$$



Задача № 5

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

Найдите объём правильной треугольной пирамиды с ребром основания равным 6 см и боковым ребром равным 8 см.

Решение:

$$S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$AK = KB$$

$$CK \perp AB$$

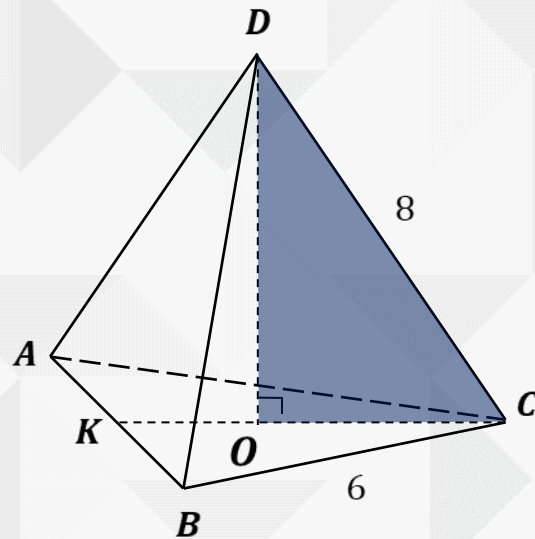
$$CK = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$CO = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}$$

ΔDOC – прямоугольный.

$$DO = \sqrt{DC^2 - CO^2}$$

$$DO = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 - 12} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ (см)}$$



Задача № 5

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

Найдите объём правильной треугольной пирамиды с ребром основания равным 6 см и боковым ребром равным 8 см.

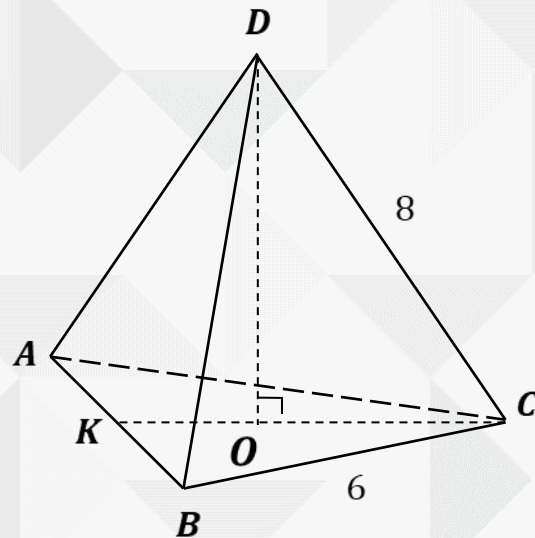
Решение:

$$S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$DO = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 - 12} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ (см)}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} = 6\sqrt{39} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $6\sqrt{39}$ см³.



Справочные материалы

$$S_{\text{бок}} = S_{\Delta OA_1A_2} + S_{\Delta OA_2A_3} + \dots + S_{\Delta OA_{n-1}A_n}$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$S_{\text{бок прав пир}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$$

$$V_{4\text{-уг прав пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$S_{\text{бок ус пир}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$$

$$V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$