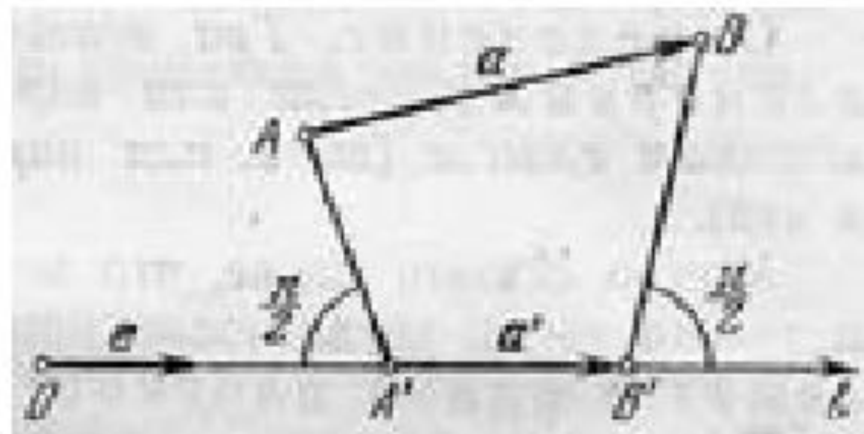
Лекция 8
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ
(продолжение)

§ 1. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Пусть в пространстве задана ось, т.е. направленная прямая. Направление прямой будем обозначать стрелкой. Заданное направление оси будем считать положительным, противоположное — отрицательным.

<u>Определение 1</u>. ***Проекцией точки A на ось l*** называется основание ***A′*** перпендикуляра ***AA′*** опущенного из точки ***A*** на эту ось.



Здесь под перпендикуляром ***AA′*** понимается прямая, пересекающая ось ***l*** и составляющая с ней прямой угол. Таким образом, проекция ***A′*** есть пересечение плоскости, проходящей через точку ***A*** и перпендикулярной оси ***l***, с этой осью.

- **<u>Определение 2.</u>** Под компонентой (составляющей) вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ [относ]ительно оси $\boldsymbol{l}$ понимается вектор $\overline{a'} = \overline{A'B'}$,

начало, которого $\boldsymbol{A'}$ есть проекция на ось $\boldsymbol{l}$ начала $\boldsymbol{A}$ вектора $\boldsymbol{a}$, а конец, которого $\boldsymbol{B'}$ есть проекция на ось $\boldsymbol{l}$ конца $\boldsymbol{B}$ этого вектора.

- **<u>Определение 3</u>.** Под проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на ось $\boldsymbol{l}$ принимается скаляр $a_l = \pm\left|\overline{A'B'}\right|$,

равный длине его компоненты $\boldsymbol{a'}$ относительно оси $\boldsymbol{l}$, взятой со знаком плюс, если направление компоненты совпадает с направлением оси $\boldsymbol{l}$, и со знаком минус, если направление компоненты противоположно направлению оси $\boldsymbol{l}$.

- Если, $\boldsymbol{a} = 0$, то полагают $\boldsymbol{a_l} = 0$
- Заметим, что если $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор оси $\boldsymbol{l}$, то для компоненты $\boldsymbol{a'}$ справедливо равенство

$$\overline{a'} = a_l \overline{e}.$$

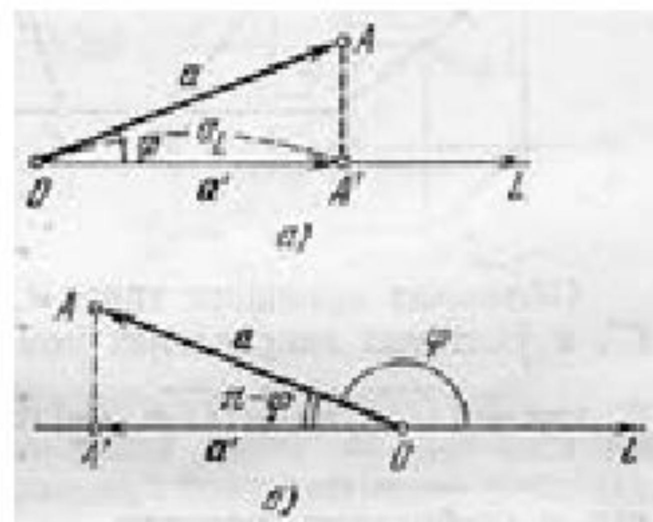
Теорема 1. Проекция вектора, ***a*** на ось ***l*** равна произведению длины ***a*** вектора на косинус угла между направлением вектора и направлением оси, т. е.

$$a_l = a\cos\varphi,\ \ \varphi = \angle(\bar{a}, l)$$

Доказательство. Так как вектор, ***a* = *OA*** свободный, то можно предположить, что начало его О лежит на оси ***l***.

1) Если угол ϕ , между вектором а и осью ***l*** острый ($0 \le \phi \le \pi/2$) то направление компоненты ***a′* = *OA′*** вектора ***a*** совпадает с направлением оси ***l***. В этом случае имеем

$$a_l = np_l\,\bar{a} = +\left|\overline{OA'}\right| = OA\cos\varphi = a\cos\varphi,$$



2) Если же угол ϕ , между вектором ***a*** и осью ***l*** тупой ($\pi/2 \le \phi \le \pi$) то направление компоненты ***a′* = *OA′*** вектора ***a*** противоположно направлению оси ***l*** . Тогда получаем

$$a_l = np_l\,\bar{a} = -\left|\overline{OA'}\right| = -OA\cos(\pi-\varphi) = +\cos\varphi$$

- **Следствие 1** Проекция вектора на ось:
- 1) положительна, если вектор образует с осью острый угол;
- 2) отрицательна, если этот угол — тупой,
- 3) равна рулю, если этот угол - прямой.
- **Следствие 2** Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой. .
- **Теорема 2.** Проекция суммы нескольких векторов на данную ось равна сумме их проекций на эту ось.
- **Следствие.** Проекция замкнутой векторной линии на любую ось равна нулю.
- **Теорема 3.** При умножении вектора на скаляр его проекция на данную ось умножается на этот скаляр, т. е. $np_l(k\overline{a}) = knp_l\overline{a}.$
- **Следствие.** Проекция линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации проекций этих векторов, т. е.

$$np_l(k_1\overline{a} + k_2\overline{b}) = k_1 np_l\overline{a} + k_2 np_l\overline{b}.$$