ДИСЦИПЛИНА «ГИДРОГАЗОДИНАМИКА»

ЛЕКЦИЯ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ. СООБЩАЮЩИЕСЯ СОСУДЫ. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ. СИЛА ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ. РАВНОВЕСИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЖИДКОСТИ. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ.

20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ»

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: СТАРШИЙ ПРЕПОДАВАТЕЛЬ МОСТОВЕНКО ЛЮБОВЬ ВЛАДИМИРОВНА

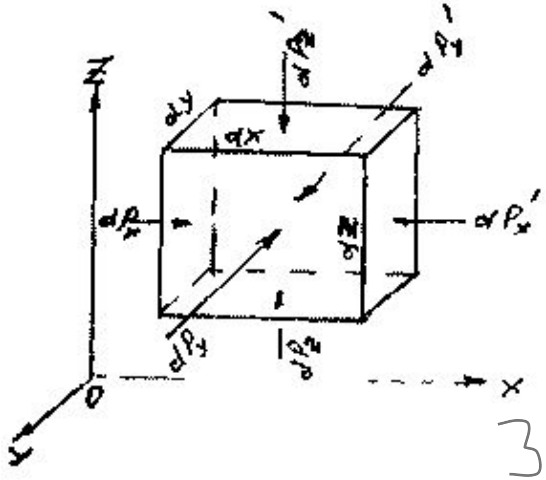
ПЕРЕЧЕНЬ ЛЕКЦИЙ

Лекция 1. Введение. Общие сведения о жидкости. Жидкость как физическое тело. Основные физические свойства жидкостей. Неньютоновские жидкости. Основы гидростатики. Силы, действующие в жидкости. Свойства гидростатического давления. Основное уравнение гидростатики.

Лекция 2. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости. Сообщающиеся сосуды. Сила давления жидкости на плоскую поверхность, погружённую в жидкость. Сила давления на криволинейную поверхность, погружённую в жидкость. Равновесие твёрдого тела в жидкости. Уравнение неразрывности жидкости. Система дифференциальных уравнений Навье – Стокса. Гидравлические сопротивления.

Лекция 3. Потери напора на местных гидравлических сопротивлениях. Потери напора по длине. Режимы движения жидкости. Истечение жидкости из отверстий и насадков. Классификация трубопроводов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ



Масса жидкости в выделенном объёме:

$$dM = \rho dW = \rho dxdydz \qquad 1$$

$$dP_x = pdS = pdydz \qquad 2$$

Поскольку давление на правую грань больше, то

$$3 \quad \begin{cases} dP_y = pdS = pdxdz \\ dP_z = pdS = pdxdy \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} dP'_x = -\left(p + \dfrac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz \\ dP'_y = -\left(p + \dfrac{\partial p}{\partial y}dy\right)dxdz \\ dP'_z = -\left(p + \dfrac{\partial p}{\partial z}dz\right)dxdy \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= \rho dW \cdot j_x = \rho dxdydz \cdot j_x, \\ F_y &= \rho dW \cdot j_y = \rho dxdydz \cdot j_y, \\ F_z &= \rho dW \cdot j_z = \rho dxdydz \cdot j_z. \end{aligned}}$$

5

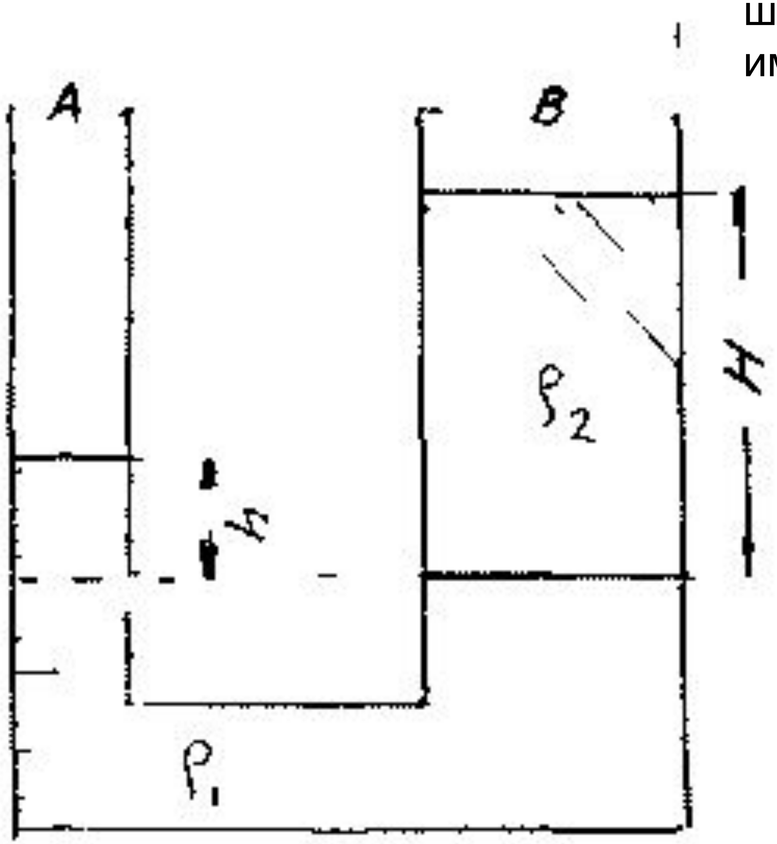
$$\boxed{\begin{aligned} & pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz + \rho dxdydz \cdot j_x, \\ & pdxdz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dxdz + \rho dxdydz \cdot j_y, \\ & pdxdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dxdy + \rho dxdydz \cdot j_z, \end{aligned}}$$

6

$$\boxed{\begin{aligned} & j_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ & j_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ & j_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}}$$

7

СООБЩАЮЩИЕСЯ СОСУДЫ



В открытых сообщающихся сосудах давления на свободную поверхность могут быть шными, тогда уравнение равновесия будет иметь следующий вид:

$$p_0 + \rho_1 g h = p_0 + \rho_2 g H \quad 1$$

$$\rho_1 h = \rho_2 H \quad 2$$

$$H = \frac{\rho_1}{\rho_2} h. \quad 3$$

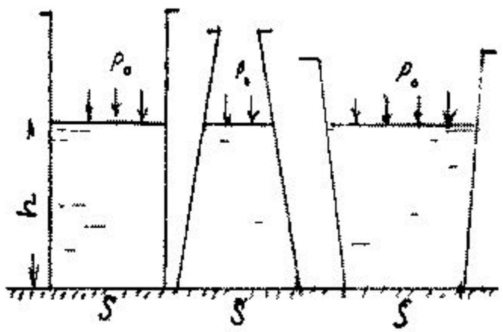
В закрытых сообщающихся сосудах давления на свободную поверхность могут быть иными, тогда уравнение равновесия будет иметь следующий вид:

$$p_1 + \rho_1 g h = p_2 + \rho_2 g H. \quad 4$$

Сами сосуды *(А и В)* обычно называются **коленами**.

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ

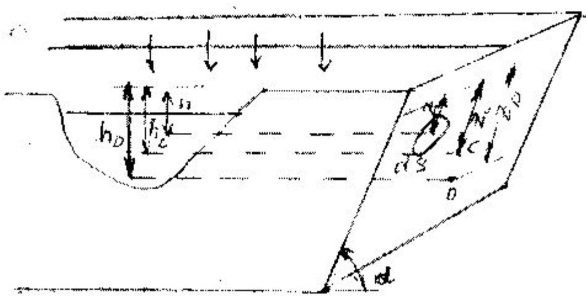
<u>Для горизонтальной поверхности</u>



$$p = p_0 + \rho g h$$ 1

$$P = (p_0 + \rho g h)S$$ 2

Сила давления жидкости на горизонтальную поверхность (дно сосуда) равно произведению площади этой поверхности на величину давления на глубине погружения этой поверхности. На рисунке показан так называемый **«гидравлический парадокс»,** здесь величины силы давления на дно всех сосудов одинаковы, независимо от формы стенок сосудов и их физической высоты, т.к. площади доньев у всех сосудов одинаковы, одинаковы и величины давлений.



$$p = p_0 + \rho g z \sin\alpha = p_0 + \rho g h$$ 3

$$h = z\sin\alpha$$ 4

$$dP = p\,dS = (p_0 + \rho g h)dS$$ 5

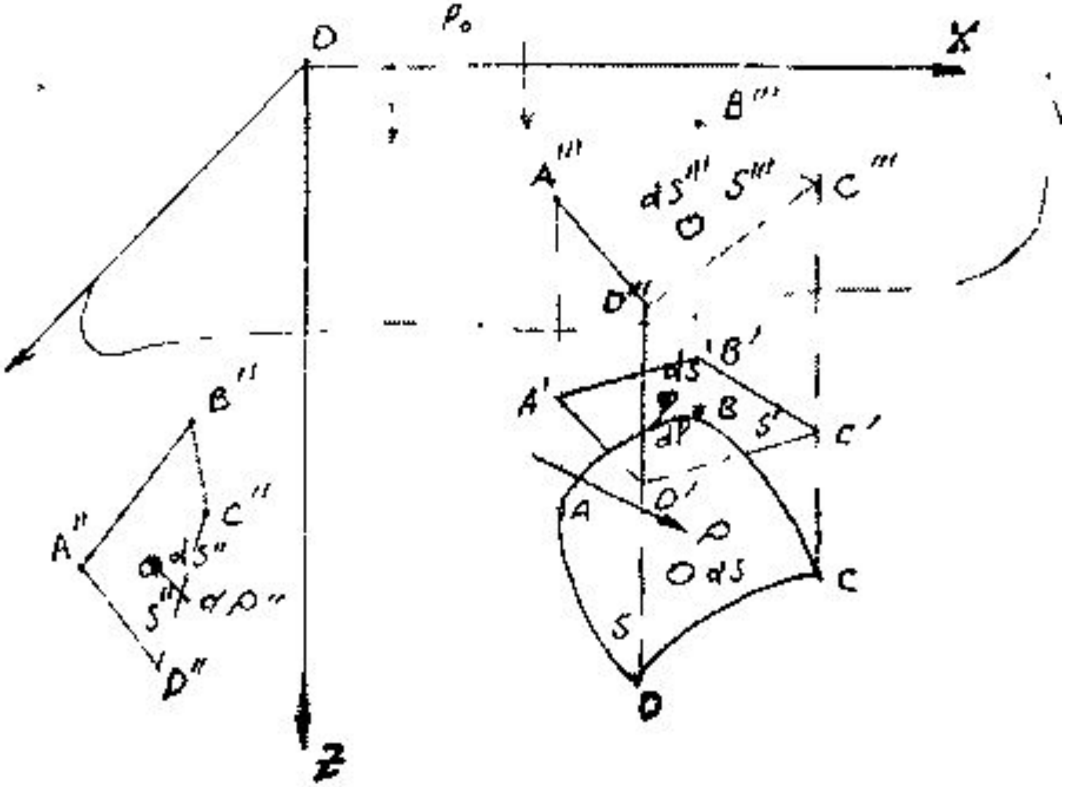
$$P = \int(p_0 + \rho g h)dS = p_0 S + \rho g \int h\,dS = p_0 S + \rho g \sin\alpha \int z\,dS$$ 6

$$P = p_0 S + \rho g \sin\alpha\, z_c S = (p_0 + \rho g h_c)S = p_c S.$$ 7

$$P_{изб} \cdot z_D = \int_S z \cdot dP_{изб} ,$$ 8

$$z_D = \frac{\rho g \cdot \sin\alpha \int z^2 dS}{\rho g \cdot \sin\alpha \cdot z_c \cdot S} = \frac{J_x}{z_c \cdot S},$$ 9

СИЛА ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ



$$dP = \sqrt{dP_x^2 + dP_y^2 + dP_z^2}\,, \quad 1$$

$$dP_x = (p_0 + \rho g h) dS \cos(\overline{dP}, OX), \quad 2$$

т е $dP_x = (p_0 + \rho g h) dS'$ 3

и $dP_y = (p_0 + \rho g h) dS''$ 4

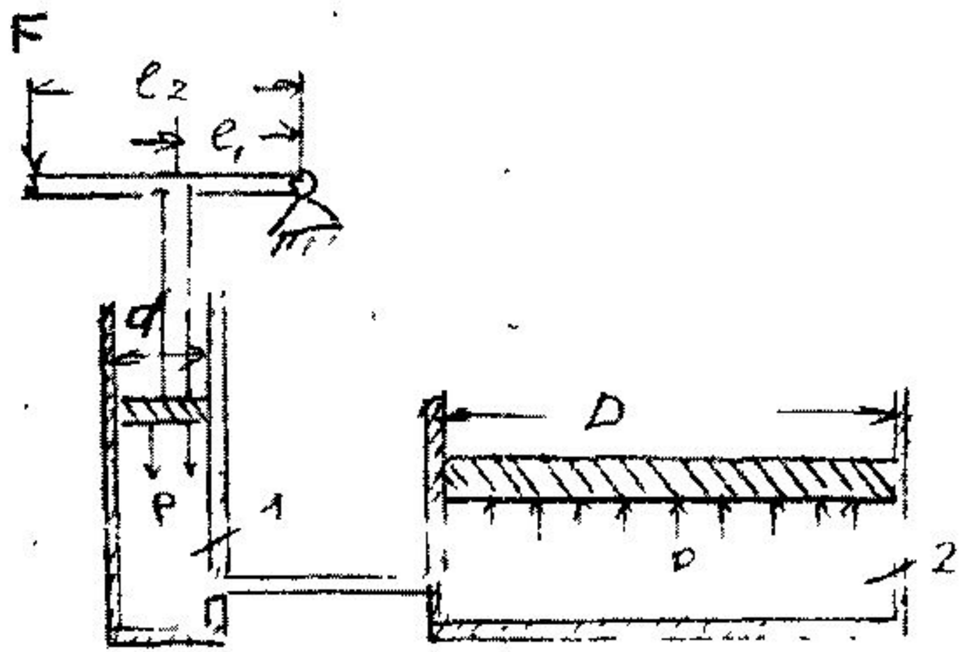
$$P_x = (p_0 + \rho g h_c) S' \quad 5$$

$$P_y = (p_0 + \rho g h_c) S'' \quad 6$$

$$P_z = \int_{S'''} p_0 dS''' + \rho g \int_{S'''} h dS''' \quad 7$$

$$P_z = p_0 S''' + \rho g W_{тд}\,. \quad 8$$

СИЛА ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ПОГРУЖЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ



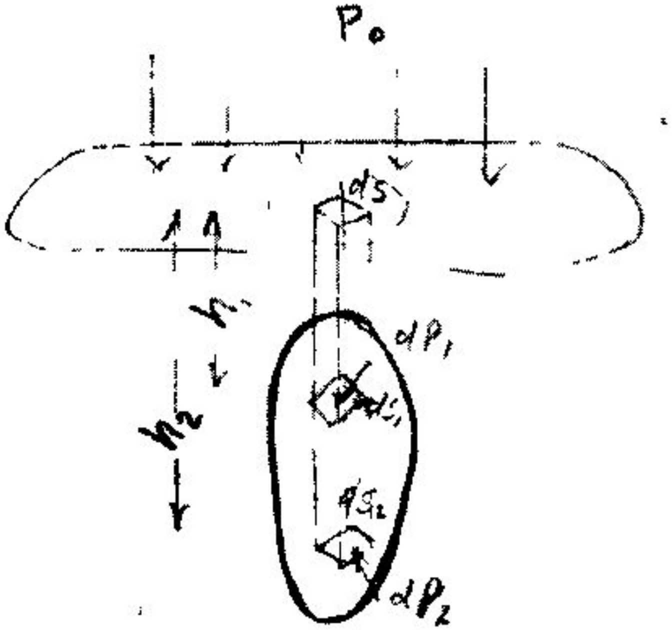
$$P_1 = F\frac{l_2}{l_1} \quad 1$$

$$p = \frac{P_1}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad 2$$

$$P_2 = p\frac{\pi D^2}{4} \quad 3$$

Таким образом, с помощью гидравлического пресса, приложенная к концу рычага сила, увеличивается в $\frac{l_2}{l_1}\left(\frac{D}{d}\right)^2$ раз.

РАВНОВЕСИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ



$$dP_1 = p_0 dS + \rho_ж g h_1 dS \quad 1$$

$$dP_2 = -p_0 dS - \rho_ж g h_2 dS \quad 2$$

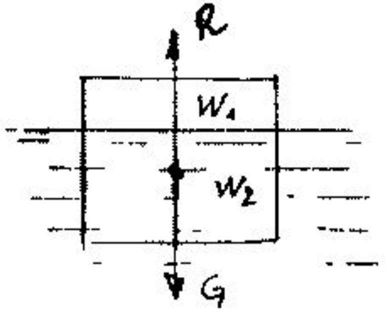
$$R = -\rho_ж g \cdot W_m \quad 3 \qquad G = \rho_m g \cdot W_m \quad 4$$

$\rho_m > \rho_ж$, то $G_m > R$. 5

$\rho_m < \rho_ж$, то $G_m < R$. 6

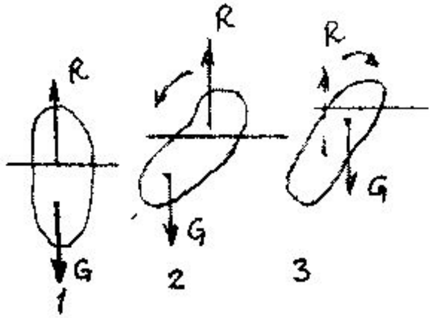
$\rho_m = \rho_ж$, то $G_m = R$. 7

$$\rho_m g \cdot W_m = \rho_ж g \cdot W_2 . \quad 8$$



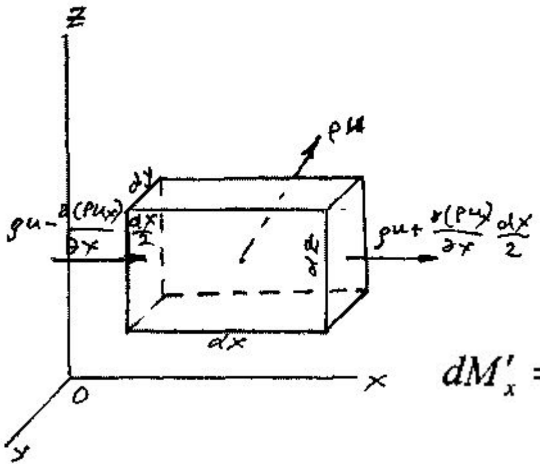
$W_m = W_1 + W_2$

$$\frac{W_2}{W_1 + W_2} = \frac{\rho_m}{\rho_ж} \quad 9$$



УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЖИДКОСТИ

Если в гидродинамическом поле отсутствуют вихри, то; для такого поля можно за писать уравнение, связывающее параметры движущейся жидкости (плотность жидкости) с параметрами, характеризующими условия движения жидкости. Вывод такого уравнения основан на представлении жидкости как сплошной непрерывной среды, в силу чего такое уравнение получило название **уравнения неразрывности.**



$$\rho u_x - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\frac{dx}{2} \quad 1$$

$$\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\frac{dx}{2} \quad 2$$

$$dM'_x = \left[\rho u_x - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dydzdt, \quad 3$$

$$dM''_x = \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz\,dt \quad 4$$

$$dM_x = dM''_x - dM'_x = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}dxdydzdt \quad 5$$

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt = \frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydzdt,$$

$$dM_y = dM''_y - dM'_y = -\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}dxdydzdt \quad 6$$

$$dM_z = dM''_z - dM'_z = -\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}dxdydzdt \quad 7$$

$$dM = dM_x + dM_y + dM_z \quad 8$$

$$dM = -\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt \quad 9$$

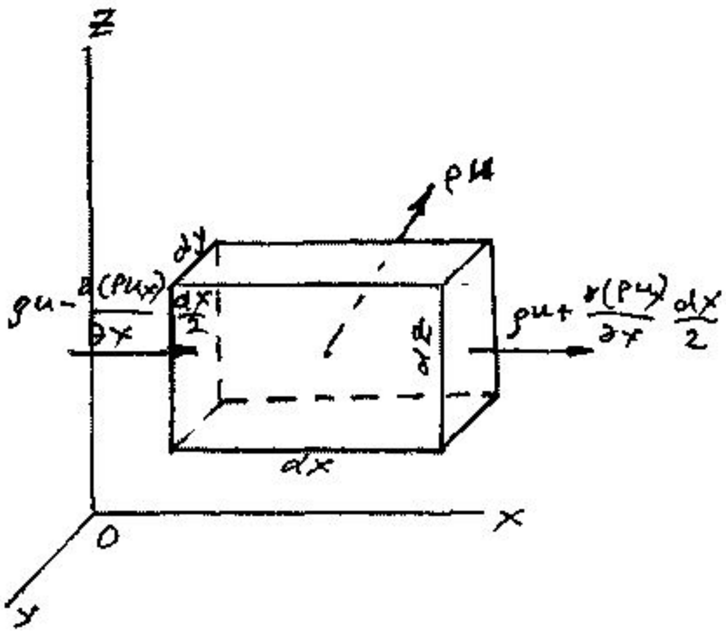
$$\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}dt \quad 10$$

$$dM_1 = \rho dW = \rho dxdydz, \quad 11$$

$$dM_2 = \left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right)dxdydz \quad 12$$

$$dM = dM_2 - dM_1 = \frac{\partial\rho}{\partial t}dtdxdydz \quad 13$$

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЖИДКОСТИ



$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$ 1

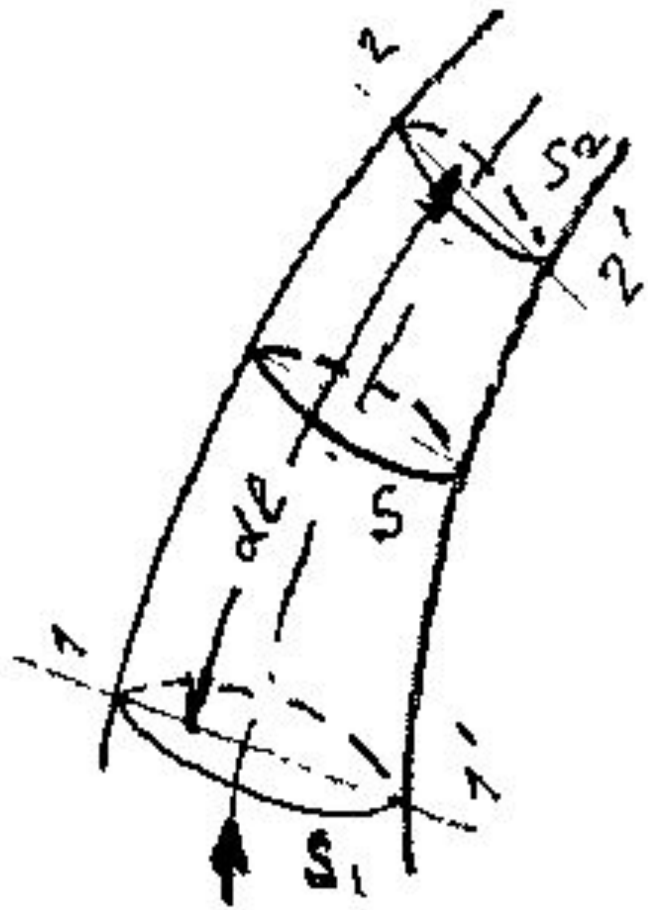
$$(\ \rho = const\ ,\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\ )$$ 2

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$ 3

$$div\left(\overline{\rho u}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$ 4

$$div\overline{u}=0.$$ 5

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ЖИДКОСТИ



$$dM_1 = \rho Q dt \,. \tag{1}$$

$$dM_2 = \left[\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl\right] dt \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt \cdot dl \quad \text{, тогда} \tag{3}$$

$$\rho Q dt - \left[\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl\right] dt = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt \cdot dl \,, \tag{4}$$

$$-\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl \;\; dt = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt \;\; dl \,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} + \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial l} + \frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = \frac{\partial S}{\partial t} \tag{8}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ (ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ) И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

$$d\overline{F} + d\overline{P} = d\overline{R} = 0$$ 1

$$d\overline{R} = \frac{d\overline{u}}{dt} dM$$ 2

$$\begin{cases} \dfrac{du_x}{dt} = j_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{du_y}{dt} = j_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{du_z}{dt} = j_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$ 3

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$ 4

$$\begin{cases} u_x = u_x\left[x(t), y(t), z(t)\right] \\ u_y = u_y\left[x(t), y(t), z(t)\right] \\ u_z = u_z\left[x(t), y(t), z(t)\right] \end{cases}$$ 5

$$\begin{cases} \dfrac{du_x}{dt} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial t} \\ \dfrac{du_y}{dt} = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial t} \\ \dfrac{du_z}{dt} = \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$ 6

$$\begin{cases} \dfrac{du_x}{dt} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\cdot u_x + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\cdot u_y + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\cdot u_z \\ \dfrac{du_y}{dt} = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\cdot u_x + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\cdot u_y + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\cdot u_z \\ \dfrac{du_z}{dt} = \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\cdot u_x + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\cdot u_y + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\cdot u_z \end{cases}$$ 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ (ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ) И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

$$\left\| \begin{aligned} &\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}\cdot u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}\cdot u_z = j_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ &\frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z}\cdot u_z = j_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}. \\ &\frac{\partial u_z}{\partial x}\cdot u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y}\cdot u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z}\cdot u_z = j_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right. \quad 1$$

$$\left\| \begin{aligned} &\frac{du_x}{dt}dx = j_x dx - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx \\ &\frac{du_y}{dt}dy = j_y dy - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy \\ &\frac{du_z}{dt}dz = j_z dz - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz \end{aligned} \right. \quad 2$$

$$\frac{du_x}{dt}dx + \frac{du_y}{dt}dy + \frac{du_z}{dt}dz = j_x dx + j_y dy + j_z dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) \quad 3$$

$$\frac{du_x}{dt}u_x dt + \frac{du_y}{dt}u_y dt + \frac{du_z}{dt}u_z dt = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2}d\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) = \frac{1}{2}d\left(u^2\right). \quad 4$$

$$j_x dx + j_y dy + j_z dz = dU, \quad 5$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dp \quad 6$$

$$\frac{1}{2}d\left(u^2\right) = dU - \frac{1}{\rho}dp \quad 7$$

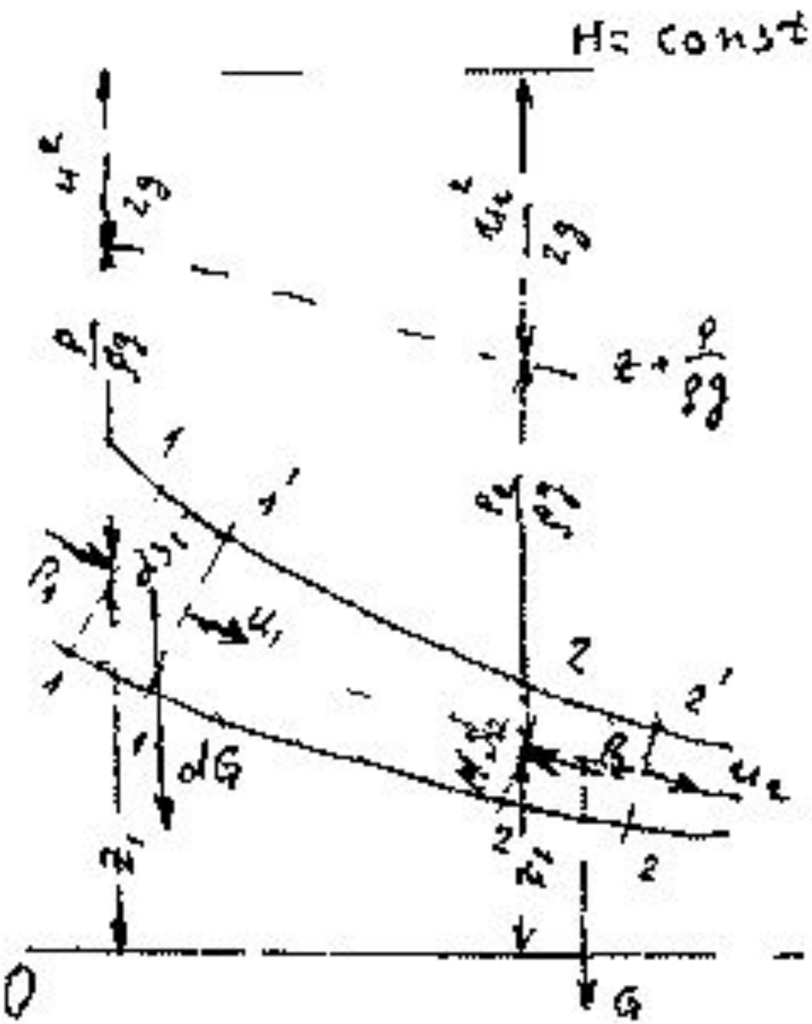
$$\frac{1}{2}d\left(u^2\right) = -gdz - \frac{1}{\rho}dp \quad 8$$

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C \quad 9$$

10

$$\boxed{z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H}$$

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ



$$dA_{p1} = p_1 u_1 dS_1 dt \quad 1$$

$$dA_{p2} = -p_2 u_2 dS_2 dt \quad 2$$

$$dA_p = dA_{p1} + dA_{p2} = p_1 u_1 dS_1 dt - p_2 u_2 dS_2 dt \quad 3$$

$$(z_1 - z_2). \quad dG = \rho g u_1 dS_1 dt = \rho g u_2 dS_2 dt \quad 4$$

$$dA_G = (z_1 - z_2) \cdot dG. \quad 5$$

$$dE_k = \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot dM}{2} = \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot dG}{2g}. \quad 6$$

$$p_1 u_1 dS_1 dt - p_2 u_2 dS_2 dt + (z_1 - z_2) \cdot dG = \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot dG}{2g}. \quad 7$$

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} = H} \quad 8$$

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

$z + \frac{p}{\rho g}$ - называется пьезометрическим напором

- удельная потенциальная энергия

$\frac{u^2}{2g}$ - носит название скоростного напора.

- удельная кинетическая энергия

$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$ - носит название гидродинамического напора

- удельная механическая энергия.

$\frac{p}{\rho g}$ - удельная энергия давления,

z - называется геометрическим напором (геометрической высотой)

- удельная энергия положения,

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ - СТОКСА

$$\begin{cases}
\rho\dfrac{du_x}{dt}=\rho j_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu\dfrac{\partial u_x}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right]+\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right]- \\
-\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\zeta\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right], \\
\rho\dfrac{du_y}{dt}=\rho j_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+2\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu\dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right)\right]+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right]- \\
-\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\zeta\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right], \\
\rho\dfrac{du_z}{dt}=\rho j_z-\dfrac{\partial p}{\partial z}+2\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+\dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right)\right]- \\
-\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]+\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\zeta\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right].
\end{cases}$$

1

$$\begin{cases}
\dfrac{du_x}{dt}=j_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\left(\dfrac{\zeta}{\rho}+\dfrac{\nu}{3}\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right), \\
\dfrac{du_y}{dt}=j_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\left(\dfrac{\zeta}{\rho}+\dfrac{\nu}{3}\right)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right), \\
\dfrac{du_z}{dt}=j_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\left(\dfrac{\zeta}{\rho}+\dfrac{\nu}{3}\right)\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right).
\end{cases}$$

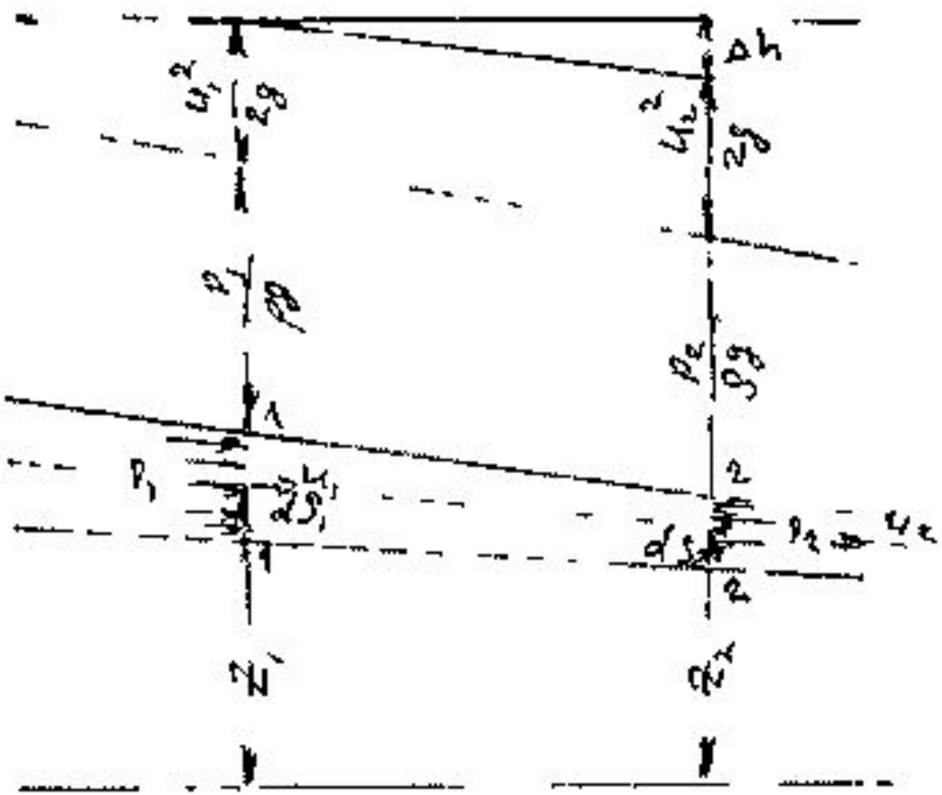
2

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ - СТОКСА

$$\begin{cases}
\dfrac{du_x}{dt} = j_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right), \\[2ex]
\dfrac{du_y}{dt} = j_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right), \\[2ex]
\dfrac{du_z}{dt} = j_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right).
\end{cases}$$

3

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ



$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{mp}.$$

$$\frac{h_{mp}}{l} = i$$

носит название **гидравлического уклона**.

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

1 $$dQ_{ч} = \rho u dS$$

2 $$dE_{к} = \frac{\rho u dS \cdot u^2}{2} = \frac{\rho}{2} u^3 dS.$$

3 $$E_{к} = \frac{\rho}{2} \int_S u^3 dS.$$

4 $$E_{ср} = \frac{\rho}{2} \int_S v^3 dS.$$

9 $$\alpha' = \frac{\Theta}{\Theta_{ср}} \frac{\rho \int_S u^2 ds}{\rho \cdot S \cdot v^2} = \frac{1}{S} \int_S \left(\frac{u}{v}\right)^2 ds$$

5 $$\alpha = \frac{E_{к}}{E_{ср}} = \frac{\int_S u^3 dS}{\int_S v^3 dS}$$

коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей по сечению **(коэффициент Кориолиса)**

6 $$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{тр}$$

Кроме коэффициента Кориолиса, учитывающего неравномерность распределения кинетической энергии по живому сечению потока, существует аналогичный показатель для величины количества движения, **коэффициент Буссинэ**

7 $$\Theta = \int_S \rho u \cdot ds \cdot u = \rho \int_S u^2 ds.$$

$$\Theta_{ср} = \rho v \cdot S \cdot v = \rho \cdot S \cdot v^2.$$ 8

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Потери удельной энергии в потоке жидкости, безусловно, связаны с вязкостью жидкости, но сама вязкость - не единственный фактор, определяющий потери напора. Но можно утверждать, что величина потерь напора почти всегда пропорциональны квадрату средней скорости движения жидкости. Эту гипотезу подтверждают результаты большин ства опытных работ и специально поставленных экспериментов. По этой причине потери напора принято исчислять в долях от скоростного напора (удельной кинетической энергии потока). Тогда:

$$h_{тр} = \xi_{тр} \frac{v^2}{2g}. \qquad 1$$

Потери напора принято подразделять на две категории:

потери напора, распределённые вдоль всего канала, по которому перемещается жидкость (трубопровод, канал, русло реки и др.), эти потери пропорциональны длине канала и называются потерями напора по длине сосредоточенные потери напора: потери напора на локальной длине потока (достаточно малой по сравнению с протяжённостью всего потока). Этот вид потерь во многом зависит от особенностей преобразования параметров потока (скоростей, формы линий тока и др.). Как правило, видов таких потерь довольно много и их расположение по длине потока зачастую далеко не закономерно. Такие потери напора называют местными потерями или потерями напора на местных гидравлических сопротивлениях. Это вид потерь напора также принято исчислять в долях от скоростного напора

$$h_{м} = \xi_{м} \frac{v^2}{2g}. \qquad 2$$

Тогда полные потери напора можно представить собой как сумму всех видов потерь напора:

$$h_{тр} = h_{дл} + \sum h_{м}. \qquad 3$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ **25-28**