Представление графов. Топологическая сортировка

Лекция 7

Дополнительно:

Чурина, Татьяна Геннадьевна Методы программирования : алгоритмы и структуры данных : учебное пособие : [для студентов физико-математических специальностей вузов] / Т.Г. Чурина, Т.В. Нестеренко ; М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Фак. информ. технологий, Каф. систем информатики Новосибирск : Редакционно-издательский центр НГУ, 2014-; 20 см. Ч.3: Динамические структуры данных, алгоритмы на графах 2014 214 с. : ил. Библиогр.: с.214 (12 назв.) ISBN 978-5-4437-0278-0

Стр. 34-44

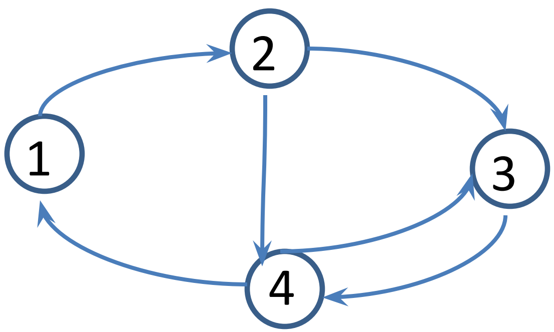
Электронная версия:

http://e-lib.nsu.ru/dsweb/Get/Resource-719/page001.pdf

Матрица смежностей

Пусть дан граф $G = (V,E)$, $N = |V|$, $M = |E|$.

Матрица смежностей для графа G – это матрица A размера NxN, состоящая из 0 и 1, в которой $A[i, j]=1$ тогда и только тогда, когда есть ребро из узла i в узел j.

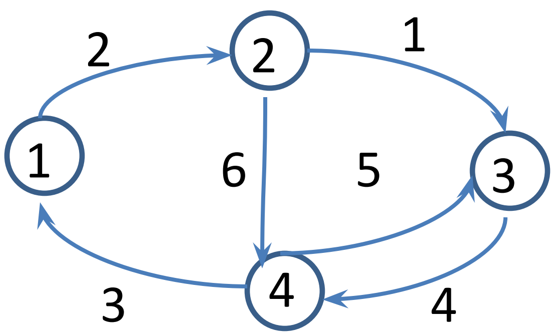


	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	1	0	1	0

Матрица инцидентностей

Матрица инцидентностей для графа G – это матрица *B* размера *N*x*M*, в которой :

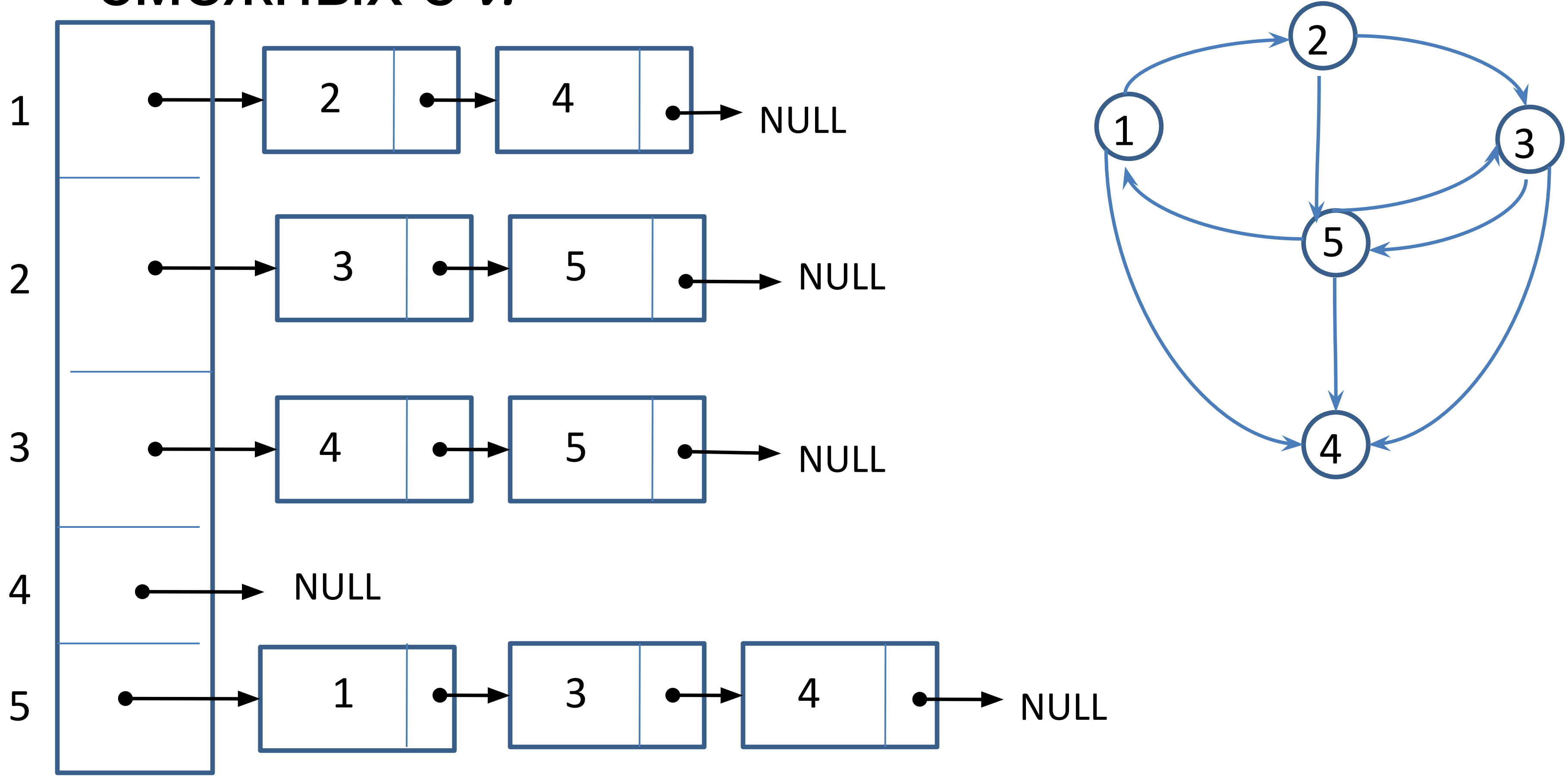
$B[i, j]=$
- 1, если ребро j инцидентно вершине *i*,
- -1, если ребро j входит в вершину *i*,
- 0, если ребро j не связано с вершиной *i*.



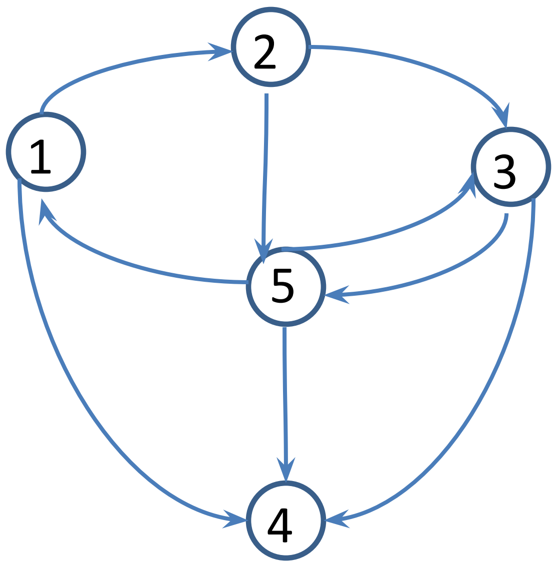
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	-1	0	0	0
2	1	-1	0	0	0	1
3	-1	0	0	1	-1	0
4	0	0	1	-1	1	-1

Списки смежностей

Списком смежностей для узла *v* называется список всех узлов *w*, смежных с *v*.



Табличное представление списков смежностей



	Номер вершины	Следующий
1	1	6
2	2	8
3	3	10
4	4	0
5	5	12
6	2	7
7	4	0
8	3	9
9	5	0
10	4	11
11	5	0
12	1	13
13	3	14
14	4	0

Топологическая сортировка

Определение. *Частичным порядком* на множестве *A* называется отношение *R*, определенное на *A* и такое, что

- *R* транзитивно,
- для всех $a \in A$ утверждение *aRa* ложно, т.е. отношение *R* иррефлексивно.

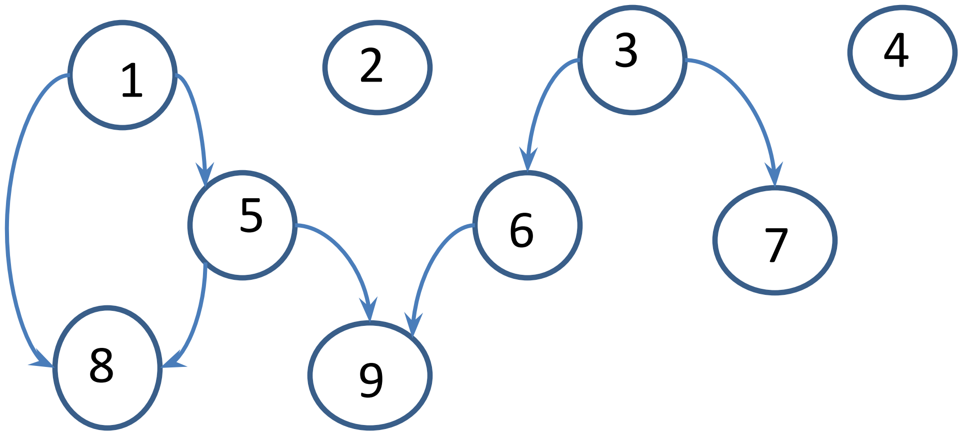
Из свойств (1) и (2) следует, что если *aRb* истинно, то *bRa* ложно (асимметричность).

Примеры частичного порядка:

- решение большой задачи разбивается на ряд подзадач, над которыми установлен частичный порядок: без решения одной задачи нельзя решить несколько других;
- последовательность чтения курсов в учебных программах: один курс основывается на другом;
- выполнение работ: одну работу следует выполнить раньше другой.

Если R — частичный порядок на множестве A, то (A, R) — ациклический граф.

Если (A, R') — ациклический граф и R' — отношение "являться потомком", определенное на A, то R' — частичный порядок на A.



Определение. *Линейный порядок* R на множестве A — это такой частичный порядок, что если a и b принадлежат A, то либо aRb, либо bRa, либо $a = b$.

Если A — конечное множество, то линейный порядок R удобно представлять , считая все элементы множества A расположенными в виде последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

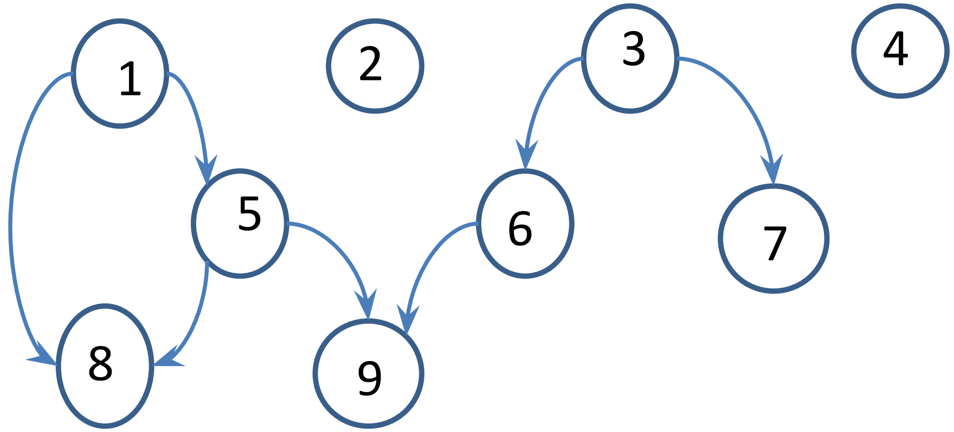
для которой имеет место $a_i R a_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$.

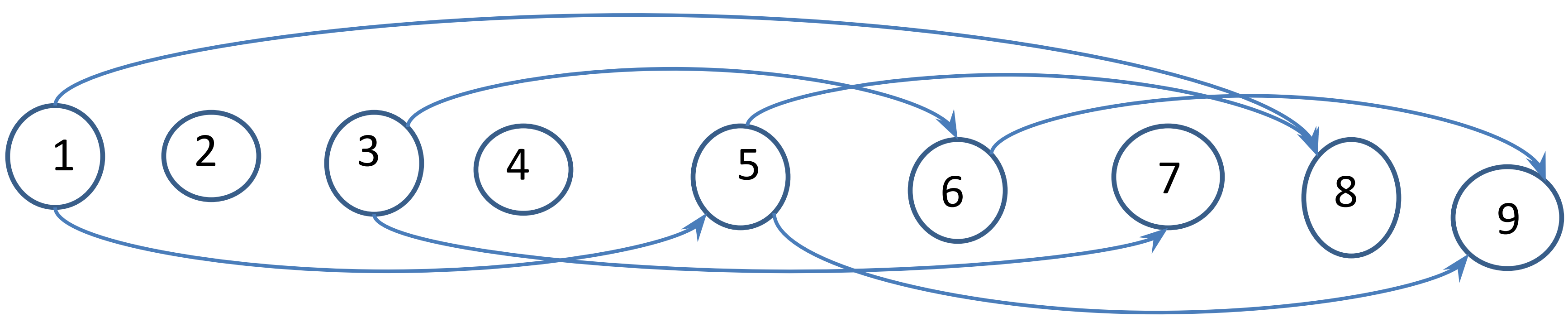
Если задан частичный порядок *R* на множестве *A*, часто бывает нужен линейный порядок, содержащий этот частичный порядок.

Эта проблема вложения частичного порядка в линейный называется *топологической сортировкой.*

Формально можно сказать, что
частичный порядок *R* на множестве *A*
вложен в линейный порядок *R'*,
если *R*' — линейный порядок и $R \subseteq R'$,
т. е. *aRb* влечет *aR'b* для всех а и *b* из *A.*

Топологическая сортировка. Пример





Алгоритм. Топологическая сортировка

Вход. Частичный порядок R на конечном множестве A.
Выход. Линейный порядок R' на A, *для* которого $R \subseteq R'$.

Метод. Так как A — конечное множество, линейный порядок R' на A можно представить в виде списка $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которого

$a_i\ R'\ a_j$, если $i < j$, и $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

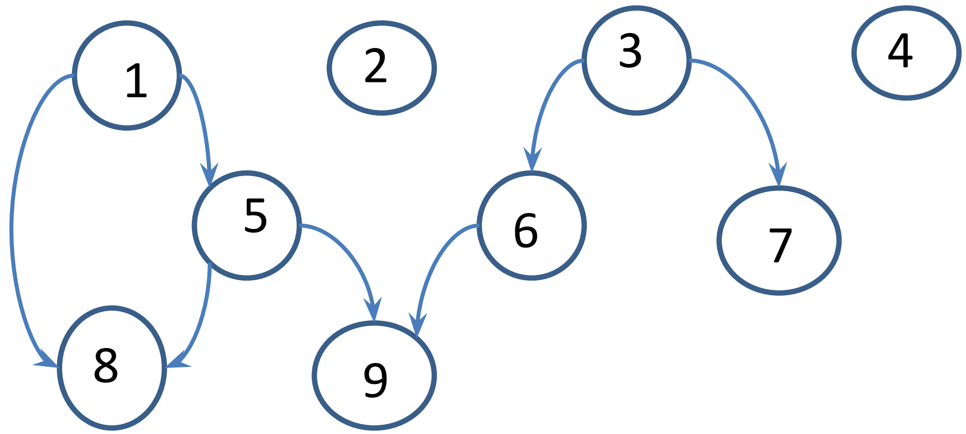
Эта последовательность элементов строится с помощью следующих шагов:

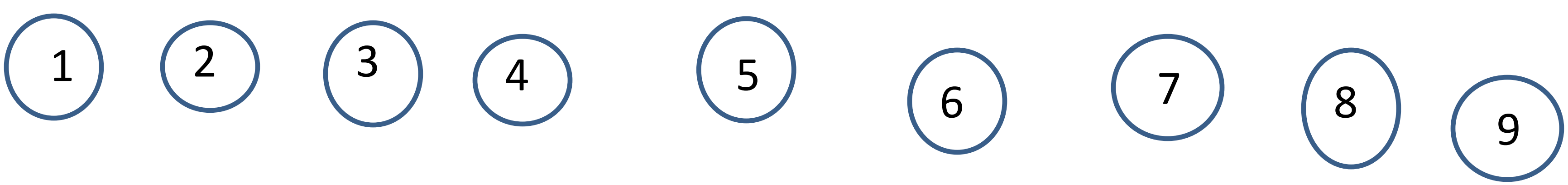
(1) Положить i=1, A_i=A и R_i=R.

(2) Если A_i пусто, остановиться и выдать $a_1, \ldots, a_i$, в качестве искомого линейного порядка. В противном случае выбрать в A_i такой элемент a_{i+1} что $a'\ R\ a_{i+1}$, ложно для всех $a' \in A_i$.

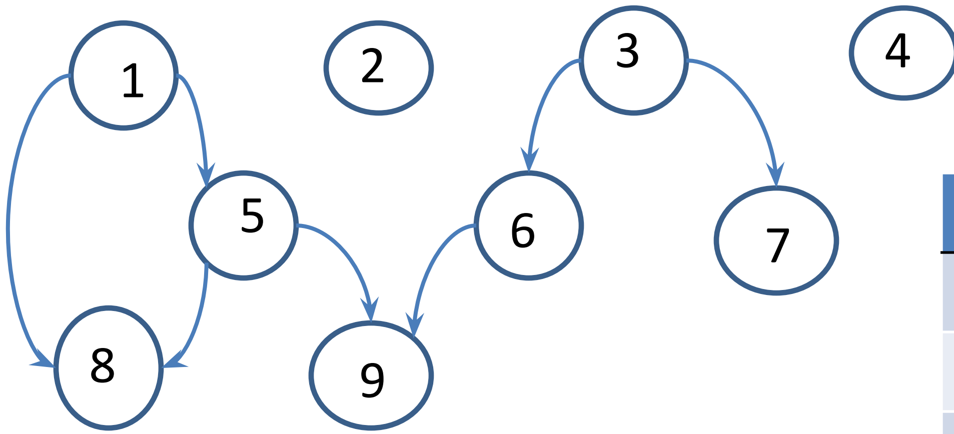
(3) Положить $A_{i+1} = A_i \setminus \{a_{i+1}\}$ и $R_{i+1} = R_i \setminus (\{a_{i+1}\} \times A_{i+1})$. Затем увеличить i на единицу и повторить шаг 2.

Топологическая сортировка. Пример





Топологическая сортировка. Реализация на матрице смежности

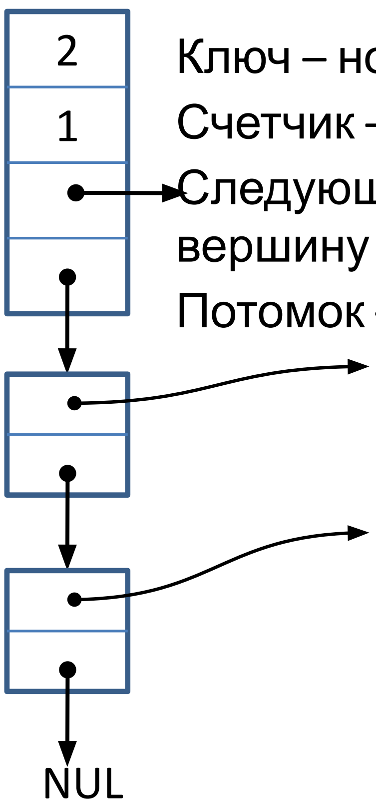


	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1. Найти вершину, в которую не входит ни одна дуга (это нулевой столбец).
   Удалить все выходящие из нее дуги (обнулить соответствующую строку)
2. Пока не перебрали все вершины, повторять шаг 1.

Топологическая сортировка. Реализация на иерархических списках

Элемент списка вершин графа:



Ключ – номер вершины

Счетчик – количество входящих дуг

Следующий – указатель на следующую вершину

Потомок – список указателей на потомков

Работа алгоритма(построение)

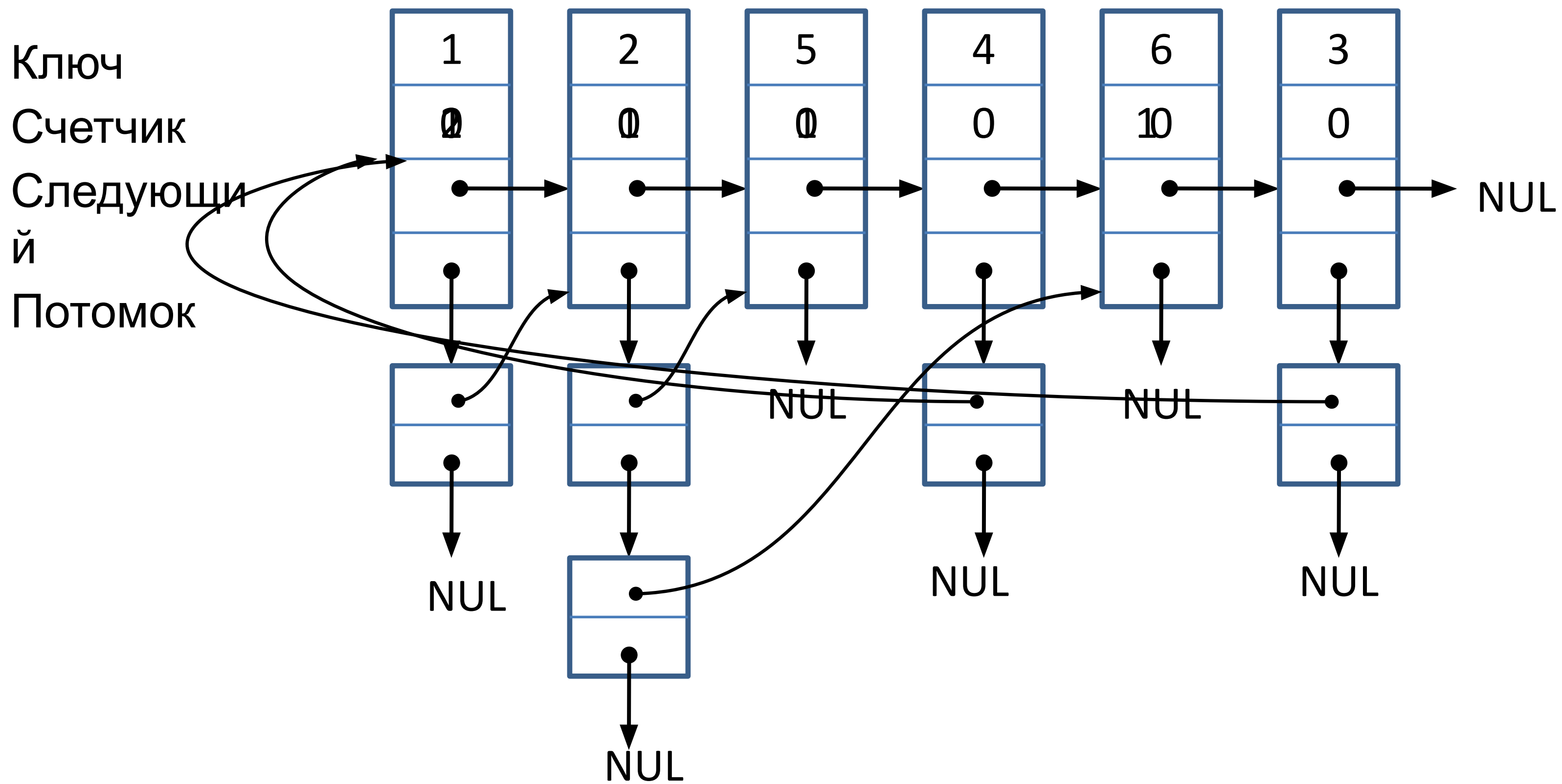
1< 2;

2< 5;

4 < 1;

2 < 6;

3 < 1;



Работа алгоритма (перестройка списка)