

# ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ І ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАНЬ

## *Лекція 4*

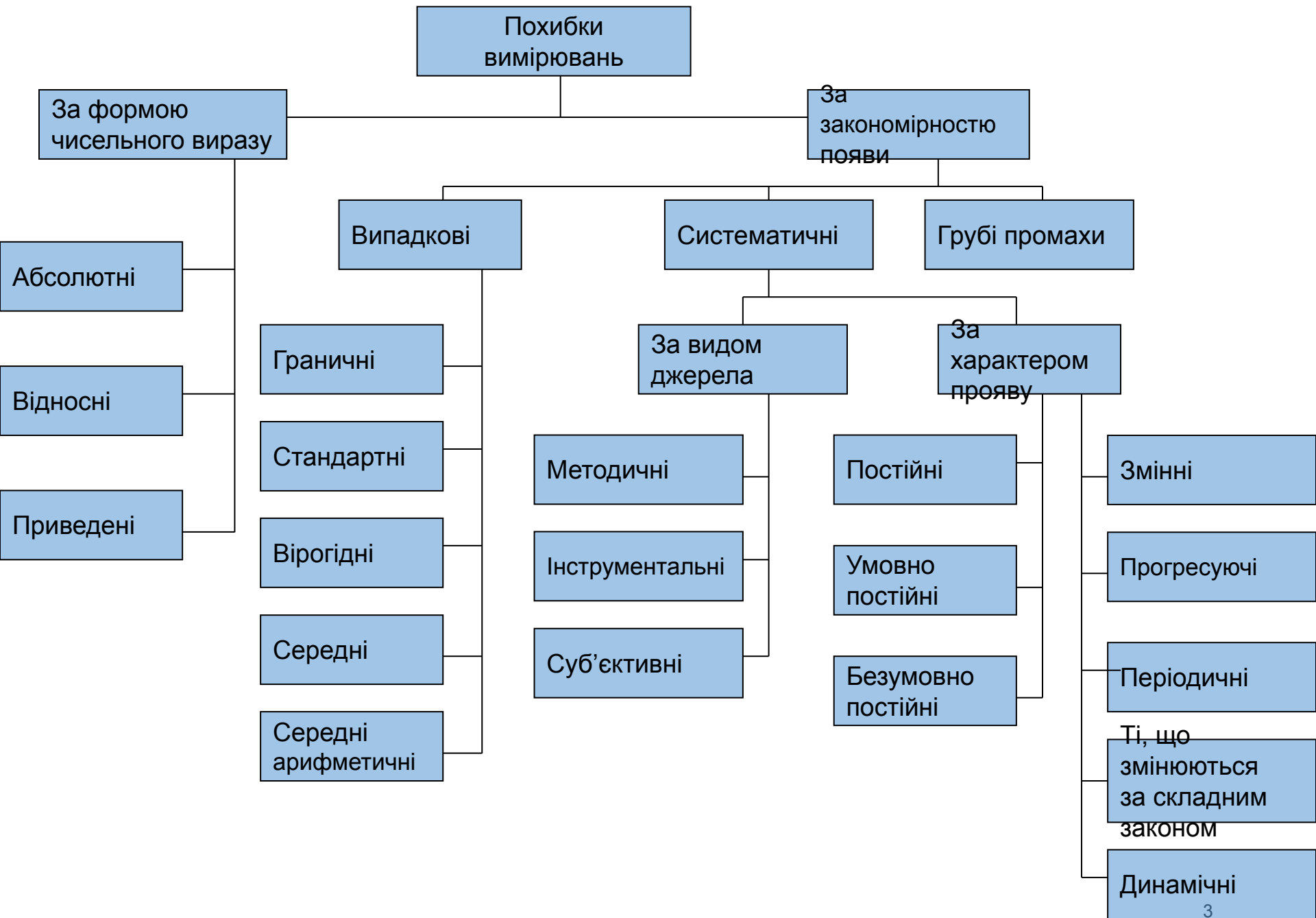
### План лекції:

1. Поняття похибки.
2. Класифікація похибок та їхнє описання.
3. Закономірності формування результату вимірювань.
4. Алгоритми обробки багатократних вимірювань.

# 1 Поняття похибки

- **Похибка результату вимірювання** — це відхилення результату вимірювань ( $X_{\text{изм}}$ ) від істинного (дійсного) значення ( $X_{\text{ист(действ)}}$ ) вимірюваної величини. Частіше всього вона вказує границі невизначеності значення вимірюваної величини.
- **Похибка засобу вимірювання** — це різниця між показом засобу вимірювання і істинним (дійсним) значенням вимірюваної фізичної величини. Вона характеризує точність результатів вимірювань, проведених даним засобом.

Ці два поняття близькі одне до одного і класифікуються за однаковими ознаками.



## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

*За формою представлення (способом виразу) :*

- *абсолютна похибка*, виражена в одиницях вимірюваної величини

$$\Delta X = X_{\text{нзм}} - X_{\text{ист(дійств)}}$$

- *відносна похибка* — відношення абсолютної похибки до істинного (дійсного) значення вимірюваної величини

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_{\text{ист(дійств)}}} = \frac{X_{\text{нзм}} - X_{\text{ист(дійств)}}}{X_{\text{ист(дійств)}}},$$

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

- *Похибка засобів вимірювань* обчислюється за формулою:

$$\Delta X_n = X_n - X_{\text{ист(дійств)}}$$

де  $X_n$  — показ приладу;  $X_{\text{ист(дійств)}}$  — істинне (дійсне) значення вимірюваної величини.

- *Приведена похибка ЗВ* — це відносна похибка, виражена відношенням абсолютної похибки засобу вимірювань до умовно прийнятого значення величини, постійної у всьому діапазоні вимірювань або в частині діапазону:

$$v = \pm \frac{\Delta X_n}{X_n} 100 \% .$$

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

- $X_n$  - нормоване значення.

Нормоване значення приладу найчастіше приймається рівним верхній межі вимірювань для даного засобу вимірювань (в разі, якщо нижня межа - нульове значення односторонньої шкали приладу). У разі двозначного відлікового пристрою (шкали) приладу нормоване значення віднесено до діапазону вимірювань.



## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

В якості істинного значення при багаторазових вимірах одного і того ж параметра використовують середнє арифметичне значення:

$$X_{\text{ист}} \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

де  $X_i$  — результат  $i$ -го одиничного визначення;  $n$  — число одиничних вимірювань в ряду.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

Величина  $X$ , отримана в одній серії вимірювань, є випадковим наближенням до  $X_{\text{ист}}$ . Для оцінки її можливих відхилень від  $X_{\text{ист}}$  визначають середнє квадратичне відхилення (СКВ) яке отримано з ряду рівноточних вимірювань.

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}$$



## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

- Для оцінки розсіювання одиничних результатів вимірювань в ряду рівноточних вимірювань однієї і тієї ж фізичної величини біля середнього їхнього значення використовують середньоквадратичне відхилення вимірювань (СКВ):

при  $n < 20$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

при  $n > 20$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

СКВ із серії вимірювань завжди менше, ніж в кожному окремому вимірі, це означає, що для підвищення точності вимірювань необхідно збільшувати число вимірювань.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

**За характером прояву похибки** поділяються на систематичні і випадкові.

- **Систематична похибка** — одна зі складових похибки результату вимірювання, залишається постійною або закономірно змінюється при повторних вимірах однієї і тієї ж фізичної величини.

**Величина систематичної похибки характеризує** другий показник якості – **правильність** отриманого результату: чим менше величина  $\Delta_{\text{сис}'}$ , тим правильніше отриманий результат.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

В залежності від характера вимірювання систематичні похибки поділяють на ***постійні, прогресуючі, періодичні і похибки, що змінюються за складним законом.***

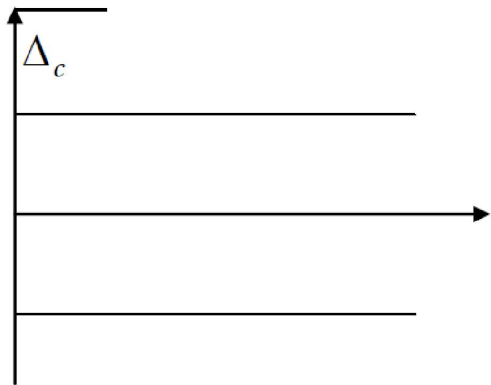
- ***Постійні похибки***, які зберігають своє значення протягом усього періоду виконання вимірювань. Ці похибки, як правило, легко можуть бути виявлені і враховані шляхом введення відповідних поправок в результат вимірювання.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

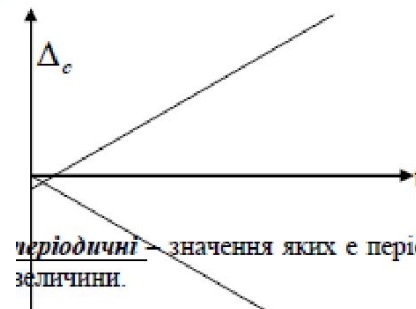
- **Прогресуючі похибки** — це безперервно зростаючі або спадаючі похибки. Вони викликаються процесами зношення або старіння вузлів і деталей засобів вимірювання. До них можуть відноситися похибки від зношення контактуючих деталей засобів вимірювання, старіння окремих елементів (конденсаторів, резисторів, тощо) засобів вимірювання.
- У ряді випадків похибки можуть змінюватися періодично в часі або при переміщенні покажчика вимірювального приладу. Такі **похибки називаються періодичними**. Зазвичай такі похибки зустрічаються в кутомірних приладах з круговою шкалою.

# 2 Класифікація похибок та їхнє описання

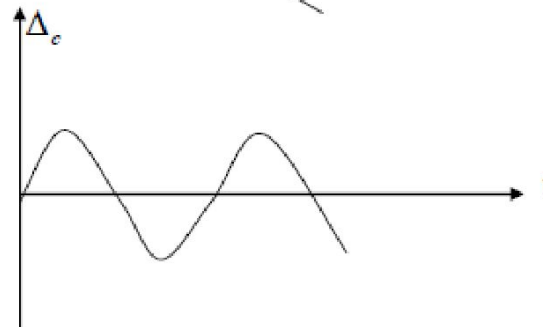
постійні – які є незмінними протягом всіх вимірювань



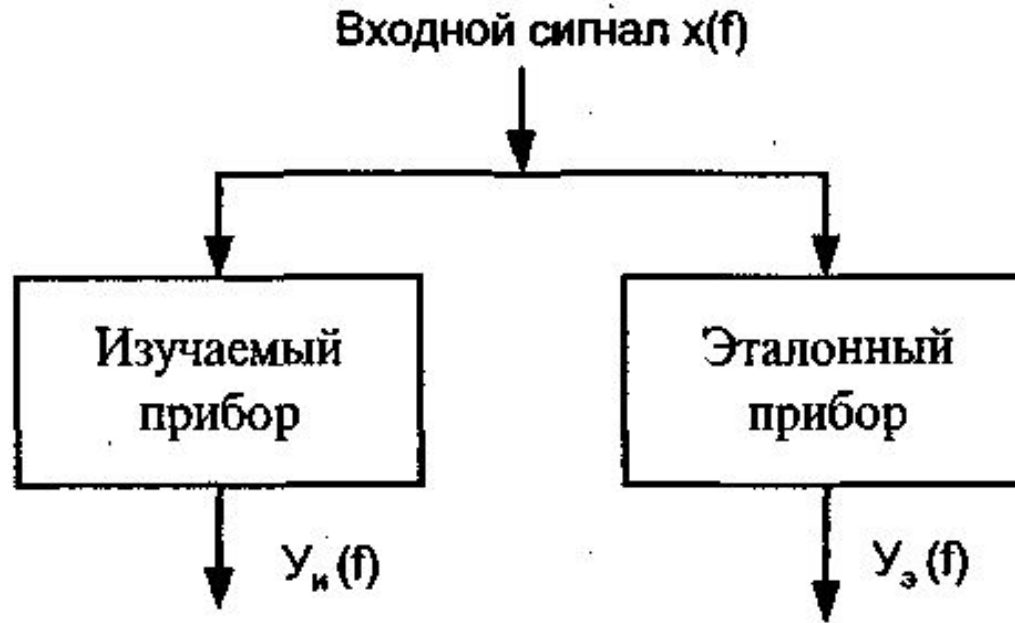
прогресивні – які в процесі вимірювання неперивно зростають або зменшуються



періодичні – значення яких є періодичними функціями часу, або самої вимірювальної величини.



## 2 Класифікація похибок та їхнє описання



$$\Delta_c = y_u - y_э,$$

де  $y_u$  — результат вимірювання досліджуваного приладу;  $y_э$  — результат вимірювання еталонного приладу.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

- **Випадковими** називаються похибки, що змінюються випадковим чином (по знаку і значенням) при однакових повторних вимірах однієї і тієї ж величини. Ці похибки виникають в результаті впливу на процес вимірювання численних випадкових факторів, врахувати які практично неможливо.



## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

Величина випадкової похибки  $\Delta_{сл}$  характеризує третій показник якості вимірювань – **збіжність результатів** при повторних вимірах одного і того ж значення вимірюваної ФВ, виконаних одним і тим же ЗВ, одним і тим же методом в однакових умовах і з однаковою ретельністю.

До випадкової похибки, як правило, відноситься і **промах** (груба похибка вимірювань), який характеризується тим, що похибка результату окремого вимірювання, що входить в ряд вимірювань, для даних умов різко відрізняється від інших результатів цього ряду.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

**За умовами проведення вимірювань похибки засобів вимірювань поділяються на основні і додаткові.**

- *Основною* називається похибка засобу вимірювань, що використовується в нормальних умовах. Ці умови встановлюються в нормативно-технічних документах на даний вид або тип засобів вимірювальної техніки (температура навколишнього середовища, вологість, тиск, напруга електричної мережі та ін.) І при них нормується його похибка.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

- Значення похибок засобів вимірювань, що експлуатуються в умовах, що відрізняються від нормальних, будуть різними і погано контрольованими. Складова похибки засобу вимірювань, що виникає додатково до основної похибки внаслідок відхилення будь-якої з впливаючих величин від нормального його значення або внаслідок її виходу за межі нормальної області значень, називається *додатковою похибкою*.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

У більшості нормативно-технічних документів на засоби вимірювань за нормальні значення приймаються наступні:

- температура оточуючого середовища  $(293 \pm 5)$  К;
- Відносна вологість  $(65 \pm 15)$  % ;
- Атмосферний тиск  $(100 \pm 4)$  кПа  $(750 \pm 30)$  мм рт. ст.);
- Напруга живлення електричної мережі  $(220 \pm 4,4)$  В з частотою  $(50 \pm 0,5)$  Гц.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

*За причиною виникнення похибки* поділяються на інструментальні, методичні і суб'єктивні.

- *Інструментальна похибка* обумовлена недосконалістю засобів вимірювань і їх конструктивними особливостями. Іноді цю похибку називають приладовою або апаратурною.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

- *Методична похибка* обумовлена недосконалістю і недоліками застосовуваного в засобі вимірювань методу вимірювань і спрощень при розробці конструкції засобу вимірювань, а також можливими недоліками методик вимірювань.
- *Суб'єктивна (особистісна) похибка* вимірювань обумовлена похибкою відліку оператором показань за шкалою засобу вимірювань внаслідок індивідуальних особливостей оператора (увага, зір, підготовка та ін.). Ці похибки практично відсутні при використанні автоматичних або автоматизованих засобів вимірювань.

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

*За характером вимірювання фізичної величини* похибки засобів вимірювань поділяються на **статичні і динамічні.**

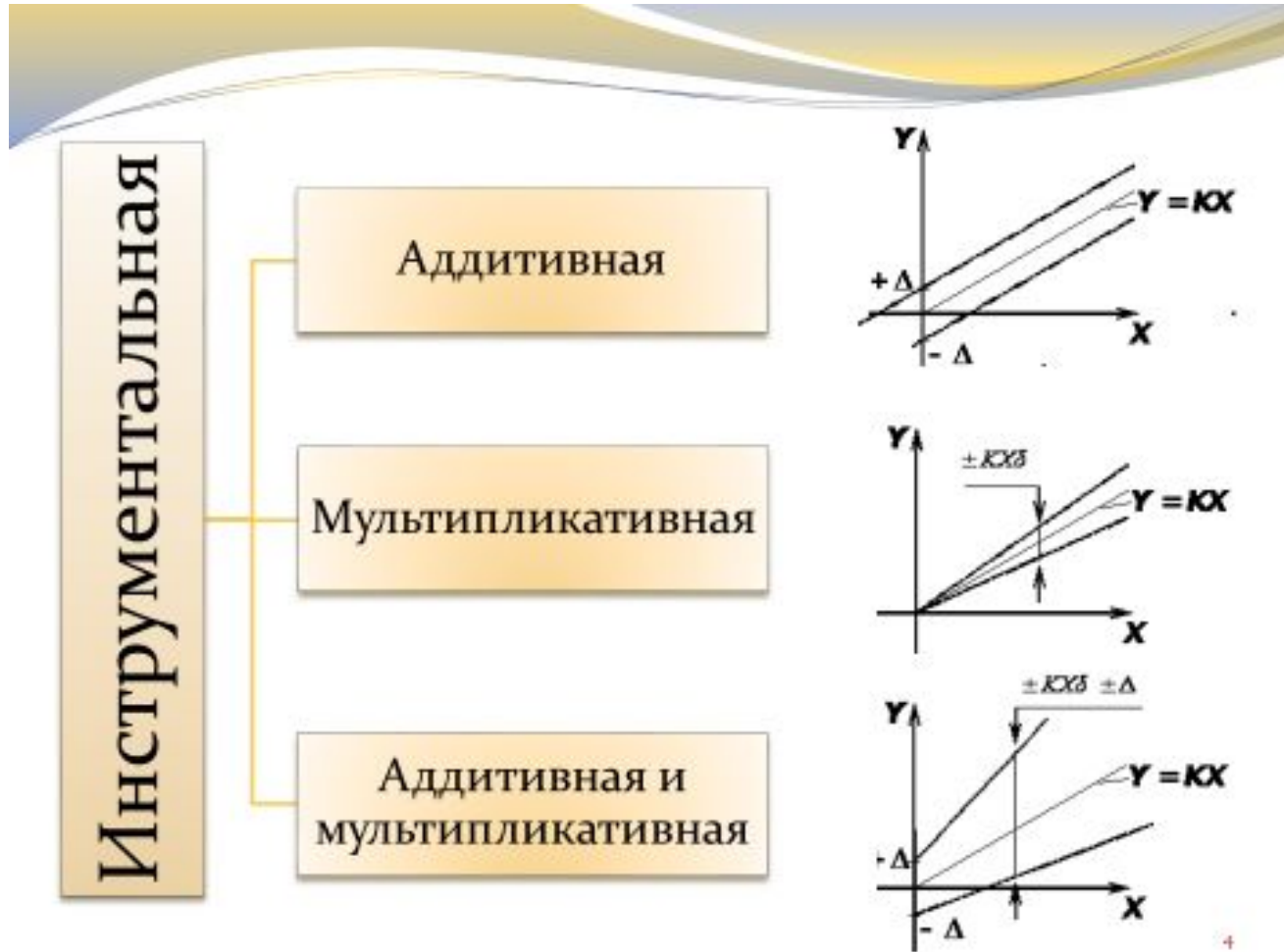
- Похибка засобу вимірювань, що застосовується при вимірюванні фізичної величини, яка за час вимірювань не змінюється, носить назву **статичної похибки.**
- А похибка, що виникає при вимірюванні фізичної величини, що змінюється — **динамічної похибки.**

## 2 Класифікація похибок та їхнє описання

*За характером залежності від вимірюваної величини  $X$  розрізняють похибки адитивні – не залежать від  $X$  (тобто  $\Delta X = \text{const}$  для будь-яких значень  $X$  в межах діапазону вимірювань) і мультиплікативні – лінійно або нелінійно залежні від  $X$  (в цьому випадку  $\Delta X = f(X)$ ).*



# 2 Класифікація похибок та їхнє описання



# 3. Закономірності формування результату вимірювань

*Правила підсумовування складових похибки.*

- *Визначення сумарної систематичної похибки.*

$$\Delta X_{\text{сис}} = \sum_{i=1}^n \Delta X_{\text{сис } i}$$

Межі сумарної систематичної похибки визначають, задавши бажаний рівень довірчої ймовірності  $P$  за формулою:

$$\Delta X_{\text{сис}} = \sum_{i=1}^n \Delta X_{\text{сис } i}$$

# 3. Закономірності формування результату вимірювань

Коефіцієнт  $K_p$  залежить від довірчої ймовірності  $P$  і від числа складових, що підсумовуються. На практиці використовуються усереднене значення коефіцієнта:

$P$	0,9	0,95	0,98	0,99
$K_p$	0,95	1,1	1,3	1,4

# 3. Закономірності формування результату вимірювань

- Визначення сумарної випадкової складової похибки. (У тому випадку, коли є кілька незалежних причин, що викликають випадкову похибку, причому кожна складова, в загальному випадку, може мати свій закон розподілу).

Якщо складові випадкової похибки відомі і характеризуються СКВ (середнім квадратичним відхиленням)  $S_i$ , то сумарне СКВ:

При незалежних складових

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2}$$

При наявності кореляції

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2 + 2 \sum_{i < j} S_i S_j r_{ij}}$$

# 3. Закономірності формування результату вимірювань

- Визначення загальної похибки результату вимірювань з урахуванням сумарної систематичної і суммарної випадкової складових похибки.

1 Якщо відношення

$$\frac{\Theta_{\Sigma}}{S_{\Sigma}} < 0.8$$

$$\Theta_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Theta_i^2}$$

де  $\Theta_i$  – не виключені залишки систематичних похибок або - сумарна СКП

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2}$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i \approx j} \rho_{ij} S_i S_j}$$

### 3. Закономірності формування результату вимірювань

то невиключеними систематичними похибками *нехтують* і в якості границь загальної похибки приймають границі довірчого інтервалу випадкової похибки:

$$\Delta_{\text{общ}} = \pm \Delta_{\text{случ}} = \pm t_p S_{\Sigma}$$

где  $t_p$  – коефіцієнт Стюдента,  
 $S_{\Sigma}$  – суммарная СКП.

### 3. Закономірності формування результату вимірювань

$$\Delta X_{\text{СИС}} = \sum_{i=1}^n \Delta X_{\text{СИС } i}$$

$$\Delta_{\text{общ}} = \pm \Theta_{\Sigma(\Delta_{\text{дов}})}$$

### 3. Закономірності формування результату вимірювань

$$\Delta X_{\text{СИС}} = \sum_{i=1}^n \Delta X_{\text{СИС } i}$$



# 3. Закономірності формування результату вимірювань

## *Правила округлення значення похибки і записи результату вимірювань.*

Похибка результату вимірів дозволяє визначити ті цифри результату, які є достовірними. В метрології існують такі правила:

- 1. Похибка результату вимірювання вказується двома значущими цифрами, якщо перша з них 3 або менше, і однією - якщо перша цифра 4 і більше. Цих правил слід дотримуватися тільки при округленні розрахункового значення похибки. Значущими цифрами числа вважаються всі цифри від першої зліва, яка не дорівнює нулю, до останньої праворуч цифри, при цьому нулі, записані у вигляді множника  $10^n$ , не враховуються.*

### 3. Закономірності формування результату вимірювань

2. *Результат вимірювання округлюється до того ж десяткового розряду, яким закінчується округлене значення абсолютної похибки.*

(Наприклад, результат 85,6342, похибка  $\pm 0,01$ . Результат округлюють до 85,63. Той же результат при похибці в межах  $\pm 0,015$  слід округлити до 85,634).

2. *Округлення проводиться лише в остаточній відповіді, а всі попередні обчислення проводять з одним - двома зайвими знаками.*

# 3. Закономірності формування результату вимірювань

4. Округлення слід виконувати відразу до бажаного числа значущих цифр, поетапне округлення призводить до помилок.
- Зайві цифри в цілих числах замінюють нулями, а в десяткових дробах відкидають. (Наприклад, число 165 245 при збереженні чотирьох значущих цифр округлюють до 165 200, а число 165,245 - до 165,2.)
  - Якщо десятковий дріб закінчується нулями, вони відкидаються тільки до розряду, який відповідає розряду похибки. (Наприклад, результат вимірювань 235,200, похибка  $\pm 0,05$ . Результат округлюють до 235,20. Той же результат при похибці в межах  $\pm 0,015$  слід округлити до 235,200.)

# 3. Закономірності формування результату

- **Вимірювань** Якщо перша (раховуючи зліва направо) з тих, що замінюються нулями або відкидаються цифр менше 5, то цифри залишаються незмінними.

Якщо перша з цих цифр дорівнює 5, а за нею не йдуть слідом жодні цифри, або йдуть нулі, то, якщо остання цифра в округлюваному числі парна або нуль, вона залишається без зміни, якщо непарна - збільшується на одиницю. (Наприклад, число 1234,50 округлюють до 1234, а число 8765,50 - до 8766.)

Якщо перша з замінюваних нулями або відкиданих цифр більше 5 або дорівнює 5, але за нею слідує значуща цифра, *то остання цифра, що залишається, збільшується на одиницю.* (Наприклад, число 6783,6 при збереженні чотирьох значущих цифр округлюють до 6784, а число 12,34520 — до 12,35.)

# 3. Закономірності формування результату вимірювань

- Особливо уважно слід відноситися до запису результату вимірювання без зазначення похибки, оскільки записи результату  $2,4 \cdot 10^3$  В і 2400 В *не є тотожними*. Перший запис означає, *що вірними є цифри тисяч і сотень вольт і істинне значення може знаходитися в інтервалі від 2,351 кВ до 2,449 кВ (оскільки розрахункові значення 2,351 і 2,449 будуть округлені до 2,4)*. Запис 2400 означає, *що вірними є і одиниці вольт*, відповідно, істинне значення напруги може знаходитися в інтервалі від 2399,51 В до 2400,49 В (оскільки в обох випадках результат буде округлений до 2400 В).

# 4 Алгоритми обробки багатократних вимірювань

## Алгоритм обробки прямих багатократних вимірювань

- виправляють результати спостережень виключенням систематичної похибки;
- обчислюють середнє арифметичне значення за формулою:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- обчислюють вибіркоче СКВ від значення похибки вимірювань за формулою:

$$\Delta X_{\text{СИС}} = \sum_{i=1}^n \Delta X_{\text{СИС } i}$$

# 4 Алгоритми обробки багатократних вимірювань

- виключають промахи;
- визначають закон розподілу випадкової складової;
- при заданому значенні довірчої ймовірності  $P$  і числі вимірювань  $n$  за таблицями визначають коефіцієнт Стьюдента;
- знаходять межі довірчого інтервалу для випадкової похибки;

$$\Delta_{\text{случ}} = \pm t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

# 4 Алгоритми обробки багатократних вимірювань

- Якщо величина  $\Delta_{\text{случ}}$  порівняна з абсолютним значенням похибки ЗВ  $\Delta_{\text{ЗВ}}$ , то величину вважають невиключеною систематичною складовою і в якості довірчого інтервалу обчислюють величину

$$\Delta_{\Sigma} = \sqrt{\Delta_{\text{случ}}^2 + \frac{1.96}{3} \Delta_{\text{ЗВ}}^2} = \sqrt{\Delta_{\text{случ}}^2 + \frac{1.96}{3} \Delta_{\text{ЗВ}}^2}$$



# 4 Алгоритми обробки багатократних вимірювань

- або за спрощеною формулою,

$$\Delta_{\Sigma} = \sqrt{\Theta^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

де  $\Theta$  границі невиключеної складової похибки;

- кінцевий результат записують у вигляді

$$\bar{X} = X \pm \Delta_{\Sigma} \quad \text{при ймовірності } P.$$