

# Представление графов. Топологическая сортировка

## Лекция 7

Дополнительно:

Чурина, Татьяна Геннадьевна Методы программирования : алгоритмы и структуры данных : учебное пособие : [для студентов физико-математических специальностей вузов] / Т.Г. Чурина, Т.В. Нестеренко ; М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Фак. информ. технологий, Каф. систем информатики Новосибирск : Редакционно-издательский центр НГУ, 2014-; 20 см. Ч.3: Динамические структуры данных, алгоритмы на графах 2014 214 с. : ил. Библиогр.: с.214 (12 назв.) ISBN 978-5-4437-0278-0

Стр. 34-44

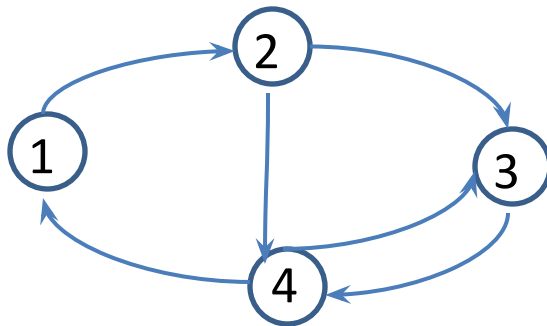
Электронная версия:

<http://e-lib.nsu.ru/dsweb/Get/Resource-719/page001.pdf>

# Матрица смежностей

Пусть дан граф  $G = (V, E)$ ,  $N = |V|$ ,  $M = |E|$ .

**Матрица смежностей** для графа  $G$  – это матрица  $A$  размера  $N \times N$ , состоящая из 0 и 1, в которой  $A[i, j] = 1$  тогда и только тогда, когда есть ребро из узла  $i$  в узел  $j$ .

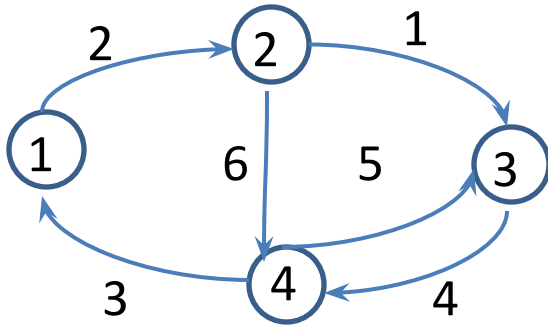


	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	1	0	1	0

# Матрица инцидентностей

*Матрица инцидентностей* для графа  $G$  – это матрица  $B$  размера  $N \times M$ , в которой :

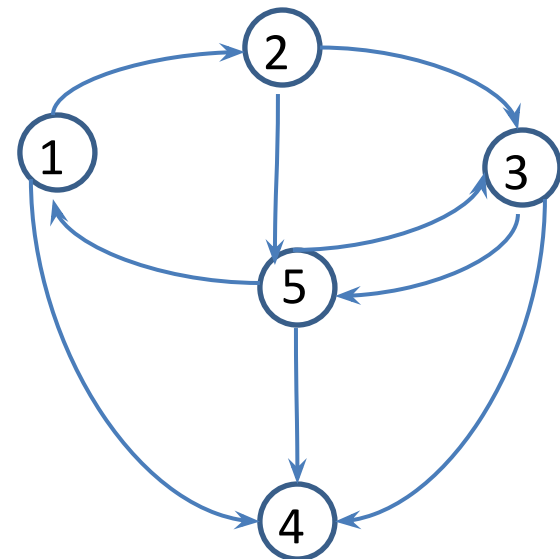
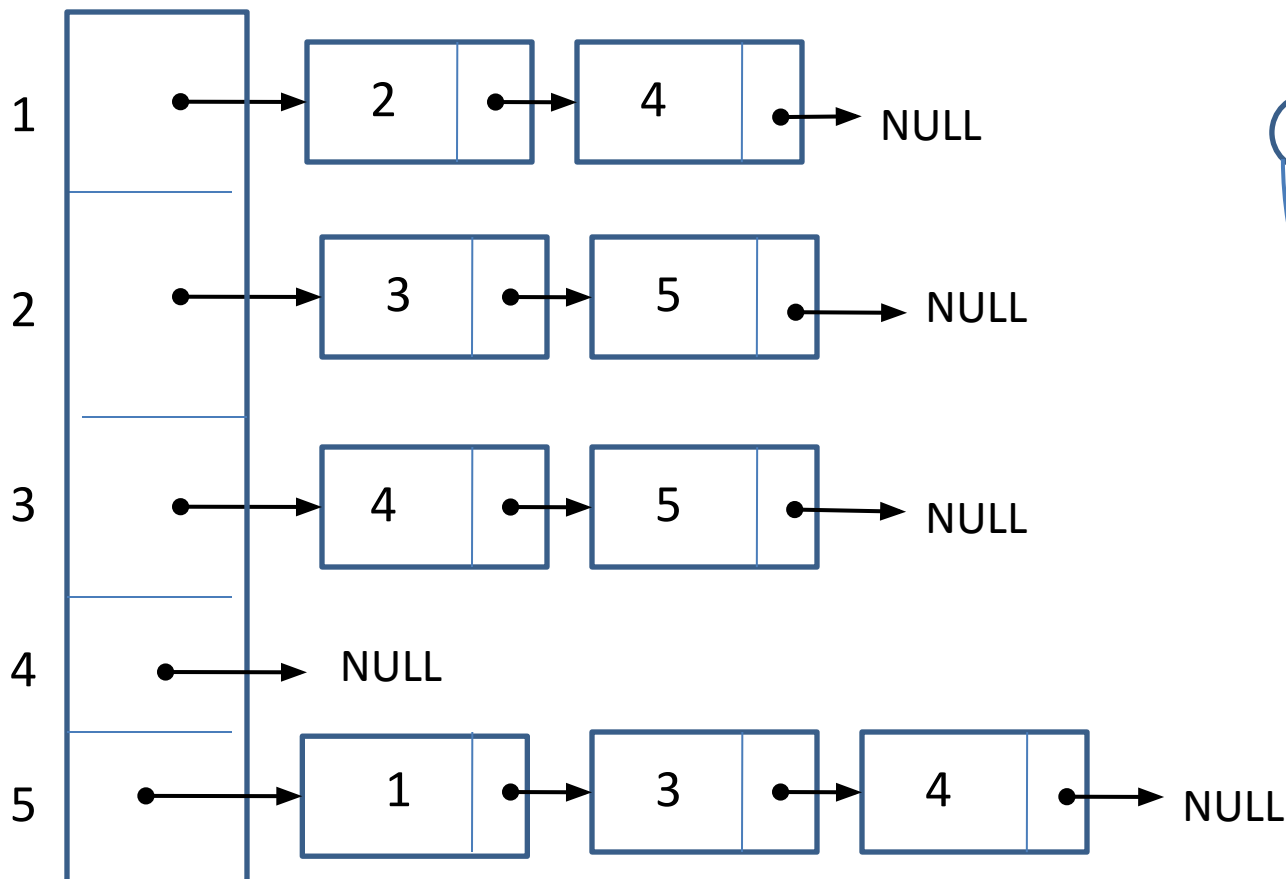
$B[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } j \text{ инцидентно} \\ & \text{вершине } i, \\ -1, & \text{если ребро } j \text{ входит в вершину } i, \\ 0, & \text{если ребро } j \text{ не связано с вершиной } i. \end{cases}$



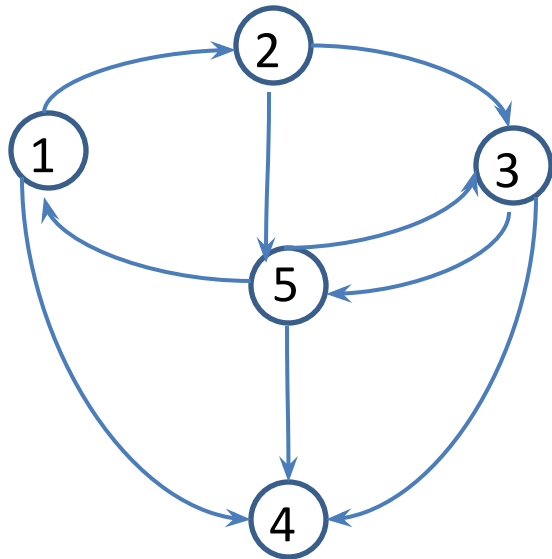
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	-1	0	0	0
2	1	-1	0	0	0	1
3	-1	0	0	1	-1	0
4	0	0	1	-1	1	-1

# Списки смежностей

*Списком смежностей* для узла  $v$  называется список всех узлов  $w$ , смежных с  $v$ .



# Табличное представление списков смежностей



Номер  
вершин  
ы Следующи  
й

1	1	6
2	2	8
3	3	10
4	4	0
5	5	12
6	2	7
7	4	0
8	3	9
9	5	0
10	4	11
11	5	0
12	1	13
13	3	14
14	4	0

# Топологическая сортировка

**Определение.** *Частичным порядком* на множестве  $A$  называется отношение  $R$ , определенное на  $A$  и такое, что

- $R$  транзитивно,
- для всех  $a \in A$  утверждение  $aRa$  ложно, т.е. отношение  $R$  иррефлексивно.

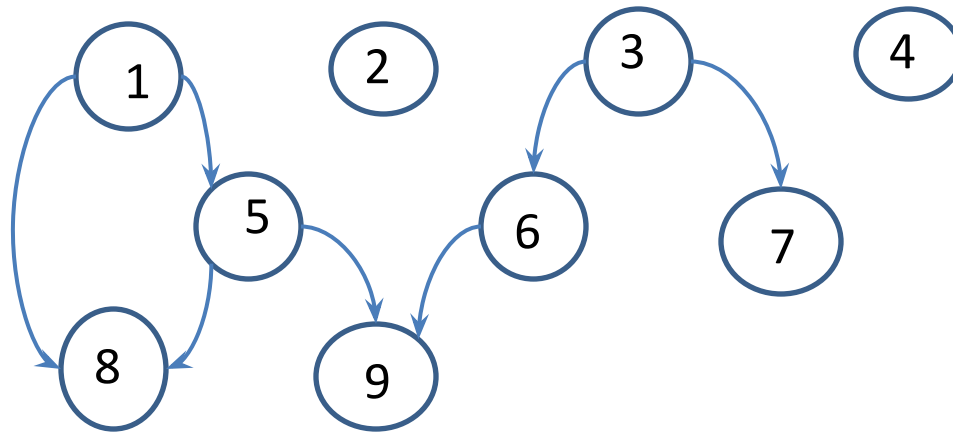
Из свойств (1) и (2) следует, что если  $aRb$  истинно, то  $bRa$  ложно (асимметричность).

## Примеры частичного порядка:

- решение большой задачи разбивается на ряд подзадач, над которыми установлен частичный порядок: без решения одной задачи нельзя решить несколько других;
- последовательность чтения курсов в учебных программах: один курс основывается на другом;
- выполнение работ: одну работу следует выполнить раньше другой.

Если  $R$  — частичный порядок на множестве  $A$ , то  $(A, R)$  — ациклический граф.

Если  $(A, R')$  — ациклический граф и  $R'$  — отношение "являться потомком", определенное на  $A$ , то  $R'$  — частичный порядок на  $A$ .





**Определение.** *Линейный порядок*  $R$  на множестве  $A$  — это такой частичный порядок, что если  $a$  и  $b$  принадлежат  $A$ , то либо  $aRb$ , либо  $bRa$ , либо  $a = b$ .

Если  $A$  — конечное множество, то линейный порядок  $R$  удобно представлять, считая все элементы множества  $A$  расположенными в виде последовательности

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

для которой имеет место  $a_i R a_j$  тогда и только тогда, когда  $i < j$ .

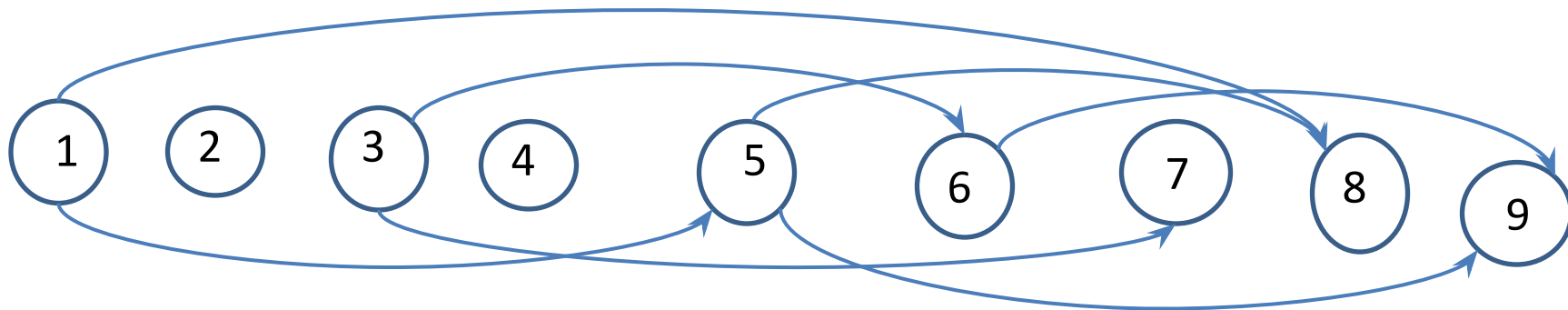
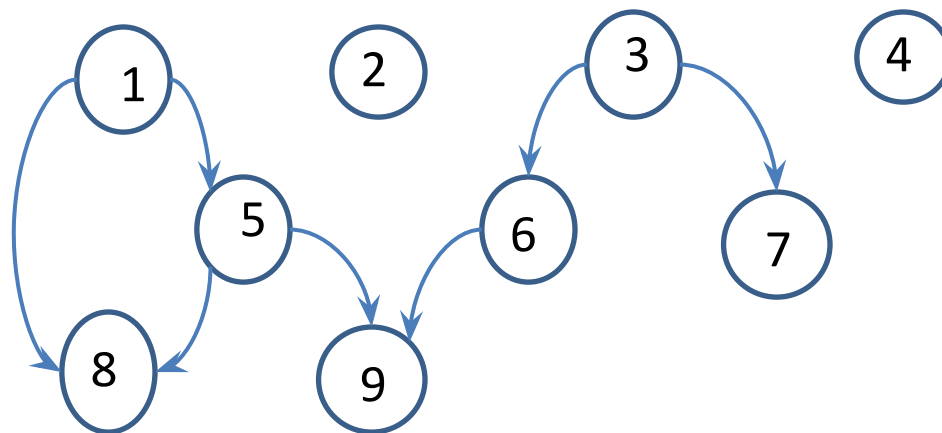
Если задан частичный порядок  $R$  на множестве  $A$ , часто бывает нужен линейный порядок, содержащий этот частичный порядок.

Эта проблема вложения частичного порядка в линейный называется *топологической сортировкой*.

Формально можно сказать, что *частичный порядок  $R$  на множестве  $A$  вложен в линейный порядок  $R'$* , если  $R'$  — линейный порядок и  $R \subseteq R'$ , т. е.  $aRb$  влечет  $aR'b$  для всех  $a$  и  $b$  из  $A$ .

# Топологическая сортировка.

## Пример



# Алгоритм. Топологическая сортировка

*Вход.* Частичный порядок  $R$  на конечном множестве  $A$ .

*Выход.* Линейный порядок  $R'$  на  $A$ , для которого  $R \subseteq R'$ .

*Метод.* Так как  $A$  — конечное множество, линейный порядок  $R'$  на  $A$  можно представить в виде списка  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , для которого

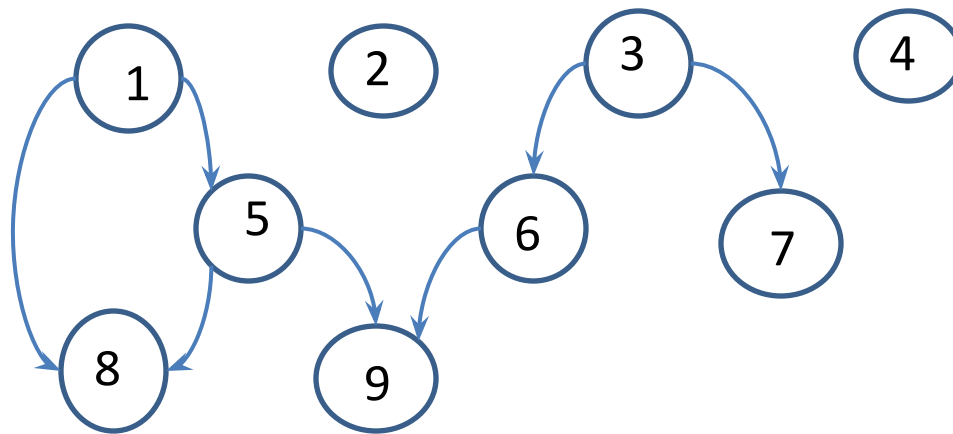
$a_i R' a_j$  если  $i < j$ , и  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

Эта последовательность элементов строится с помощью следующих шагов:

- (1) Положить  $i=1$ ,  $A_i=A$  и  $R_i=R$ .
- (2) Если  $A_i$  пусто, остановиться и выдать  $a_1, \dots, a_i$  в качестве искомого линейного порядка. В противном случае выбрать в  $A_i$  такой элемент  $a_{i+1}$  что  $a' R a_{i+1}$  ложно для всех  $a' \in A_i$ .
- (3) Положить  $A_{i+1} = A_i \setminus \{a_{i+1}\}$  и  $R_{i+1} = R_i \setminus (\{a_{i+1}\} \times A_{i+1})$ . Затем увеличить  $i$  на единицу и повторить шаг 2.

# Топологическая сортировка.

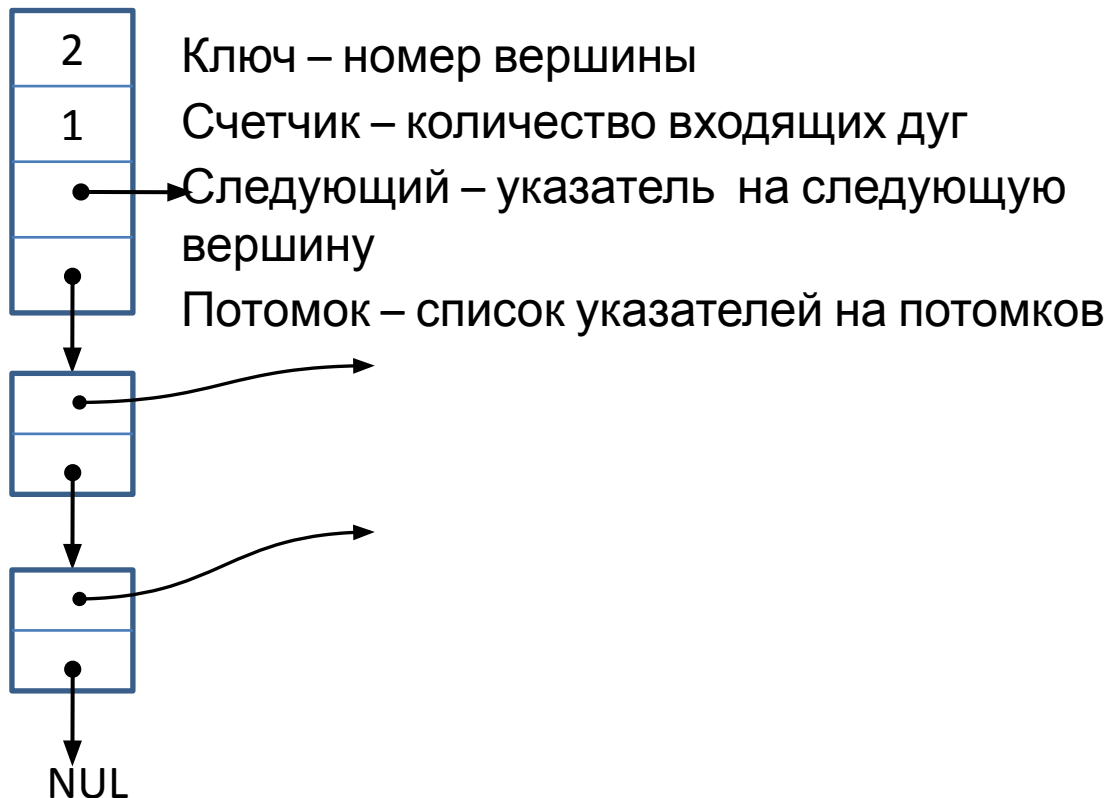
## Пример





# Топологическая сортировка. Реализация на иерархических списках

Элемент списка вершин графа:



1 < 2; Работа алгоритма(построение)

2 < 5;

4 < 1;

2 < 6;

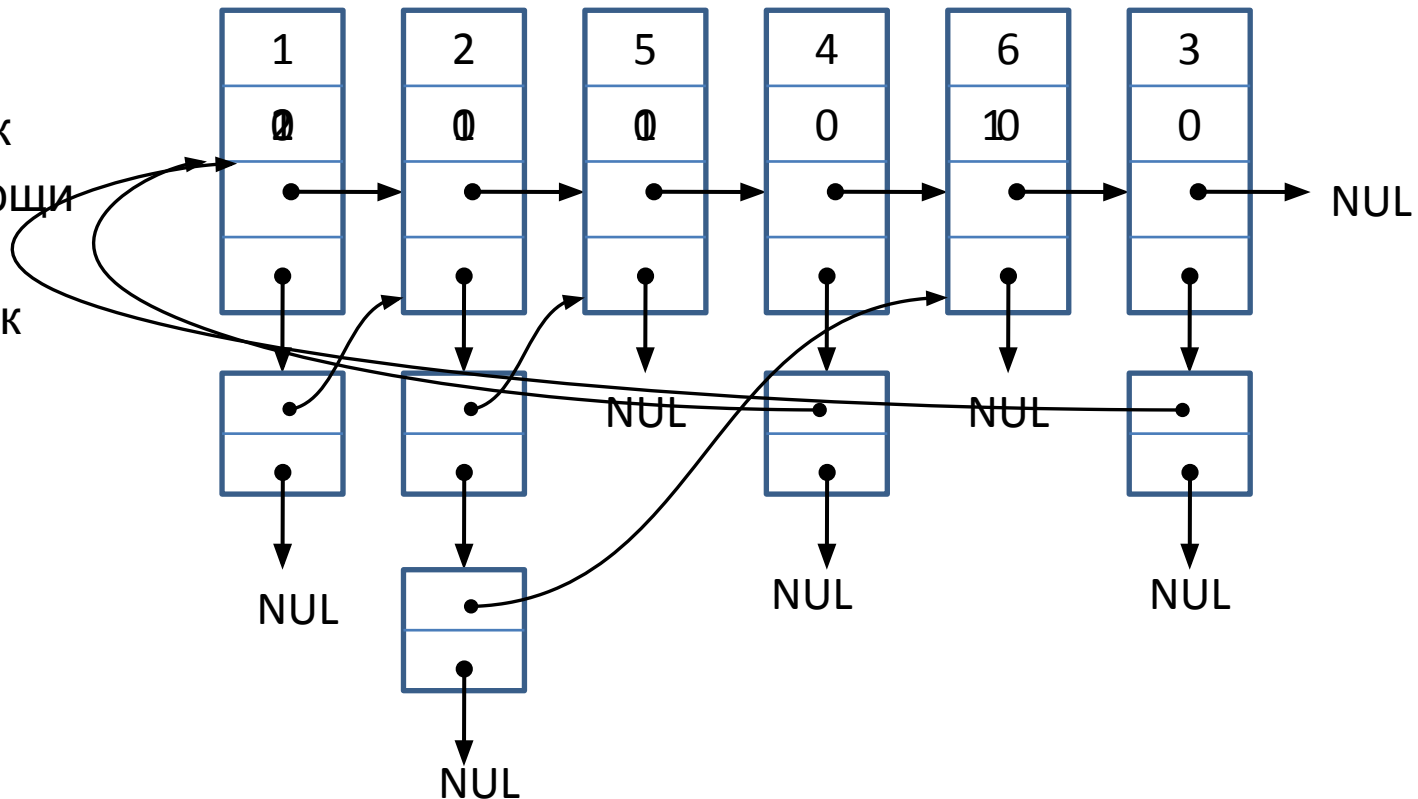
3 < 1;

Ключ

Счетчик

Следующий

Потомок





# Работа алгоритма (перестройка списка)

