Пирамида. Площади поверхностей. Объём

Многогранники

Пирамида

Пирамида – это многогранник,
в основании которого лежит n–угольник,
а остальные n граней – треугольники с общей вершиной.

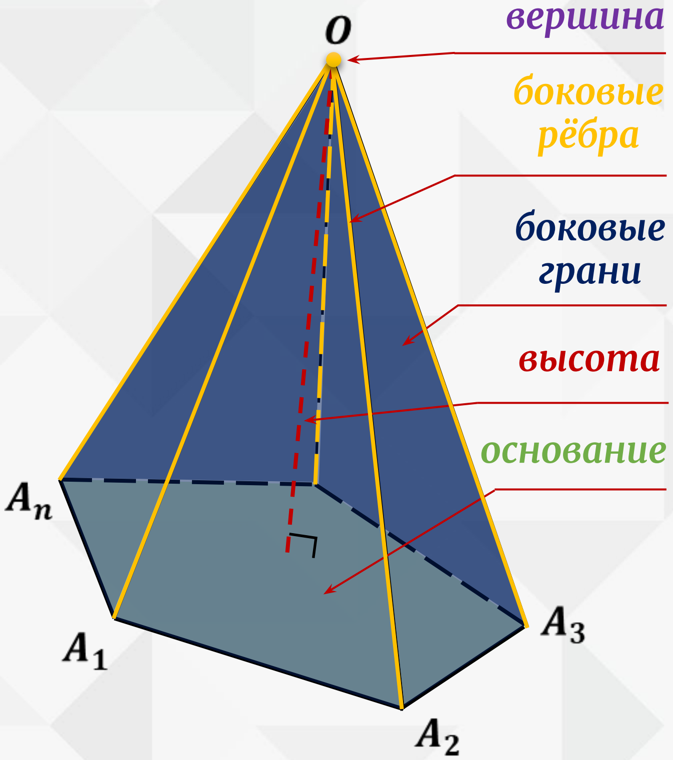
Многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$
называется основанием пирамиды.

Треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, …, $OA_{n-1}A_n$
называются боковыми гранями пирамиды.

Точка O – вершиной пирамиды,
а отрезки OA_1, OA_2, …, OA_n – её боковыми рёбрами.

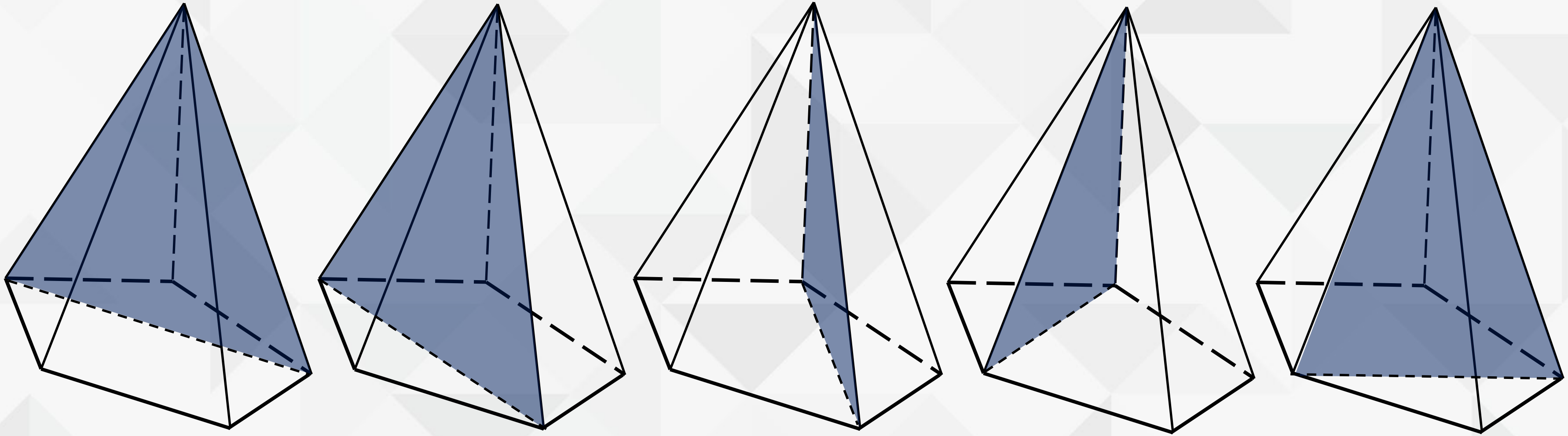
Отрезок, соединяющий вершину пирамиды
с плоскостью её основания и перпендикулярный
к этой плоскости, называется высотой пирамиды.

Пирамиду с вершиной O и основанием $A_1A_2A_3 \dots A_n$
называют n-угольной пирамидой и обозначают так: $OA_1A_2A_3 \dots A_n$.



Диагональное сечение пирамиды

Диагональное сечение – это сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.



Площади поверхностей и объём пирамиды

Объединение боковых граней называется боковой поверхностью пирамиды.

Объединение всех граней называется полной поверхностью пирамиды.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

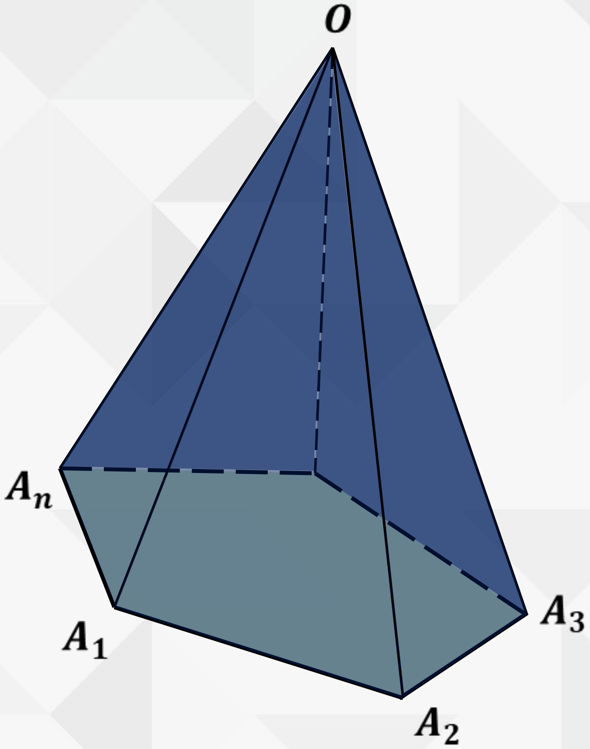
$$S_{\text{бок}} = S_{\Delta OA_1A_2} + S_{\Delta OA_2A_3} + \ldots + S_{\Delta OA_{n-1}A_n}$$

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней.

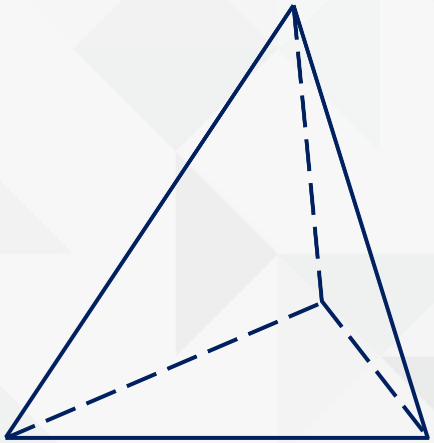
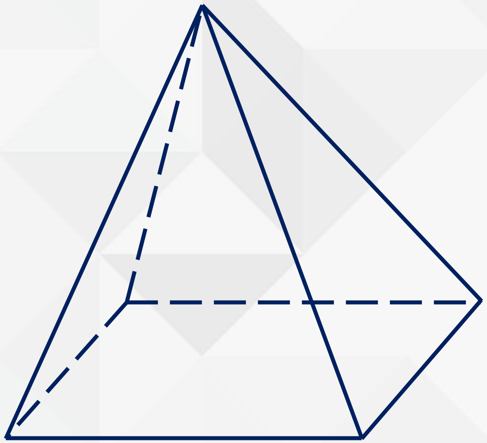
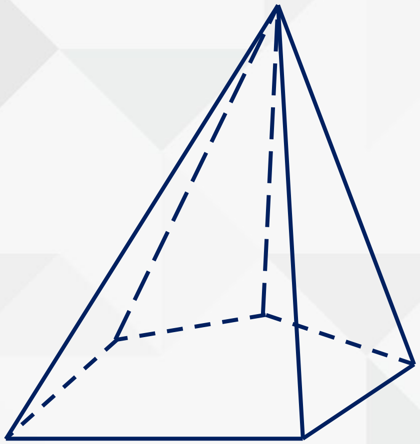
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

Объём пирамиды равен:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$



Виды пирамид

Треугольные	Четырёхугольные	n-угольные
		
В основании лежит треугольник.	В основании лежит четырёхугольник.	В основании лежит n-угольник.

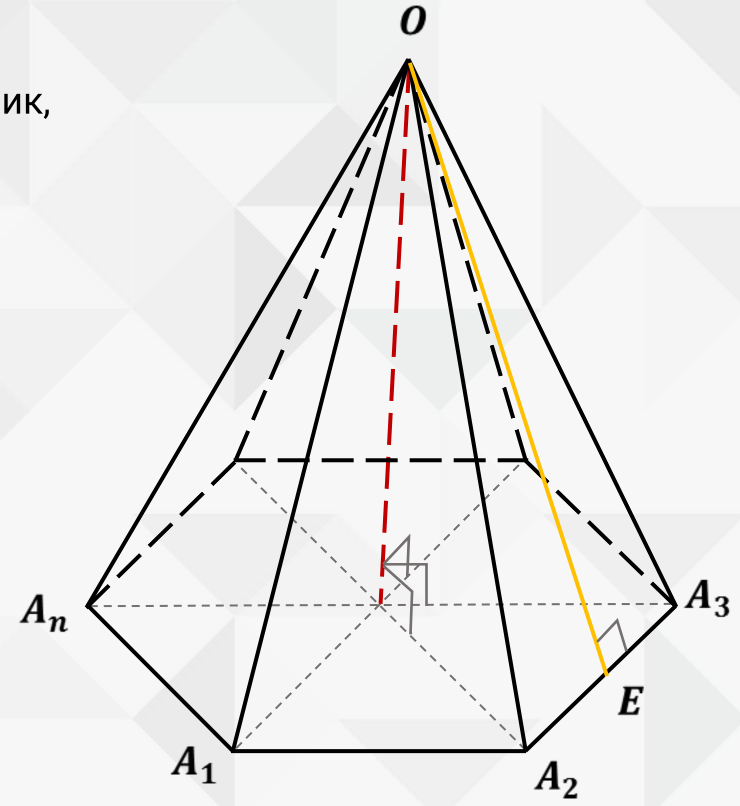
Правильная пирамида

Пирамида называется правильной,
если её основанием является правильный многоугольник,
а все боковые рёбра равны.

Отрезок, соединяющий вершину пирамиды
с центром основания, является её высотой.

Высота боковой грани правильной пирамиды,
проведённая из её вершины к ребру основания,
называется апофемой.

Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.



Свойства правильной n-угольной пирамиды:

1. В правильной n-угольной пирамиде все боковые рёбра равны между собой.

$OA_1 = OA_2 = OA_3 = \ ... \ = OA_n$

2. Боковые рёбра равно наклонены к основанию.

3. Из равенства боковых рёбер пирамиды следует и равенство её боковых граней.

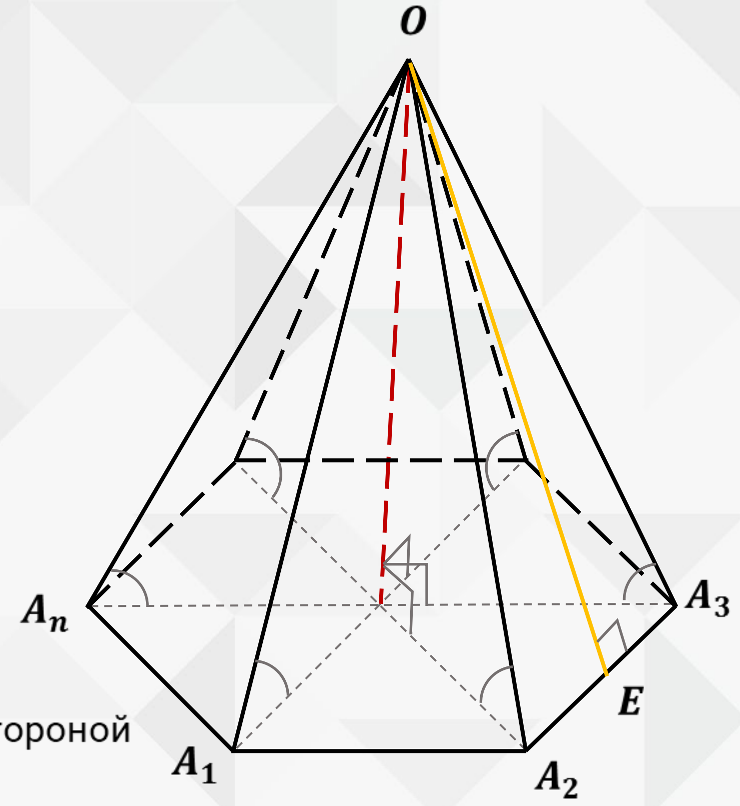
$\Delta OA_1A_2 = \Delta OA_2A_3 = \cdots = \Delta OA_nA_1$

4. Боковые грани равно наклонены к основанию.

5. Вершина проектируется в центр основания.

6. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l.$

7. Объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h равен: $V_{4-\text{уг пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$



Параллельное сечение пирамиды

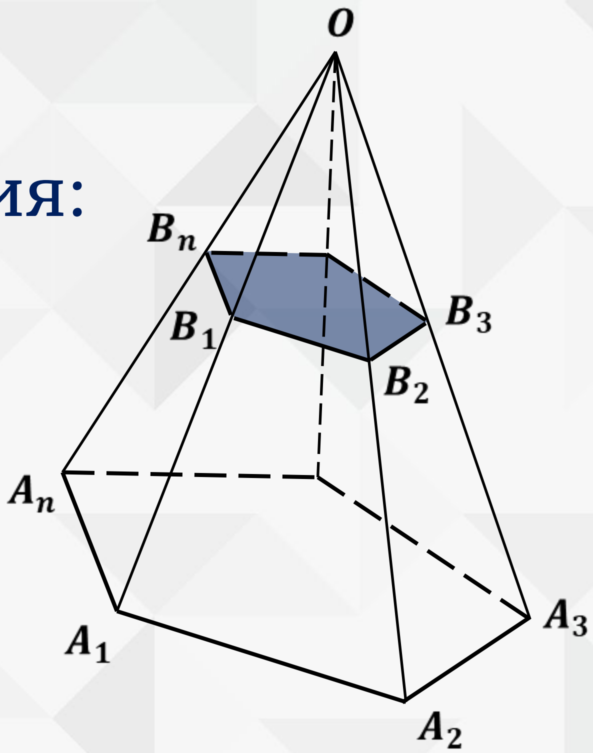
Параллельное сечение пирамиды – сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

Свойства параллельного сечения:

1. Сечение, параллельное основанию пирамиды, отсекает на высоте пирамиды и боковых рёбрах пропорциональные отрезки.

2. В сечении получается многоугольник, подобный основанию.

3. Площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний до вершины.



Усечённая пирамида

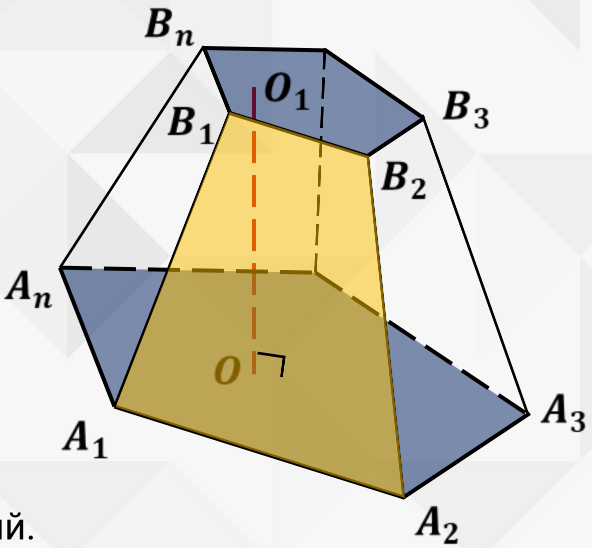
Усечённая пирамида – это часть пирамиды, заключённая между основанием и параллельным сечением пирамиды.

Основания усечённой пирамиды – подобные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.

Боковые грани усечённой пирамиды – трапеции.

Высота усечённой пирамиды – это перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на плоскость нижнего.

Площадь полной поверхности усечённой пирамиды равна сумме площади боковой поверхности и площадей двух оснований.

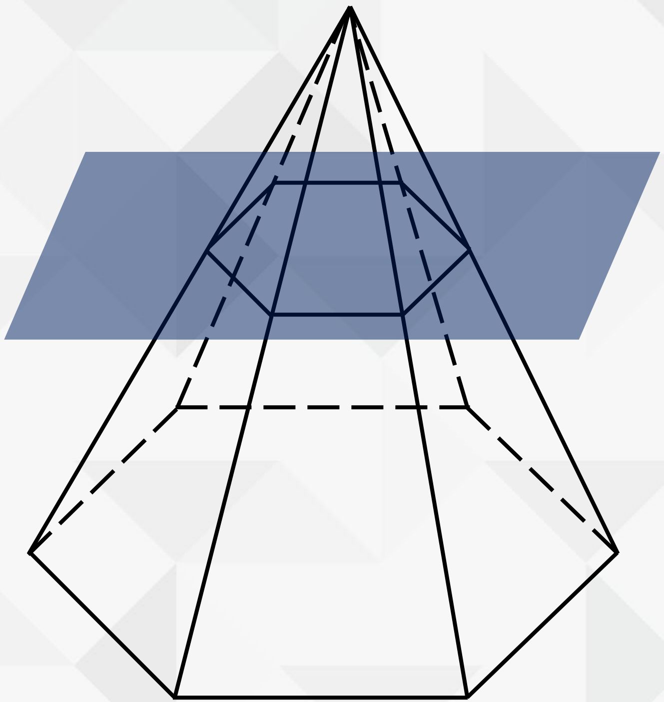


Объём усечённой пирамиды равен разности объёмов полной и отсечённой пирамиды,

или его ещё можно вычислить по следующей формуле: $V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$.

Правильная усечённая пирамида

Правильная усечённая пирамида получается из правильной пирамиды.



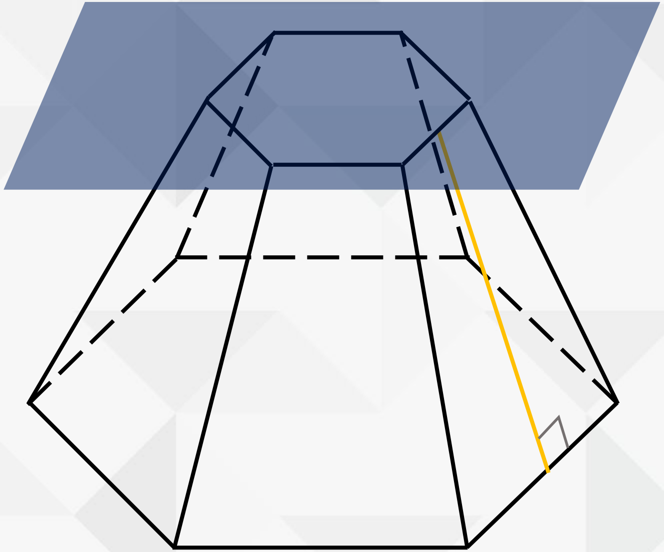
Правильная усечённая пирамида

Правильная усечённая пирамида получается из правильной пирамиды.

Апофема – высота боковой грани правильной усечённой пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна:

$$S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$$



Задача № 1

$$S = \frac{ab}{2}$$

Дана треугольная пирамида,
боковые рёбра которой взаимно перпендикулярны и равны 4 см, 3 см и 6 см.
Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение:

$\varDelta ADC, \varDelta ADB, \varDelta CDB$ – прямоугольные треугольники.

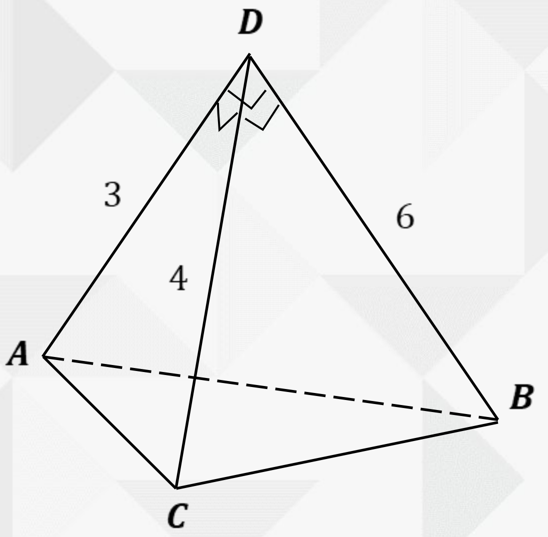
$$S_{\varDelta ADC} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\varDelta ADB} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\varDelta CDB} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{бок}} = S_{\varDelta ADC} + S_{\varDelta ADB} + S_{\varDelta CDB}$$

$$S_{\text{бок}} = 6 + 9 + 12 = 27 \text{ (см}^2\text{)}$$



Ответ: 27 см^2.

Задача № 2

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

Дана правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания 6 см и высотой 4 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение:

$ABCD$ – квадрат.

$S_{\text{осн}} = S_{\text{кв}} = a^2$

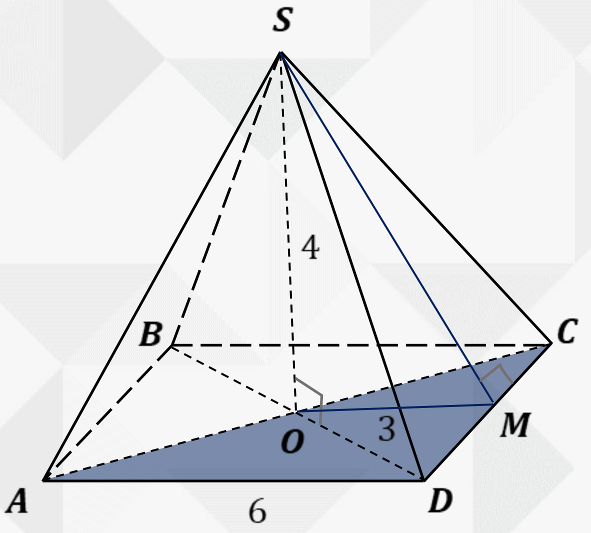
$S_{\text{осн}} = 6^2 = 36$ (см²)

$\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCD = \Delta SDA$

$DM = MC$

ΔACD – равнобедренный ($AD = DC$).

$OM = \frac{1}{2} AD \Longrightarrow OM = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (см)



Задача № 2

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$$

Дана правильная четырёхугольная пирамида
со стороной основания 6 см и высотой 4 см.
Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение:

$ABCD$ – квадрат.

$S_{осн} = S_{кв} = a^2$

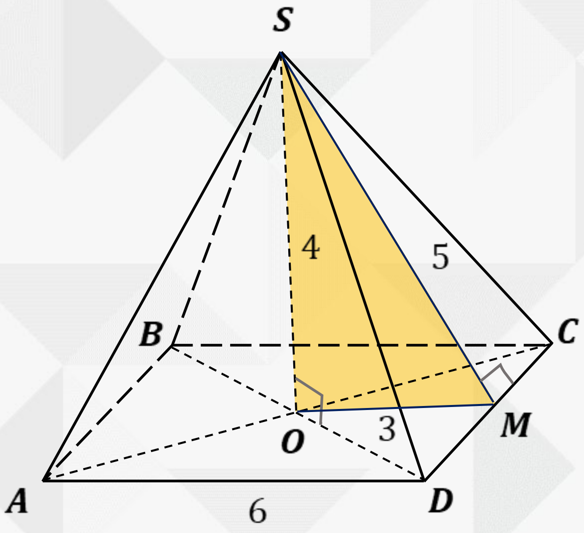
$S_{осн} = 6^2 = 36$ (см^2)

ΔSOM – прямоугольный ($SO \perp (ABC)$).

$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$

$SM = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ (см)

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (см^2)



$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

Задача № 2

Дана правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания 6 см и высотой 4 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение:

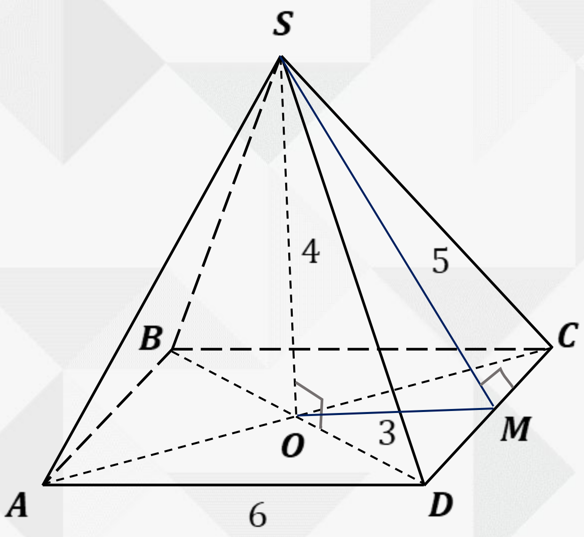
$ABCD$ – квадрат.

$S_{\text{осн}} = S_{\text{кв}} = a^2$

$S_{\text{осн}} = 6^2 = 36$ (см²)

$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (см²)

$S_{\text{полн}} = 36 + 60 = 96$ (см²)



Ответ: 96 см².

Задача № 3

$$a = R\sqrt{3}$$

Найдите высоту правильной усечённой треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, если стороны её оснований равны $3\sqrt{3}$ см и $6\sqrt{3}$ см, а боковое ребро равно 5 см.

Решение:

$O_1O = h$

$OA = R,\ O_1A_1 = R_1.$

$OA = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$ (см)

$O_1A_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$ (см)

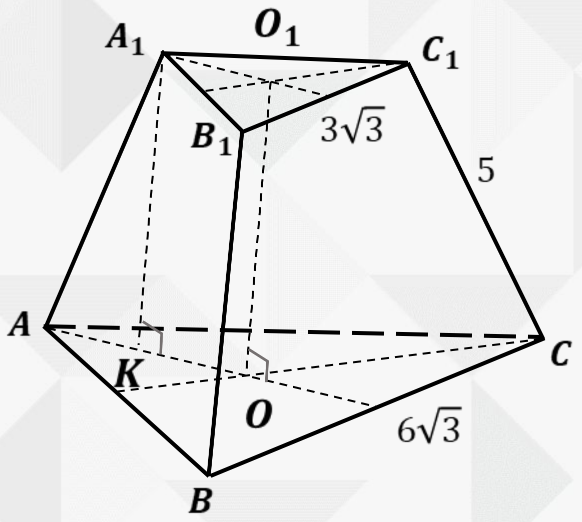
$A_1K \perp AO$

KA_1O_1O – прямоугольник.

$A_1K = O_1O = h$

$OK = O_1A_1 = 3$ см

$AK = OA - OK = 6 - 3 = 3$ (см)



Задача № 3

Найдите высоту правильной усечённой треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, если стороны её оснований равны $3\sqrt{3}$ см и $6\sqrt{3}$ см, а боковое ребро равно 5 см.

Решение:

$O_1O = h$

$OA = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$ (см)

$O_1A_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$ (см)

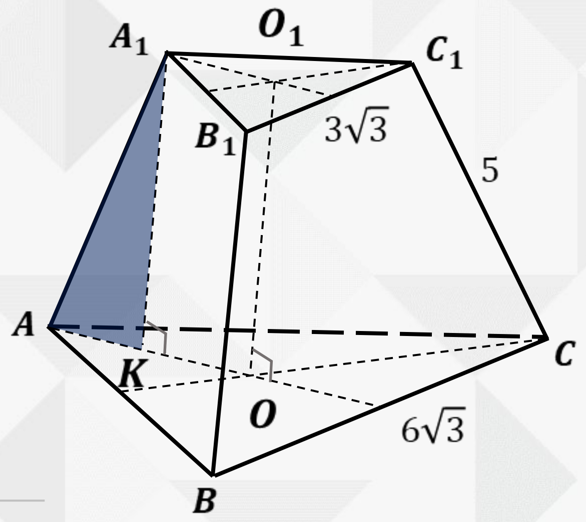
$AK = OA - OK = 6 - 3 = 3$ (см)

$\triangle AKA_1$ – прямоугольный ($A_1K \perp AO$).

$A_1K = \sqrt{{AA_1}^2 - AK^2}$

$A_1K = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ (см)

$A_1K = O_1O = h = 4$ см



Ответ: 4 см.

Задача № 4

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

В пирамиде $DABC$ боковое ребро DB перпендикулярно основанию и равно ребру AC.
Треугольник ABC – прямоугольный с катетами $AB = 6$ см и $BC = 8$ см.
Найдите объём пирамиды.

Решение:

$\varDelta ABC$ – прямоугольный.

$$S_{\varDelta ABC} = \frac{ab}{2}$$

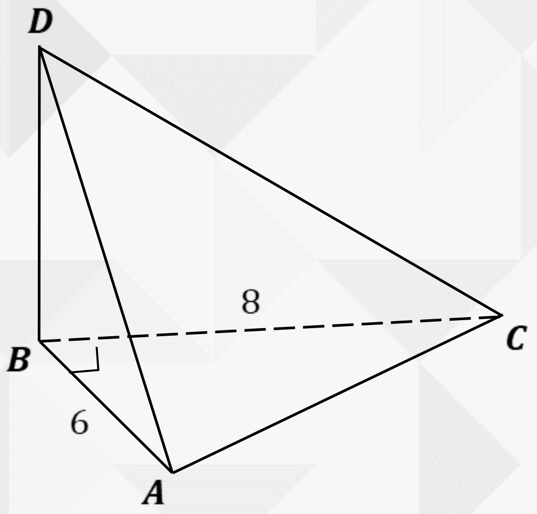
$$S_{\text{осн}} = S_{\varDelta ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см)}$$

$$DB = AC = 10 \text{ см}$$

$$DB \perp (ABC) \Longrightarrow DB = h$$



Задача № 4

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

В пирамиде $DABC$ боковое ребро DB перпендикулярно основанию и равно ребру AC. Треугольник ABC – прямоугольный с катетами $AB = 6$ см и $BC = 8$ см.
Найдите объём пирамиды.

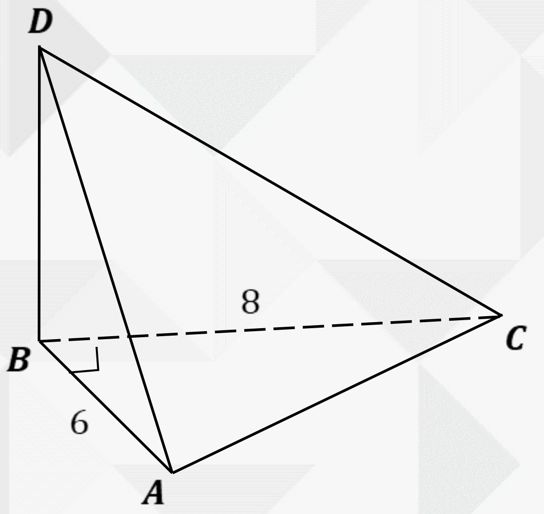
Решение:

$S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ (см^2)

$DB = AC = 10$ (см)

$DB \perp (ABC) \Longrightarrow DB = h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 10 = 80$ (см^3)



Ответ: 80 см^3.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

Задача № 5

Найдите объём правильной треугольной пирамиды с ребром основания равным 6 см и боковым ребром равным 8 см.

Решение:

ΔABC – равносторонний.

$DA = DB = DC$

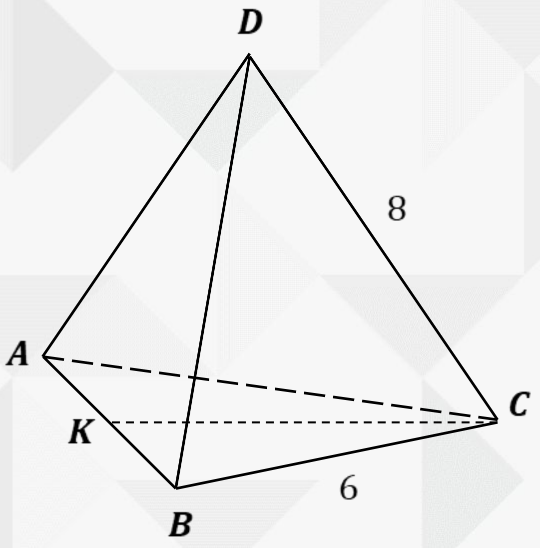
$AB = BC = AC = 6$ см, $DC = 8$ см.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ (\text{см}^2)$$

$AK = KB$

$CK \perp AB$



Задача № 5

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

Найдите объём правильной треугольной пирамиды с ребром основания равным 6 см и боковым ребром равным 8 см.

Решение:

$S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см^2)

$AK = KB$

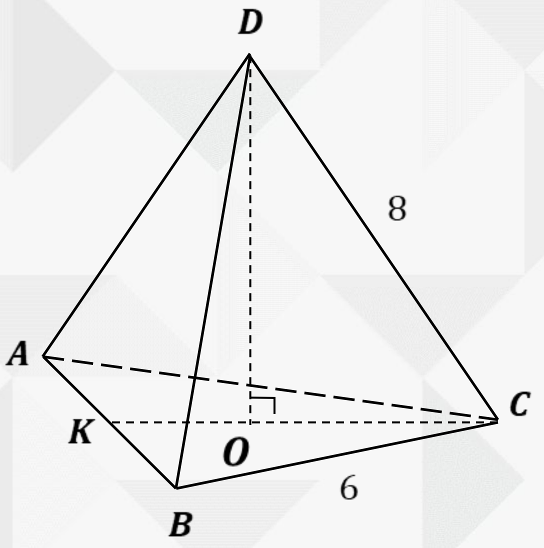
$CK \perp AB$

$CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$CK = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см)

$CO = \frac{2}{3} CK$

$CO = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (см)



Задача № 5

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$$

Найдите объём правильной треугольной пирамиды с ребром основания равным 6 см и боковым ребром равным 8 см.

Решение:

$S_{осн} = S_{\Delta ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см^2)

$AK = KB$

$CK \perp AB$

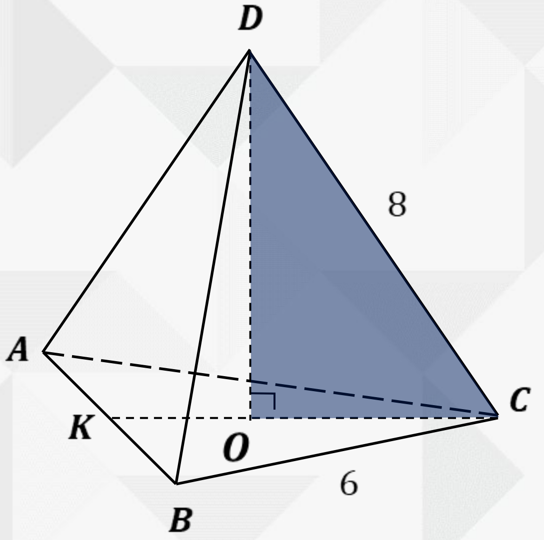
$CK = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см)

$CO = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (см)

ΔDOC – прямоугольный.

$DO = \sqrt{DC^2 - CO^2}$

$DO = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 - 12} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (см)



Задача № 5

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

Найдите объём правильной треугольной пирамиды с ребром основания равным 6 см и боковым ребром равным 8 см.

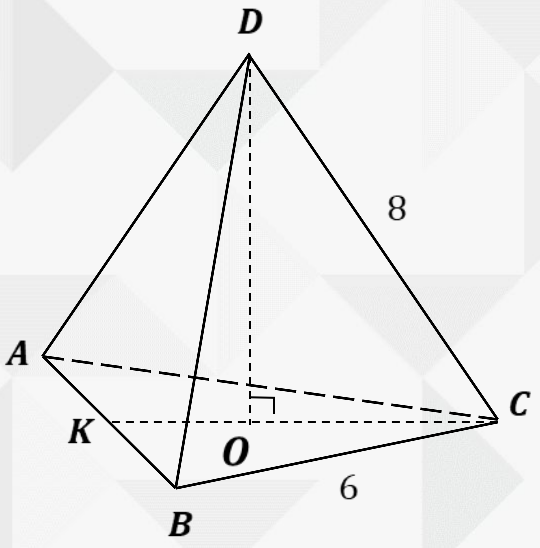
Решение:

$$S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ (\text{см}^2)$$

$$DO = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 - 12} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\ (\text{см})$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} = 6\sqrt{39}\ (\text{см}^3)$$

Ответ: $6\sqrt{39}$ см^3.



Справочные материалы

$$S_{\text{бок}} = S_{\Delta OA_1A_2} + S_{\Delta OA_2A_3} + \ \dots + S_{\Delta OA_{n-1}A_n}$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$S_{\text{бок прав пир}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$$

$$V_{4-\text{уг прав пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$S_{\text{бок ус пир}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$$

$$V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$