

Алгоритмизация и программирование. Язык C++

§ 38. Целочисленные алгоритмы

Решето Эратосфена



Эратосфен Киренский
(Eratosthenes, Ερατοσθένης)
(ок. 275-194 до н.э.)

Алгоритм:

- 1) начать с $k = 2$
- 2) «выколоть» все числа через k , начиная с $k \cdot k$
- 3) перейти к следующему «невыколотому» k
- 4) если $k \cdot k \leq N$, то перейти к шагу 2
- 5) напечатать все числа, оставшиеся «невыколотыми»

Новая версия – [решето Аткина](#).

? Как улучшить?

+ высокая скорость, количество операций

$$O((N \cdot \log N) \cdot \log \log N)$$

- нужно хранить в памяти все числа от 1 до N

Решето Эратосфена

Задача. Вывести все простые числа от 2 до N .

Объявление переменных:

```
const int N=100;  
bool A[N+1];  
int i, k;
```

выделяем на 1
элемент больше,
чтобы начать с A[1]

Сначала все невычеркнуты:

```
for ( i = 2; i <= N; i++ )  
    A[i] = true;
```

Решето Эратосфена

Вычёркивание непростых:

```
k = 2;
while ( k*k <= N ) {
    if ( A[k] ) {
        i = k*k;
        while ( i <= N )
        {
            A[i] = false;
            i += k;
        }
    }
    k ++;
}
```

Решето Эратосфена

Вывод результата:

```
for ( i = 2; i <= N; i++ )  
    if ( A[i] )  
        cout << i << " ";
```

Наибольший общий делитель (GCD)

- $\text{gcd}(a,b)$: наибольшее целое число делящее нацело a и b
- Используется очень часто в различных теоретических проблемах
- Несколько фактов:
 - $\text{gcd}(a,b)=\text{gcd}(a,b-a)$
 - $\text{gcd}(a,0)=a$
 - $\text{gcd}(a,b)$ наименьшее положительное число в $\{ax+by \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$

Алгоритм Евклида

- Повторение $\text{gcd}(a,b)=\text{gcd}(a,b-a)$
- $\text{gcd}(1989,867) =$
 - $\text{gcd}(1989-2\times 867,867) =$
 - $\text{gcd}(255,867) =$
 - $\text{gcd}(255,867-3\times 255) =$
 - $\text{gcd}(255,102) =$
 - $\text{gcd}(255-2\times 102,102) =$
 - $\text{gcd}(51,102) =$
 - $\text{gcd}(51,102-2\times 51) =$
 - $\text{gcd}(51,0) = 51$

Реализация

```
int gcd(int a, int b) {  
    while(b) {  
        int r = a % b; a = b; b = r;  
    }  
    return a;  
}
```

- Сложность: $O(\log(a+b))$
- Надо быть осторожным: $a \% b$ зависит от знака a
 - $5 \% 3 == 2$
 - $-5 \% 3 == -2$