

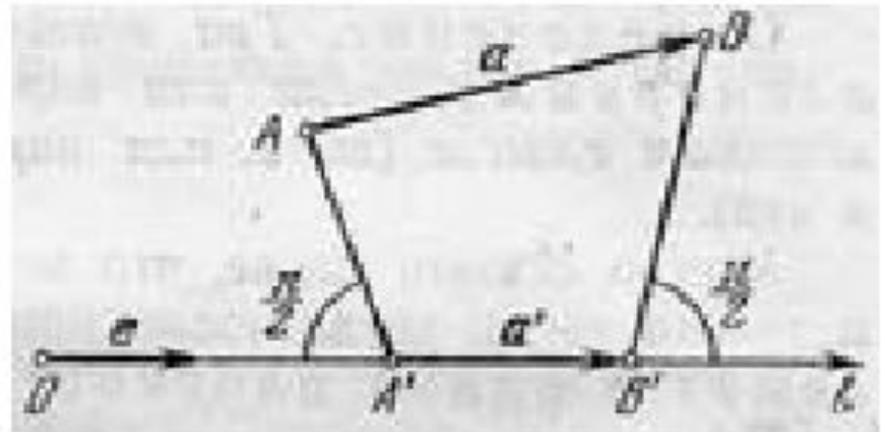
Лекция 8
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ
(продолжение)

§ 1. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Пусть в пространстве задана ось, т.е. направленная прямая. Направление прямой будем обозначать стрелкой. Заданное направление оси будем считать положительным, противоположное — отрицательным.

Определение 1. *Проекцией*

точки A на ось l называется основание A' перпендикуляра AA' опущенного из точки A на эту ось.



Здесь под перпендикуляром AA' понимается прямая, пересекающая ось l и составляющая с ней прямой угол. Таким образом, проекция A' есть пересечение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной оси l , с этой осью.

- **Определение 2.** Под компонентой (составляющей) вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ относительно оси l понимается вектор $\vec{a}' = \overline{A'B'}$,

начало, которого A' есть проекция на ось l начала A вектора \vec{a} , а конец, которого B' есть проекция на ось l конца B этого вектора.

- **Определение 3.** Под проекцией вектора \vec{a} на ось l принимается скаляр $a_l = \pm |\overline{A'B'}|$,

равный длине его компоненты \vec{a}' относительно оси l , взятой со знаком плюс, если направление компоненты совпадает с направлением оси l , и со знаком минус, если направление компоненты противоположно направлению оси l .

- Если, $\vec{a} = 0$, то полагают $a_l = 0$
- Заметим, что если \vec{e} — единичный вектор оси l , то для компоненты \vec{a}' справедливо равенство

$$\vec{a}' = a_l \vec{e}.$$

Теорема 1. Проекция вектора, \mathbf{a} на ось l равна произведению длины a вектора на косинус угла между направлением вектора и направлением оси, т. е.

$$a_l = a \cos \varphi, \quad \varphi = \angle(\bar{\mathbf{a}}, l)$$

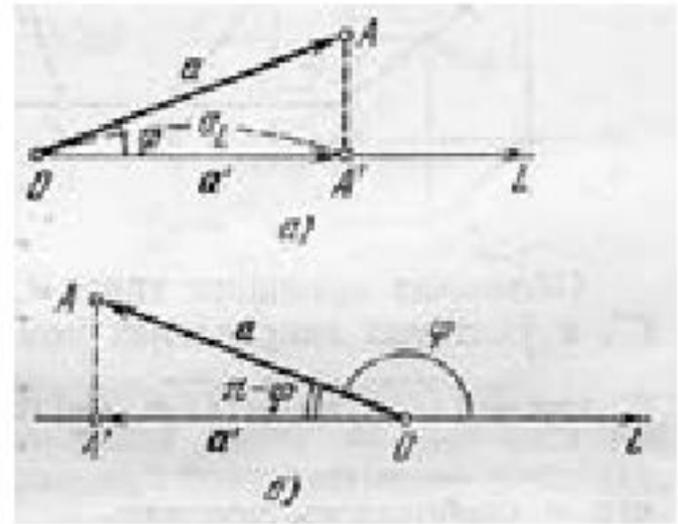
Доказательство. Так как вектор, $\mathbf{a} = \mathbf{OA}$ свободный, то можно предположить, что начало его O лежит на оси l .

1) Если угол φ , между вектором \mathbf{a} и осью l острый ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) то направление компоненты $\mathbf{a}' = \mathbf{OA}'$ вектора \mathbf{a} совпадает с направлением оси l . В этом случае имеем

$$a_l = \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}} = +|\overline{\mathbf{OA}'}| = OA \cos \varphi = a \cos \varphi,$$

2) Если же угол φ , между вектором \mathbf{a} и осью l тупой ($\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$) то направление компоненты $\mathbf{a}' = \mathbf{OA}'$ вектора \mathbf{a} противоположно направлению оси l . Тогда получаем

$$a_l = \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}} = -|\overline{\mathbf{OA}'}| = -OA \cos(\pi - \varphi) = +a \cos \varphi$$



- **Следствие 1** Проекция вектора на ось:
 - 1) положительна, если вектор образует с осью острый угол;
 - 2) отрицательна, если этот угол — тупой,
 - 3) равна нулю, если этот угол - прямой.
- **Следствие 2** Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой. .
- **Теорема 2.** Проекция суммы нескольких векторов на данную ось равна сумме их проекций на эту ось.
- **Следствие.** Проекция замкнутой векторной линии на любую ось равна нулю.
- **Теорема 3.** При умножении вектора на скаляр его проекция на данную ось умножается на этот скаляр, т. е. $np_l(k\bar{a}) = knp_l\bar{a}$.
- **Следствие.** Проекция линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации проекций этих векторов, т. е.

$$np_l(k_1\bar{a} + k_2\bar{b}) = k_1np_l\bar{a} + k_2np_l\bar{b}.$$