

## ДИСЦИПЛИНА «ГИДРОГАЗОДИНАМИКА»

ЛЕКЦИЯ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ. СООБЩАЮЩИЕСЯ СОСУДЫ. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ. СИЛА ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ. РАВНОВЕСИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЖИДКОСТИ. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ.

### **20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ»**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: СТАРШИЙ ПРЕПОДАВАТЕЛЬ МОСТОВЕНКО  
ЛЮБОВЬ ВЛАДИМИРОВНА**

# ПЕРЕЧЕНЬ ЛЕКЦИЙ

**Лекция 1.** Введение. Общие сведения о жидкости. Жидкость как физическое тело. Основные физические свойства жидкостей. Неньютоновские жидкости. Основы гидростатики. Силы, действующие в жидкости. Свойства гидростатического давления. Основное уравнение гидростатики.

**Лекция 2.** Дифференциальное уравнение равновесия жидкости. Сообщающиеся сосуды. Сила давления жидкости на плоскую поверхность, погружённую в жидкость. Сила давления на криволинейную поверхность, погружённую в жидкость. Равновесие твёрдого тела в жидкости. Уравнение неразрывности жидкости. Система дифференциальных уравнений Навье – Стокса. Гидравлические сопротивления.

**Лекция 3.** Потери напора на местных гидравлических сопротивлениях. Потери напора по длине. Режимы движения жидкости. Истечение жидкости из отверстий и насадков. Классификация трубопроводов.

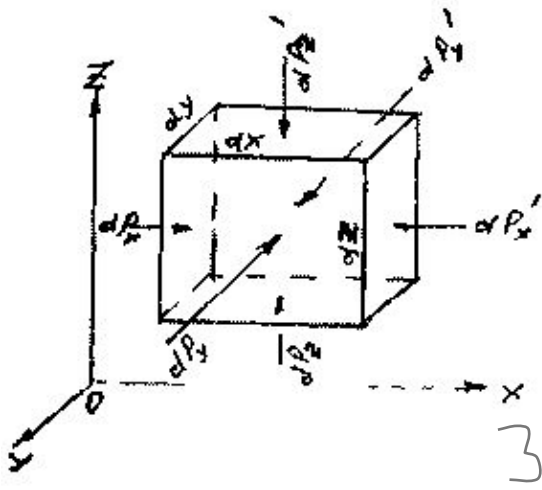
# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

Масса жидкости в выделенном объёме:

$$dM = \rho dW = \rho dx dy dz \quad 1$$

$$dP_x = p dS = p dy dz \quad 2$$

Поскольку давление на правую грань больше, то



$$dP_y = p dS = p dx dz$$

$$dP_z = p dS = p dx dy$$

$$dP'_x = - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz$$

$$dP'_y = - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz$$

$$dP'_z = - \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy$$

$$F_x = \rho dW \cdot j_x = \rho dx dy dz \cdot j_x,$$

$$F_y = \rho dW \cdot j_y = \rho dx dy dz \cdot j_y,$$

$$F_z = \rho dW \cdot j_z = \rho dx dy dz \cdot j_z.$$

$$p dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho dx dy dz \cdot j_x,$$

$$p dx dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz + \rho dx dy dz \cdot j_y,$$

$$p dx dy - \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy + \rho dx dy dz \cdot j_z,$$

$$j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

# СООБЩАЮЩИЕСЯ СОСУДЫ

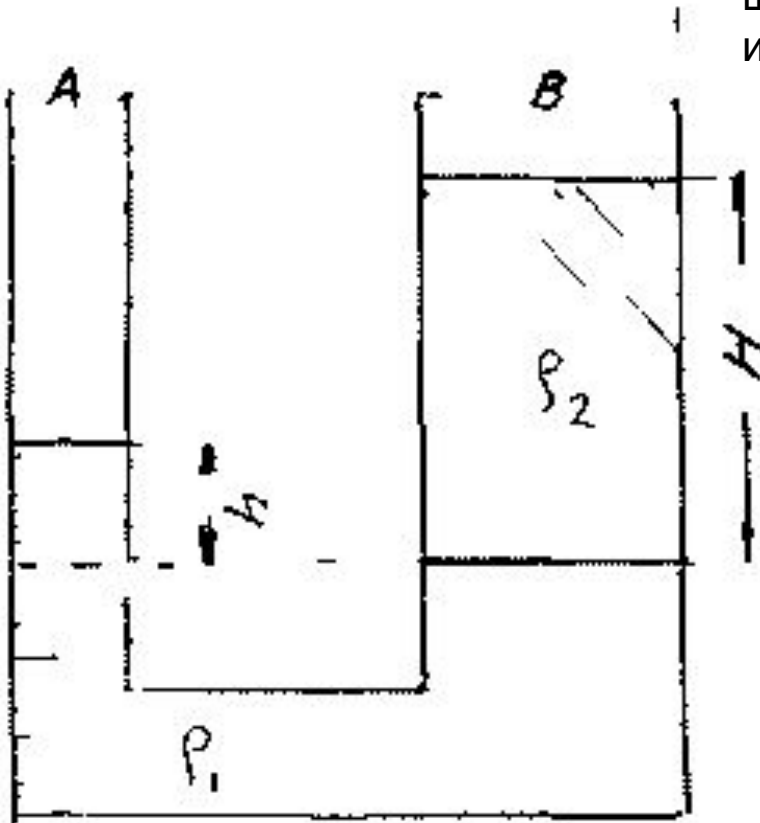
В открытых сообщающихся сосудах давления на свободную поверхность могут быть разными, тогда уравнение равновесия будет иметь следующий вид:

$$p_0 + \rho_1 gh = p_0 + \rho_2 gH \quad 1$$
$$\rho_1 h = \rho_2 H \quad 2$$

$$H = \frac{\rho_1}{\rho_2} h \quad 3$$

В закрытых сообщающихся сосудах давления на свободную поверхность могут быть иными, тогда уравнение равновесия будет иметь следующий вид:

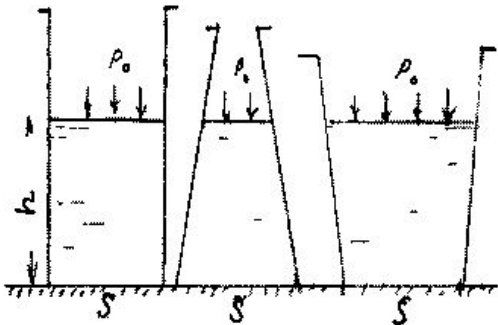
$$p_1 + \rho_1 gh = p_2 + \rho_2 gH \quad 4$$



Сами сосуды (A и B) обычно называются **коленами**.

# СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ

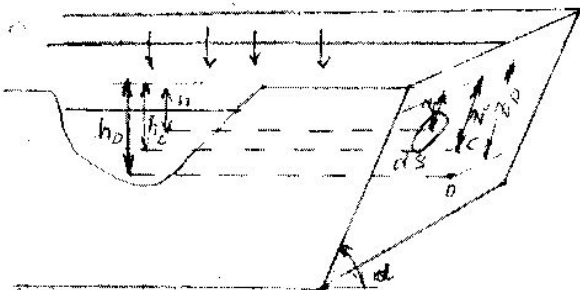
Для горизонтальной поверхности



$$p = p_0 + \rho gh \quad 1$$

$$P = (p_0 + \rho gh)S \quad 2$$

Сила давления жидкости на горизонтальную поверхность (дно сосуда) равно произведению площади этой поверхности на величину давления на глубине погружения этой поверхности. На рисунке показан так называемый «гидравлический парадокс», здесь величины силы давления на дно всех сосудов одинаковы, независимо от формы стенок сосудов и их физической высоты, т.к. площади доньев у всех сосудов одинаковы, одинаковы и величины давлений.



$$p = p_0 + \rho g z \sin \alpha = p_0 + \rho gh \quad 3$$

$$h = z \sin \alpha \quad 4$$

$$dP = p dS = (p_0 + \rho gh) dS \quad 5$$

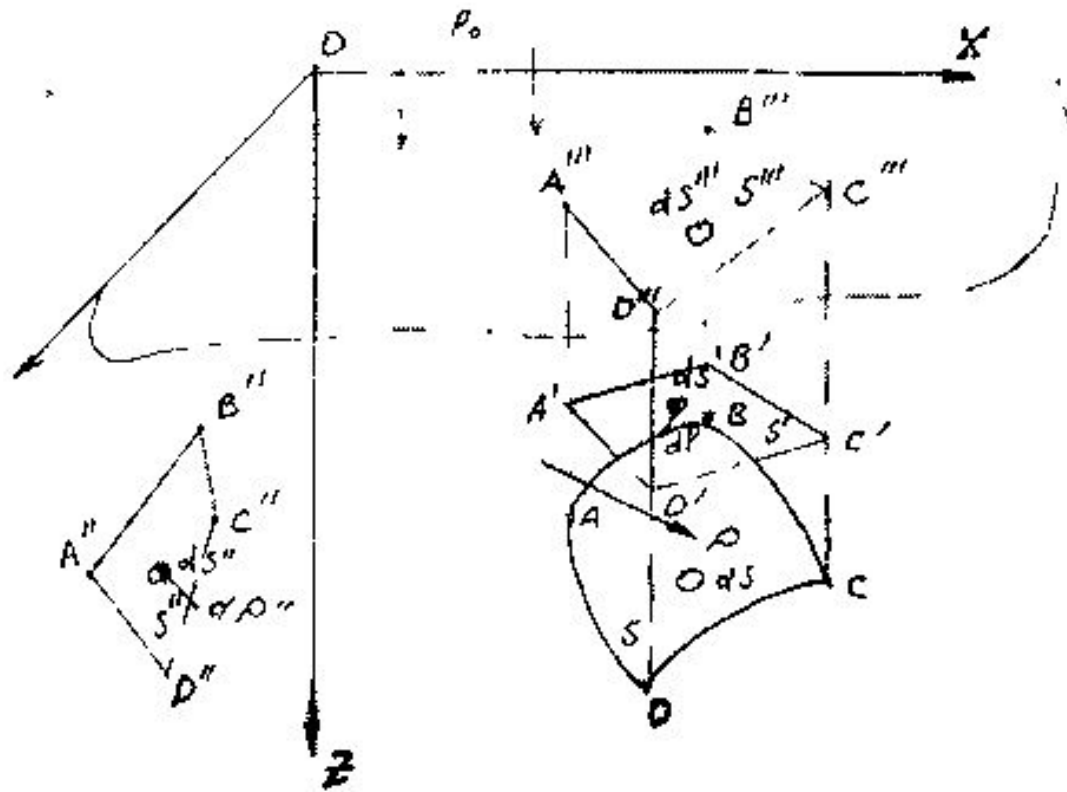
$$P_{\text{изб}} \cdot z_D = \int_S z \cdot dP_{\text{изб}} \quad 8$$

$$z_D = \frac{\rho g \cdot \sin \alpha \int_S z^2 dS}{\rho g \cdot \sin \alpha \cdot z_c \cdot S} = \frac{J_x}{z_c \cdot S} \quad 9$$

$$P = \int (p_0 + \rho gh) dS = p_0 S + \rho g \int h dS = p_0 S + \rho g \sin \alpha \int z dS \quad 6$$

$$P = p_0 S + \rho g \sin \alpha z_c S = (p_0 + \rho gh_c) S = p_c S \quad 7$$

# СИЛА ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ



$$dP = \sqrt{dP_x^2 + dP_y^2 + dP_z^2}, \quad 1$$

$$dP_x = (p_0 + \rho gh) dS \cos(\overline{dP}, OX), \quad 2$$

$$\text{т.е. } dP_x = (p_0 + \rho gh) dS' \quad 3$$

$$\text{и } dP_y = (p_0 + \rho gh) dS'' \quad 4$$

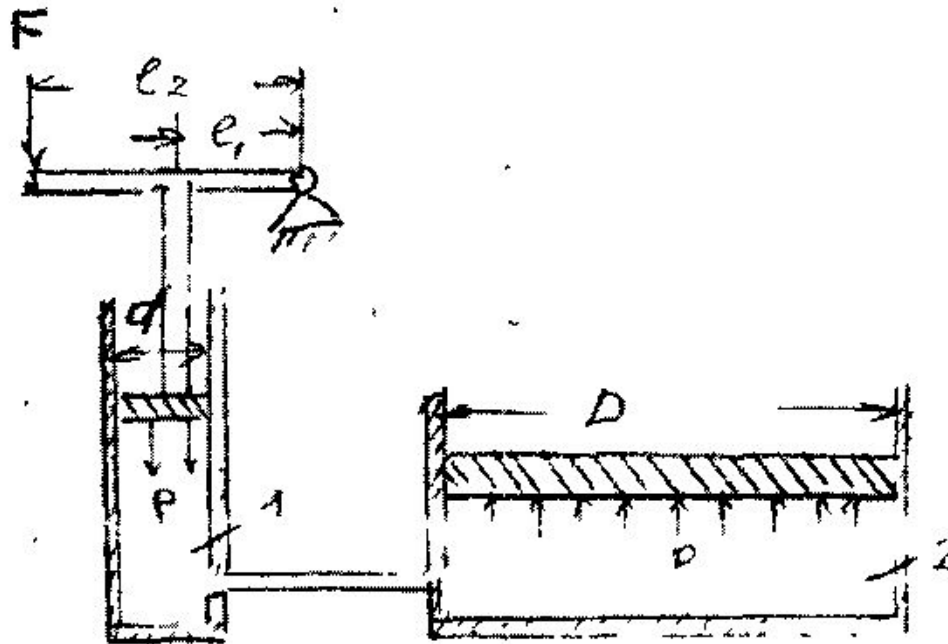
$$P_x = (p_0 + \rho gh_c) S' \quad 5$$

$$P_y = (p_0 + \rho gh_c) S'' \quad 6$$

$$P_z = \int p_0 dS''' + \rho g \int h dS''' \quad 7$$

$$P_z = p_0 S''' + \rho g W_{m0} \quad 8$$

# СИЛА ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ

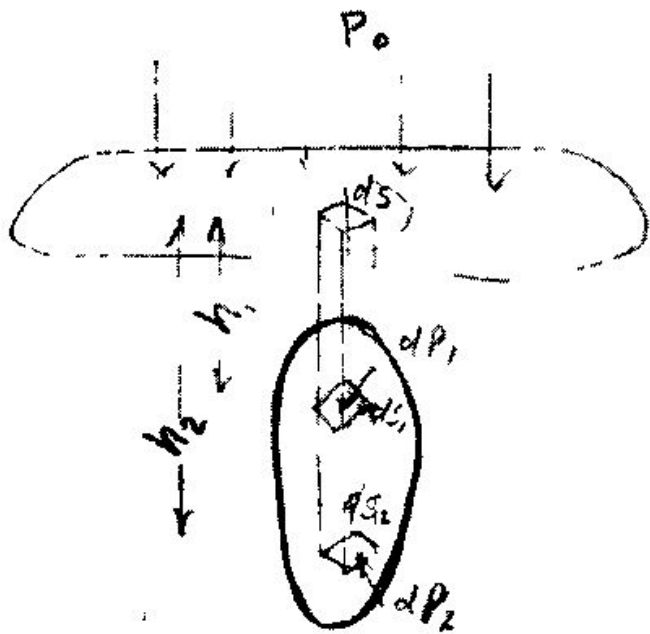


$$P_1 = F \frac{l_2}{l_1} \quad 1$$

$$p = \frac{P_1}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad 2$$

$P_2 = p \frac{\pi D^2}{4}$  3 Таким образом, с помощью гидравлического пресса, приложенная к концу рычага сила, увеличивается в  $\frac{l_2}{l_1} \left(\frac{D}{d}\right)^2$  раз.

# РАВНОВЕСИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ



$$dP_1 = p_0 dS + \rho_{ж} g h_1 dS \quad 1$$

$$dP_2 = -p_0 dS - \rho_{ж} g h_2 dS \quad 2$$

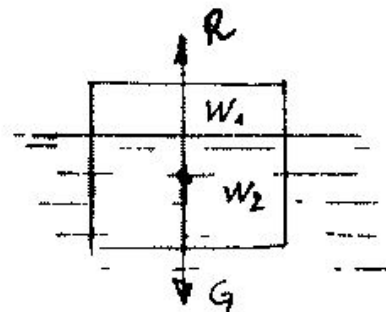
$$R = -\rho_{ж} g \cdot W_m \quad 3 \quad G = \rho_m g \cdot W_m \quad 4$$

$$\rho_m > \rho_{ж}, \text{ TO } G_m > R. \quad 5$$

$$\rho_m < \rho_{ж}, \text{ TO } G_m < R. \quad 6$$

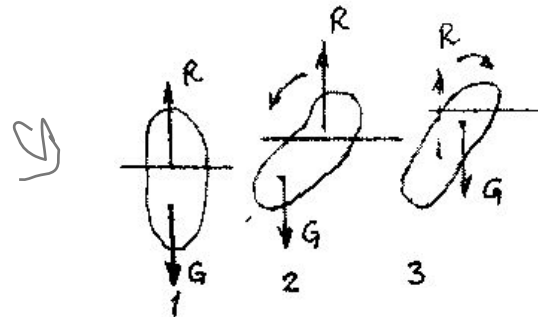
$$\rho_m = \rho_{ж}, \text{ TO } G_m = R. \quad 7$$

$$\rho_m g \cdot W_m = \rho_{ж} g \cdot W_2. \quad 8$$



$$W_m = W_1 + W_2$$

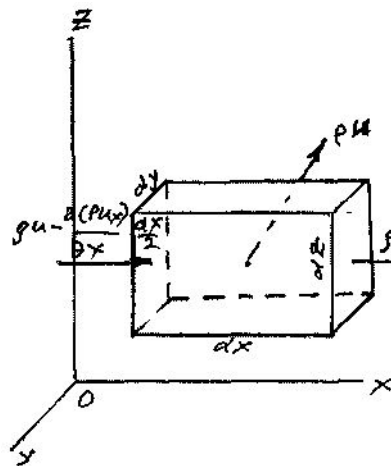
$$\frac{W_2}{W_1 + W_2} = \frac{\rho_m}{\rho_{ж}}$$





# УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЖИДКОСТИ

Если в гидродинамическом поле отсутствуют вихри, то; для такого поля можно записать уравнение, связывающее параметры движущейся жидкости (плотность жидкости) с параметрами, характеризующими условия движения жидкости. Вывод такого уравнения основан на представлении жидкости как сплошной непрерывной среды, в силу чего такое уравнение получило название **уравнения неразрывности**.



$$\rho u_x - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad 1$$

$$dM_y = dM_y'' - dM_y' = -\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dx dy dz dt \quad 6$$

$$\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad 2$$

$$dM_z = dM_z'' - dM_z' = -\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dx dy dz dt \quad 7$$

$$dM'_x = \left[ \rho u_x - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz dt, \quad 3$$

$$dM = dM_x + dM_y + dM_z \quad 8$$

$$dM = -\left[ \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt \quad 9$$

$$dM''_x = \left[ \rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz dt \quad 4$$

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \quad 10$$

$$dM_x = dM''_x - dM'_x = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz dt \quad 5$$

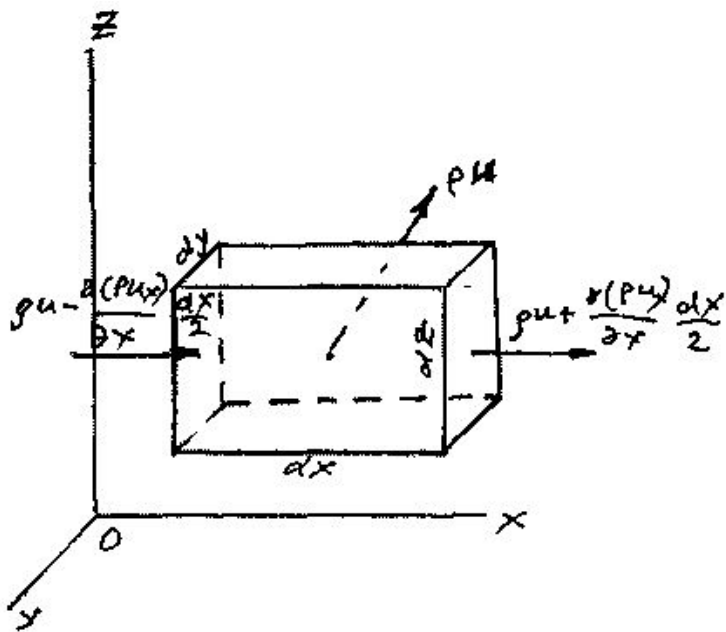
$$dM_1 = \rho dW = \rho dx dy dz, \quad 11$$

$$dM_2 = \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz \quad 12$$

$$-\left[ \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt,$$

$$dM = dM_2 - dM_1 = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz dt \quad 13$$

# УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЖИДКОСТИ



$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad 1$$

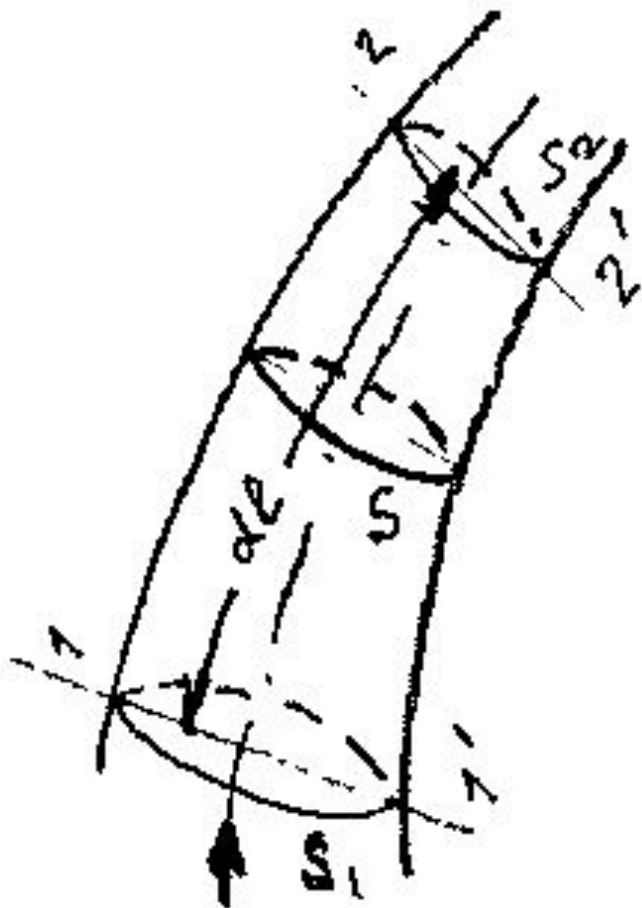
$$(\rho = \text{const}, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0) \quad 2$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad 3$$

$$\text{div}(\overline{\rho u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad 4$$

$$\text{div} \bar{u} = 0 \quad 5$$

# УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ЖИДКОСТИ



$$dM_1 = \rho Q dt \quad 1$$

$$dM_2 = \left[ \rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl \right] dt \quad 2$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt \cdot dl, \text{ тогда} \quad 3$$

$$\rho Q dt - \left[ \rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl \right] dt = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt \cdot dl, \quad 4$$

$$-\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl dt = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt dl, \quad 5$$

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} + \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = 0 \quad 6$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{S} \left( \frac{\partial Q}{\partial l} + \frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0 \quad 7$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad 8$$

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ (ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ) И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

$$d\bar{F} + d\bar{P} = d\bar{R} = 0 \quad 1 \qquad d\bar{R} = \frac{d\bar{u}}{dt} dM \quad 2$$

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{du_y}{dt} = j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{du_z}{dt} = j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad 3$$

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad 4$$

$$\begin{cases} u_x = u_x[x(t), y(t), z(t)] \\ u_y = u_y[x(t), y(t), z(t)] \\ u_z = u_z[x(t), y(t), z(t)] \end{cases} \quad 5$$

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases} \quad 6$$

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot u_z \\ \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot u_z \\ \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot u_z \end{cases}$$

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ (ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ) И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot u_z &= j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot u_z &= j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot u_z &= j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right. \quad 1$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} dx &= j_x dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \\ \frac{du_y}{dt} dy &= j_y dy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy \\ \frac{du_z}{dt} dz &= j_z dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz \end{aligned} \right. \quad 2$$

$$\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz = j_x dx + j_y dy + j_z dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \quad 3$$

$$\frac{du_x}{dt} u_x dt + \frac{du_y}{dt} u_y dt + \frac{du_z}{dt} u_z dt = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} d(u^2). \quad 4$$

$$j_x dx + j_y dy + j_z dz = dU, \quad 5$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp \quad 6$$

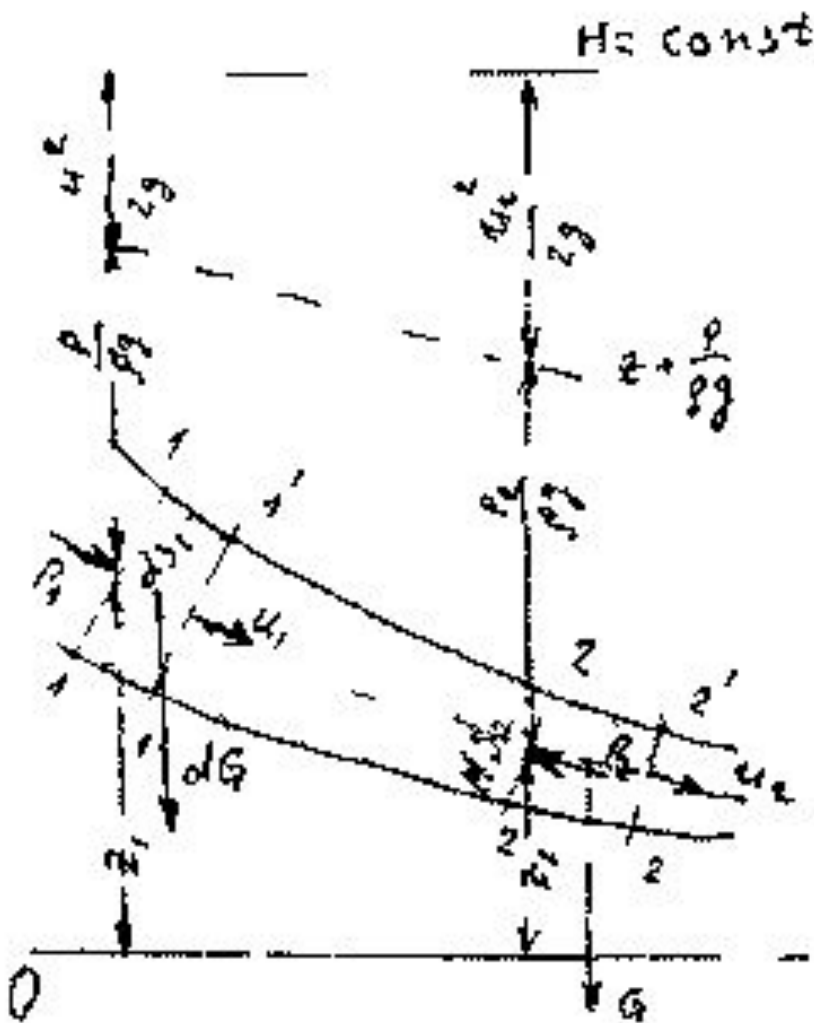
$$\frac{1}{2} d(u^2) = dU - \frac{1}{\rho} dp \quad 7$$

$$\frac{1}{2} d(u^2) = -gdz - \frac{1}{\rho} dp \quad 8$$

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C \quad 9$$

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H \quad 10$$

# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ



$$dA_{p1} = p_1 u_1 dS_1 dt \quad ?$$

$$dA_{p2} = -p_2 u_2 dS_2 dt \quad 2$$

$$dA_p = dA_{p1} + dA_{p2} = p_1 u_1 dS_1 dt - p_2 u_2 dS_2 dt \quad 3$$

$$(z_1 - z_2) \cdot dG = \rho g u_1 dS_1 dt = \rho g u_2 dS_2 dt \quad 4$$

$$dA_G = (z_1 - z_2) \cdot dG \quad 5$$

$$dE_k = \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot dM}{2} = \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot dG}{2g} \quad 6$$

$$p_1 u_1 dS_1 dt - p_2 u_2 dS_2 dt + (z_1 - z_2) \cdot dG = \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot dG}{2g} \quad 7$$

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} = H \quad 8}$$

# ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

$z + \frac{p}{\rho g}$  - называется пьезометрическим напором  
- удельная потенциальная энергия

$\frac{u^2}{2g}$  - носит название скоростного напора.  
- удельная кинетическая энергия

$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$  - носит название гидродинамического напора  
- удельная механическая энергия.

$\frac{p}{\rho g}$  - удельная энергия давления,

$z$  - называется геометрическим напором (геометрической высотой)  
- удельная энергия положения,



# СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ - СТОКСА

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{du_x}{dt} &= \rho j_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] - \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \zeta \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right], \\ \rho \frac{du_y}{dt} &= \rho j_y - \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] - \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \zeta \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right], \\ \rho \frac{du_z}{dt} &= \rho j_z - \frac{\partial p}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right] - \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \zeta \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

1

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \frac{du_y}{dt} &= j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \frac{du_z}{dt} &= j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right.$$

2

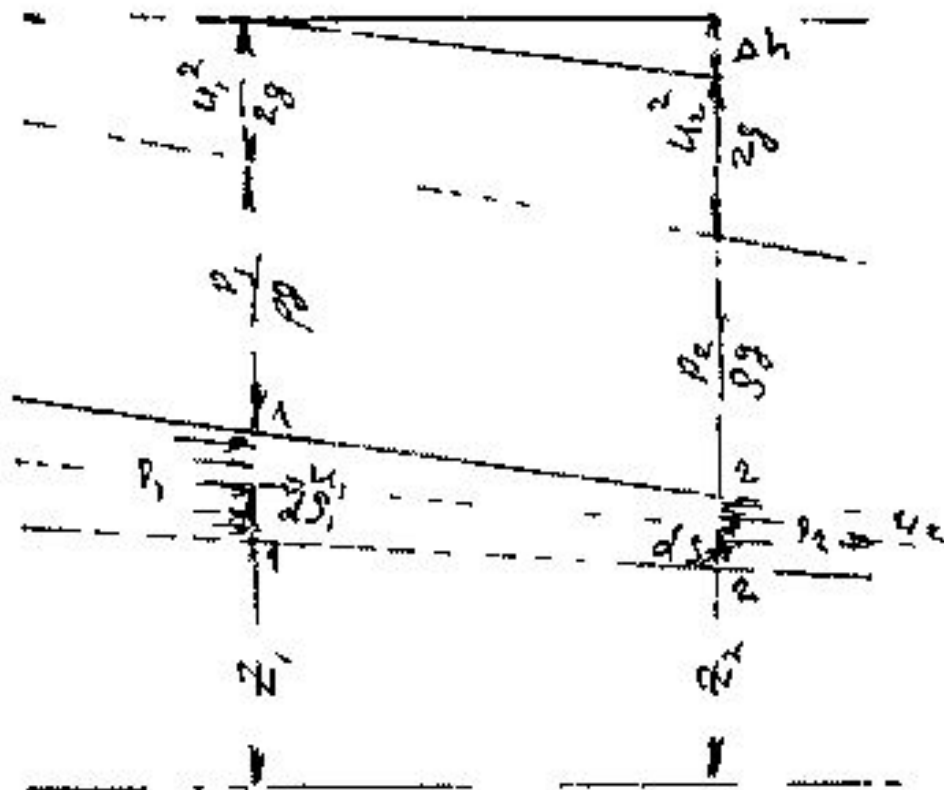


# СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ - СТОКСА

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{du_y}{dt} = j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{du_z}{dt} = j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{cases}$$

3

# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ



$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{mp}.$$

$$\frac{h_{mp}}{l} = i$$

НОСИТ НАЗВАНИЕ  
ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УКЛОНА.

# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

$$1 \quad dQ_u = \rho u dS$$

$$2 \quad dE_k = \frac{\rho u dS \cdot u^2}{2} = \frac{\rho}{2} u^3 dS.$$

$$3 \quad E_k = \frac{\rho}{2} \int u^3 dS.$$

$$4 \quad E_{cp} = \frac{\rho}{2} \int v^3 dS.$$

$$5 \quad \alpha = \frac{E_k}{E_{cp}} = \frac{\int u^3 dS}{\int v^3 dS}$$

коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей по сечению (**коэффициент Кориолиса**)

$$6 \quad z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{mp}$$

Кроме коэффициента Кориолиса, учитывающего неравномерность распределения кинетической энергии по живому сечению потока, существует аналогичный показатель для величины количества движения, **коэффициент Буссинэ**

$$7 \quad \Theta = \int \rho u \cdot ds \cdot u = \rho \int u^2 ds. \quad \Theta_{cp} = \rho v \cdot S \cdot v = \rho \cdot S \cdot v^2. \quad 8$$

# ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Потери удельной энергии в потоке жидкости, безусловно, связаны с вязкостью жидкости, но сама вязкость - не единственный фактор, определяющий потери напора. Но можно утверждать, что величина потерь напора почти всегда пропорциональны квадрату средней скорости движения жидкости. Эту гипотезу подтверждают результаты большинства опытных работ и специально поставленных экспериментов. По этой причине потери напора принято исчислять в долях от скоростного напора (удельной кинетической энергии потока). Тогда:

$$h_{mp} = \xi_{mp} \frac{v^2}{2g} \cdot 1$$

Потери напора принято подразделять на две категории:

потери напора, распределённые вдоль всего канала, по которому перемещается жидкость (трубопровод, канал, русло реки и др.), эти потери пропорциональны длине канала и называются потерями напора по длине сосредоточенные потери напора: потери напора на локальной длине потока (достаточно малой по сравнению с протяжённостью всего потока). Этот вид потерь во многом зависит от особенностей преобразования параметров потока (скоростей, формы линий тока и др.). Как правило, видов таких потерь довольно много и их расположение по длине потока зачастую далеко не закономерно. Такие потери напора называют местными потерями или потерями напора на местных гидравлических сопротивлениях. Это вид потерь напора также принято исчислять в долях от скоростного напора

$$h_u = \xi_u \frac{v^2}{2g} \cdot 2$$

Тогда полные потери напора можно представить собой как сумму всех видов потерь напора:

$$h_{mp} = h_{dl} + \sum h_u \cdot 3$$

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ **25-28**

