

## Тема 9. Ряды динамики



1. Понятие рядов динамики



2. Показатели ряда динамики



3. Темпы роста и прироста



4. Правила составления рядов динамики



5. Преобразование рядов динамики



6. Определение и устранение влияния сезонных колебаний

## Понятие рядов динамики

Ряд динамики (или временной, или хронологический ряд – это ряд чисел, характеризующих развитие явления во времени:

$$y = y(t).$$

У каждого ряда динамики имеются два элемента: уровень ряда  $y$  и момент (период) времени  $t$ .

Различают два вида рядов динамики:

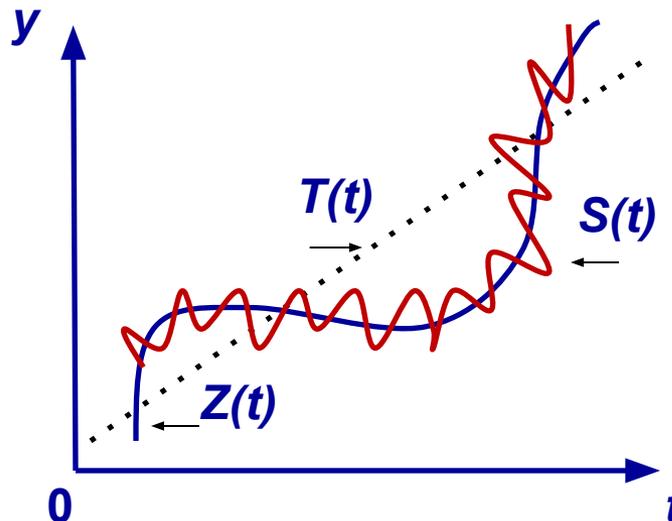
- моментный ряд дает сведения о развитии явления на какие-то последовательные моменты времени (пример: численность населения на 1.01.2012 г.)
- интервальный ряд дает сведения о развитии явления за определенные периоды времени (пример: выпуск продукции за квартал)

Анализ рядов динамики предполагает решение следующих задач:

- определение среднего уровня ряда;
- определение темпов роста и прироста;
- определение тренда;
- определение сезонной компоненты;
- преобразование рядов: сглаживание, выравнивание, смыкание и т.д.

## Компоненты ряда динамики

- тренд  $T(t)$  – это основная тенденция развития явления
- циклическая (конъюнктурная) компонента  $Z(t)$  показывает влияние конъюнктурных (среднесрочных) колебаний
- сезонная компонента  $S(t)$  отражает влияние сезонных или краткосрочных колебаний
- остаточная компонента  $R(t)$  отражает влияние прочих факторов, объяснимых и нет

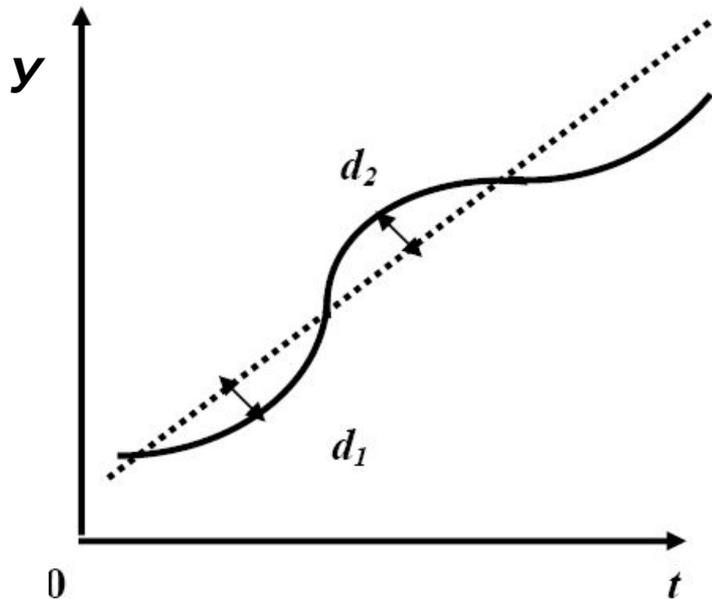


$$y = f(T, Z, S, R)$$

## Связь компонентов ряда динамики

Между компонентами ряда динамики существует аддитивная либо мультипликативная связь

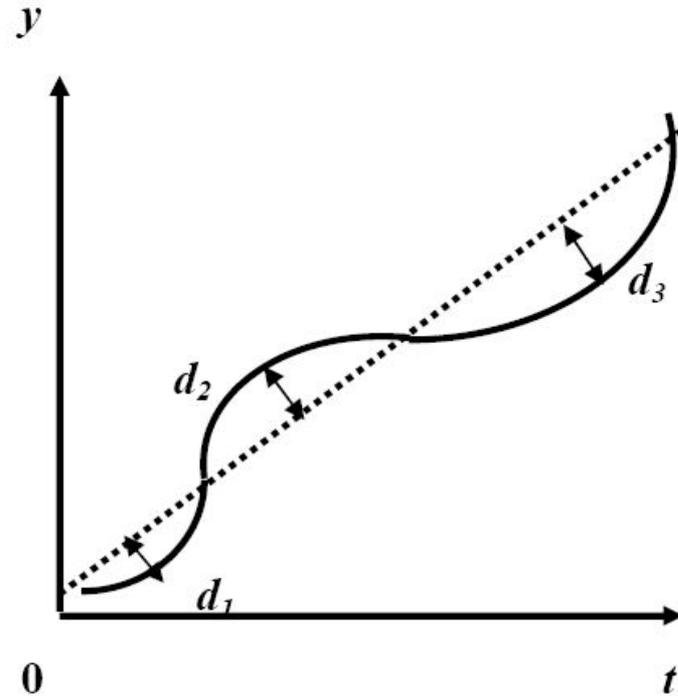
- аддитивная связь



$$y = T(t) + Z(t) + S(t) + R(t)$$

$$|d_1| = |d_2| = |d_3| = \dots = |d_n|$$

- мультипликативная связь



$$y = T(t) * Z(t) * S(t) * R(t)$$

$$|d_1| > |d_2| > |d_3| > \dots > |d_n|$$

ИЛИ

$$|d_1| < |d_2| < |d_3| < \dots < |d_n|$$

## Показатели ряда динамики

- Начальный уровень ряда
- Конечный уровень ряда
- Средний уровень ряда

Для интервального ряда средний уровень рассчитывается по средне-арифметической простой и взвешенной:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} ; \quad \bar{y}_{\text{взв}} = \frac{\sum y_i t_i}{\sum t_i} ,$$

где  $n$  – число уровней;

$t_i$  – длительность интервала времени между уровнями.

**Пример:** Предприятие выпускает продукцию по кварталам года:

I кв. – 300 тыс. руб.,

II кв.– 250 тыс. руб.,

III кв.– 100 тыс. руб.,

IV кв.– 500 тыс. руб.

Средний уровень интервального ряда с равноотстоящими интервалами:

$$\bar{y} = \frac{300 + 250 + 100 + 500}{4} = 287,5 .$$

## Показатели ряда динамики

- Начальный уровень ряда
- Конечный уровень ряда
- Средний уровень ряда

Для интервального ряда средний уровень рассчитывается по средне-арифметической простой и взвешенной:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}; \quad \bar{y}_{\text{взв}} = \frac{\sum y_i t_i}{\sum t_i},$$

где  $n$  – число уровней;

$t_i$  – длительность интервала времени между уровнями.

**Пример 1:** Предприятие выпускает продукцию по кварталам года:

I кв. – 300 тыс. руб.,

II кв.– 250 тыс. руб.,

III кв.– 100 тыс. руб.,

IV кв.– 500 тыс. руб.

Средний уровень интервального ряда с равноотстоящими интервалами:

$$\bar{y} = \frac{300 + 250 + 100 + 500}{4} = 287,5.$$

**Пример 2:** Предприятие выпустило продукции за первые 3 месяца года на 300 тыс. руб., за последующие 2 месяца – на 250 тыс. руб., за 1 месяц – на 100 тыс. руб. и за оставшиеся 6 месяцев – на 500 тыс. руб.

**Средний уровень интервального ряда с неравноотстоящими интервалами:**

$$\bar{y}_{\text{ВЗВ}} = \frac{300 * 3 + 250 * 2 + 100 * 1 + 500 * 6}{3 + 1 + 2 + 6} = 375$$

Для моментного ряда с равноотстоящими интервалами средний уровень исчисляется по формуле средней хронологической:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \dots + \frac{y_n}{2}}{n - 1}$$

**Пример:** остатки оборотных средств предприятия составили:

на 1.01 – 110 тыс. руб.,

на 1.02 – 120 тыс. руб.,

на 1.03 – 130 тыс. руб.,

на 1.04 – 140 тыс. руб.,

на 1.07 – 170 тыс. руб.

Определим средние остатки оборотных средств за I квартал:

$$\bar{y} = \frac{\frac{110}{2} + 120 + 130 + \frac{140}{2}}{4 - 1} = 125$$

Для моментного ряда с неравноотстоящими интервалами применяют формулу средней хронологической взвешенной:

$$\bar{y}_{\text{ВЗВ}} = \frac{\sum (y_i + y_{i+1}) t_{n-1}}{2 \sum t_{n-1}}$$

В нашем примере средние остатки оборотных средств за полугодие:

$$\bar{y}_{\text{ВЗВ}} = \frac{(110 + 120)1 + (120 + 130)1 + (130 + 140)1 + (140 + 170)3}{2(1 + 1 + 1 + 3)} = 140$$

## Темпы роста и прироста

Коэффициент роста отвечает на вопрос, во сколько раз изменилось явление. Коэффициент роста, выраженный в процентах, называют темпом роста.

Коэффициент прироста отвечает на вопрос, на сколько увеличилось явление. Коэффициент прироста, выраженный в процентах, называют темпом прироста.

$$K_p = \frac{y_i}{y_{i-1}}; K_{\text{пр}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}}; K_{\text{пр}} = K_p - 1$$

Средний коэффициент роста находится по средней геометрической:

$$\bar{K}_p = \sqrt[n]{K_1 * K_2 * \dots * K_n}; \bar{K}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_0}}$$

Пример: фирма произвела услуг в 1 году – на 100 у.е., во 2 году – на 120 у.е., в 3 году – на 132 у.е. и в 4 году – на 200 у.е.

$$\bar{K}_p = \sqrt[3]{1,2 * 1,1 * 1,52} = 1,26; \bar{K}_p = \sqrt[4-1]{\frac{200}{100}} = 1,26; K_{\text{пр}} = 1,26 - 1 = 0,26$$

## Правила составления рядов динамики

1. Все уровни динамического ряда должны быть сопоставимыми во времени.

Пример: численность населения обычно указывается на начало года

2. Все уровни динамического ряда должны быть сопоставимыми в пространстве, т.е. относиться к одной и той же территории

Пример: в 1993 г. в состав Нижегородской области вошел Сокольский район Ивановской области

3. Все уровни динамического ряда должны быть сопоставимыми по методологии расчета.

Пример: для составления динамического ряда ВВП данные по производству совокупного общественного продукта (СОП), рассчитывавшегося до начала 90-х годов, пересчитываются в ВВП.

## Преобразование рядов динамики Сглаживание и выравнивание ряда

1. Выявление тренда визуальным методом (на графике). Этот метод наиболее прост и наименее точен.
2. Механическое выравнивание, т.е. укрупнение интервалов путем расчета средних уровней не за один период, а за несколько.  
Пример: средняя урожайность не за 1 год, а за 5 лет  
Недостаток метода: потеря значительного числа уровней ряда и его укорачивание.
3. Метод скользящей средней, т.е. замена несколько уровней одним значением. Недостаток метода: теряются уровни в начале и в конце ряда, центрирование при чётном интервале сглаживания

Пример: интервал сглаживания – 3 месяца

$$T_1 = \frac{10 + 8 + 15}{3} = 11; \quad T_2 = \frac{8 + 15 + 14}{3} = 12,3$$

и т.д.

## Преобразование рядов динамики Сглаживание и выравнивание ряда

Сведения о продажах продукции по месяцам на предприятии  $N$

$t$	-3	-2	-1	1	2	3
	-2	-1	0	1	2	-
Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
$Y_i$	10	8	15	14	19	9
$\bar{T}$	-	11	12,3	16	14	-
$\hat{Y}$	8,4	10,8	13,2	15,6	18	-
$S$	1,6	-2,8	1,8	-1,6	1	

4. Аналитическое выравнивание. Фактические уровни заменяются уровнями, вычисленными на основе определенной функции (кривой) регрессии (прямой, гиперболы, параболы, показательной, экспоненциальной и других функций).

Пример: линейная зависимость продаж от времени  $y = at + b$

$$a = \frac{\sum yt - \frac{\sum y \sum t}{n}}{\sum t^2 - \frac{(\sum t)^2}{n}} \quad b = \bar{y} - a\bar{t} \quad \text{или} \quad a = \frac{\sum yt}{\sum t^2} \quad b = \bar{y}$$

$$a = \frac{-2 * 10 - 1 * 8 + 0 * 15 + 1 * 14 + 2 * 19}{4 + 1 + 0 + 1 + 4} = 2,4 \quad b = \frac{10 + 8 + 15 + 14 + 19}{5} = 13,2$$

## Преобразование рядов динамики Сглаживание и выравнивание ряда

Уравнение регрессии:  $\hat{y} = 2,4t + 13,2$

Выровненные значения  $y$ :  $\hat{y}_1 = 2,4 * (-2) + 13,2 = 8,4$   
 $\hat{y}_2 = 2,4 * (-1) + 13,2 = 10,8$  и т.д.

Сезонная компонента:  $S_1 = 10 - 8,4 = 1,6$   
 $S_2 = 8 - 10,8 = -2,8$  и т.д.

Расчет отдельных уровней ряда (интерполяция и экстраполяция).

Пример: для  $t = 4$

$$\hat{y} = 2,4 * 4 + 13,2 = 22,8$$

## Преобразование рядов динамики

### Приведение ряда динамики к одному основанию

Метод используется в случае, если необходимо сравнение или сопоставление тенденций в нескольких рядах

**Пример:** начальные уровни рядов динамики находятся в разных периодах. По какому предприятию темп роста выпуска продукции выше?

Ряд	2005	2006	2007	2008	2009	2010
1	100	110	125	130	135	140
1'	-	-	100	104	108	112
2	-	-	100	108	114	120

$$T_{p2007} = 100\%; T_{p2008} = \frac{100 * 130}{125} = 104\% \text{ и т.д.}$$

## Преобразование рядов динамики

### Смыкание рядов динамики

Метод используется в случае, если необходимо совместить два динамических ряда, характеризующих одно явление

Пример: данные о продажах предприятия до и после реорганизации

Годы	Объем продаж до реорганизации	Объем продаж после реорганизации	Сомкнутый ряд в относительных величинах	Сомкнутый ряд в абсолютных величинах
2006	1995	-	95	1895
2007	2058	-	98	1955
2008	2100	2000	100	2000
2009	-	2040	102	2040
2010	-	2100	105	2100

Принимаем 2008 г. за 100 %, а остальные уровни пересчитываем:

$$\frac{1995}{2100} 100\% = 95\%; \quad \frac{2058}{2100} 100\% = 98\%; \quad \frac{2040}{2000} 100\% = 102\%; \quad \frac{2100}{2000} 100\% = 105\%.$$

Иногда рассчитывают коэффициент изменения показателя до и после реорганизации:

$$\frac{2000}{2100} = 0,95;$$

Тогда сомкнутый ряд по абсолютным значениям:

$$0,95 \cdot 1995 = 1895$$

$$0,95 \cdot 2058 = 1955$$

## Преобразование рядов динамики Интерполяция и экстраполяция

Интерполяция – нахождение уровней внутри динамического ряда

Экстраполяция – нахождение уровней за пределами динамического ряда

Пример: (см. выше)

Точность прогноза с ростом горизонта прогнозирования уменьшается, поэтому не рекомендуется делать прогнозы на срок, более чем на  $1/3$  превышающий длительность периода, по которому строился тренд.

Другие причины прогнозных ошибок могут быть:

- неправильный подбор факторного признака;
- неточный расчёт параметров модели (например, в случае линейной зависимости – коэффициентов  $a$  и  $b$ );
- несоблюдение допущений модели, например, в отношении остаточной компоненты  $R(t)$ .
- выбор для исследования неподходящего периода времени.

## Определение и устранение сезонных колебаний

### 1. Если тренд не известен

- Определяем среднемесячные итоговые величины
- Рассчитываем относительные показатели
- Определяем сезонную компоненту
- Исключаем влияние сезонной компоненты

### 2. Если тренд известен

- Рассчитываем тренд
- Определяем вид связи компонент и рассчитываем сезонные значения
- Определяем сезонную компоненту
- Исключаем влияние сезонной компоненты

# Определение и устранение сезонных колебаний

Пример: оборот предприятия за 3 года

Месяц	Оборот в тыс. у.е. ( $Y_{ij}$ )			Относительные показатели ( $S_{ij}$ )			$\Sigma S_{ij}$	Сезонный индекс $s_i$	$S_i$			$Y_i - S_i$		
	1	2	3	1	2	3			1	2	3	1	2	3
1	20	21	21	95,2	91,3	87,5	274,0	91,3	-1,9	-2,0	-2,0	21,9	23,0	23,0
2	22	24	25	104,8	104,3	104,2	313,3	104,5	0,9	1,0	1,1	21,1	23,0	23,9
3	24	25	28	114,3	108,7	116,7	339,7	113,2	2,8	2,9	3,3	21,2	22,1	24,7
4	21	23	23	100,0	100,0	95,8	295,8	98,6	-0,3	-0,3	-0,3	21,3	23,3	23,3
5	18	21	21	85,7	91,3	87,5	264,5	88,2	-2,4	-2,8	-2,8	20,4	23,8	23,8
6	20	19	20	95,2	82,6	83,3	261,1	87,0	-3,0	-2,8	-3,0	23,0	21,8	23,0
7	20	22	22	95,2	95,7	91,7	282,6	94,2	-1,2	-1,4	-1,4	21,2	23,4	23,4
8	24	27	28	114,3	117,4	116,7	348,4	116,1	3,3	3,7	3,9	20,7	23,3	24,1
9	26	28	30	123,8	121,7	125,0	370,5	123,5	4,9	5,3	5,7	21,1	22,7	24,3
10	21	23	25	100,0	100,0	104,2	304,2	101,4	0,3	0,3	0,3	20,7	22,7	24,7
11	19	22	23	90,5	95,7	95,8	282,0	94,0	-1,2	-1,4	-1,5	20,2	23,4	24,5
12	17	21	22	81,0	91,3	91,7	264,0	88,0	-2,3	-2,9	-3,0	19,3	23,9	25,0
	252	276	288					1200,0						

## Определение и устранение сезонных колебаний

1) Определяем среднемесячные оборот по годам

$$1 \text{ год} - 252/12=21$$

$$2 \text{ год} - 276/12=23$$

$$3 \text{ год} - 288/12=24$$

2) Рассчитываем относительные показатели ( $S_{ij}$ ):

$$\text{Относительный показатель} = \frac{\text{Реальный месячный оборот}}{\text{Средний оборот за месяц}}$$

$$\text{Январь 1-го года: } S_{ij} = \frac{20}{21} 100\% = 95,2\% .$$

Результат (95,2%) показывает, что оборот в этот период был на 4,8% ниже среднемесячного уровня.

$$\text{Январь 2-го года: } S_{ij} = \frac{21}{23} 100\% = 91,3\%$$

и т.д.

## Определение и устранение сезонных колебаний

3) Рассчитанные величины для одноименных месяцев складываются и вычисляется их средняя (сезонный индекс  $s_i$ )

$$s_i = \frac{\sum s_{ij}}{j} = \frac{95,2 + 91,3 + 87,5}{3} = 91,3$$

Он означает сезонные колебания в январе на 8,7 % ниже нормального годового значения

4) Определяем сезонную компоненту

$$S_i = y_i - \frac{y_i}{s_i} 100\%$$

$$20 - \frac{20}{91,3} 100 = -1,9$$

Исключаем влияние сезонной компоненты:

$$20 - (-1,9) = 21,9$$

Т.е. если бы в этот период не было бы сезонных колебаний, то оборот предприятия составил бы 21,9 .

## Тема 10. Выборка



1. Понятие выборки



2. Способы отбора



3. Ошибки выборки



4. Доверительные интервалы. Распространение результатов выборки на всю совокупность



5. Необходимая численность выборки



6. Практика применения выборки

## Понятие выборки

Выборка – это один из видов несплошного наблюдения, когда о целом судят по его части.

Условия проведения выборки:

- 1) требуемая точность устанавливается самостоятельно
- 2) выборка должна давать значительное сокращение ресурсов и времени по сравнению со сплошным наблюдением

Этапы выборочного наблюдения:

- формулировка целей и задач исследования, обоснование выборки
- уточнение границ генеральной совокупности
- определение объёма выборки
- проведение выборки
- расчет выборочных характеристик и ошибок
- распространение результатов выборки на генеральную совокупность
- анализ, оценка и интерпретация полученных результатов

Условные обозначения:

$N, n, \bar{X}, \tilde{X}, w, p, \sigma^2, s^2$

## Способы отбора

1) Собственно случайный отбор - это отбор по жребию, по таблице случайных чисел (в настоящее время генерируется компьютером).

Бывает повторным (отобранная единица совокупности может снова попасть в выборку) и бесповторным (отобранная единица совокупности вновь в выборку не возвращается).

Пример повторного отбора: измерение плотности пассажиропотока на транспорте

Пример бесповторного отбора: лотерея «Спортлото»

2) Механический отбор - это отбор из списков. На всю генеральную совокупность составляется общий список и далее из него через равный интервал отбирают нужное количество единиц.

Размер интервала равен  $1/\text{долю}$  выборки. Так, при 2 %-ной выборке интервал будет равен  $1/0,02 = 50$  ед.

Общий список составляется двумя способами: единицы совокупности располагаются в случайном порядке (отбор можно начинать с любой единицы) или в определенном порядке ( отбор начинают с середины первого интервала)

Примеры: табельные номера работников предприятия (первый вариант), алфавитный список студентов потока (второй вариант)

## Способы отбора

3) Типический отбор - генеральная совокупность разбивается на типические группы, которые должны как можно сильнее отличаться друг от друга и быть однородными внутри. Затем из каждой типической группы первыми двумя способами отбирают единицы в выборочную совокупность.

Пример: обследуются предприятия различных форм собственности. Формы собственности представляют различные типические группы

4) Серийный отбор - генеральная совокупность разбивается на серии. Серии должны как можно менее отличаться друг от друга и быть разнородными внутри. Обследуется часть серий, зато внутри серии – как правило, все единицы. Отбор из серий в выборку также осуществляется первыми двумя способами.

Пример: обследование одного ящика пива из партии.

Другие способы отбора: в прикладных исследованиях применяются такие неслучайные способы отбора, как квотный, «удобная выборка» (Convenience sample), экспертный и другие

## Ошибки выборки

Выборка характеризуется прежде всего ошибками представительства или репрезентативности. Их суть: отклонения выборочных значений от генеральных:

$$\Delta = |\tilde{X} - \bar{X}|; \text{ для доли } \Delta = |w - p|,$$

где  $\Delta$  – предельная ошибка выборки

### 1) Случайный отбор

- повторный случайный отбор:

$$\Delta = t\mu = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}; \quad \Delta = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}},$$

где  $\mu$  средняя (стандартная) ошибка выборки

$t$  – кратность средней ошибки выборки

$n$  – объем выборки

**Пример1:** на предприятии оценивается средний возраст работников. Найти предельную ошибку выборки с вероятностью 0,997, если стандартное отклонение  $\sigma = 4$ , а объём выборки  $n = 150$  чел.

Тогда:

$$\Delta = 3 \sqrt{\frac{4^2}{150}} = 0,98 \text{ или } 1 \text{ чел.}$$

## Ошибки выборки

### Случайный отбор

- повторный случайный отбор:

**Пример 2.:** из стада в 10 тыс. коров обследовано 100 коров. Половина из обследованных признана породистой. Определить долю породистых коров во всем стаде.

$$w = 0,5$$

При  $t = 1,96$  (вероятность 95%):  $\Delta = 1,96 \sqrt{\frac{0,5 * 0,5}{100}} = 0,098$

Доля породистых коров во всем стаде:  $p = w \pm \Delta = 0,5 \pm 0,098$

Т.е. с вероятностью 95% можно утверждать, что во всем стаде породистых коров  $50 \pm 9,8 \%$

- бесповторный случайный отбор:

$$\Delta = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}; \quad \Delta = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} .$$

### 2) Механический отбор.

Используются те же формулы, хотя фактически ошибки меньше.

Т.е. ошибки завышаются, но повышается надёжность оценок.

## Ошибки выборки

### 3) Типический отбор

- повторный типический отбор

$$\Delta = t \sqrt{\frac{\alpha^2}{n}}; \quad \Delta = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$$

- бесповторный типический отбор

$$\Delta = t \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}; \quad \Delta = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

## Ошибки выборки

### 4) Серийный отбор

- повторный серийный отбор

$$\Delta = t \sqrt{\frac{\delta^2}{s}}; \quad \Delta = t \sqrt{\frac{\delta^2_w}{s}}$$

- бесповторный серийный отбор

$$\Delta = t \sqrt{\frac{\delta^2}{s} \left(1 - \frac{s}{S}\right)}; \quad \Delta = t \sqrt{\frac{\delta^2_w}{s} \left(1 - \frac{s}{S}\right)}$$

Если внутри серий обследуются не все единицы, формулы усложняются:

повторный серийный отбор

$$\Delta = t \sqrt{\frac{\delta^2}{s} + \frac{\alpha^2}{n}}$$

бесповторный серийный отбор

$$\Delta = t \sqrt{\frac{\delta^2}{s} \left(1 - \frac{s}{S}\right) + \frac{\alpha^2}{n} \left(1 - \frac{m}{N}\right)}$$

где  $m$  – число отобранных в сериях единиц

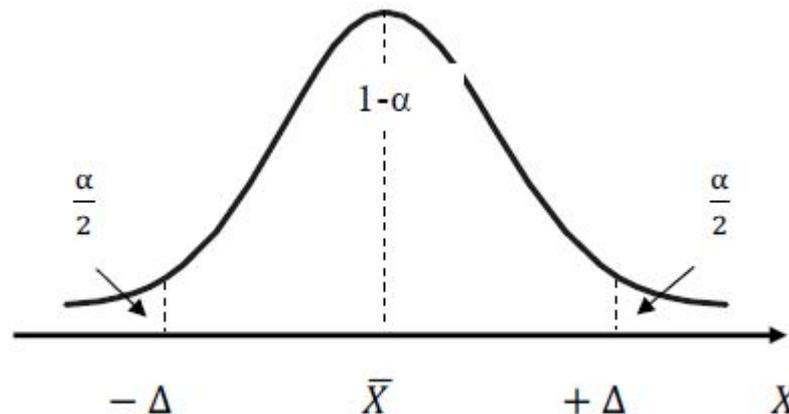
## Доверительные интервалы

Выборочные характеристики отличаются от характеристик (параметров) генеральной совокупности, т.е. являются их оценками. Если оценка определяется одним числом, то она называется точечной оценкой.

Пример: выборочная средняя  $\tilde{X}$  является точечной оценкой генеральной средней  $\bar{X}$ , выборочная дисперсия  $s^2$  – точечной оценкой генеральной дисперсии  $\sigma^2$  и т.д.

Если оценка параметра генеральной совокупности определяется интервалом, то она называется интервальной, а сам интервал – доверительным интервалом. Его можно рассчитать после нахождения предельной ошибки выборки:

$$\tilde{X} - \Delta \leq \bar{X} \leq \tilde{X} + \Delta; \quad w - \Delta \leq p \leq w + \Delta.$$



## Доверительные интервалы

**Пример:** при проверке изделий на наличие брака произведена случайная повторная выборка  $n = 1000$  ед., при этом доля бракованных изделий составила  $w = 0,2$  (20 %). Определить с вероятностью 99,7 % ( $t = 3$ ) доверительный интервал для доли брака в совокупности.

$$\Delta = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} = 3 \sqrt{\frac{0,2 * 0,8}{1000}} = 0,0379 ;$$

$$0,2 - 0,0379 \leq p \leq 0,2 + 0,0379 ;$$

$$0,1621 \leq p \leq 0,2379.$$

### Относительная ошибка выборки

для средней:

$$\Delta_{\%} = \frac{\Delta_X}{\bar{X}} ;$$

для доли:

$$\Delta_{\%} = \frac{\Delta_w}{p},$$

причём в знаменателе можно подставить выборочные значения. Если  $\Delta_{\%}$  не превышает заранее установленного предельного значения, то выборка репрезентативна и может распространяться на генеральную совокупность.

## Распространение результатов выборки на всю совокупность

- Метод прямого пересчета заключается в умножении средней выборочной на объем генеральной совокупности.

Пример: сколько бракованных изделий содержится в серии из 100 000 ед.? С вероятностью 99,7 % число бракованных изделий будет лежать между:  $0,1621 \cdot 100\ 000$  и  $0,2379 \cdot 100\ 000$  ед., т.е. между 16210 и 23790 ед.

- Метод коэффициентов более точен. Используют следующую формулу:

$$Y_1 = Y_0 K,$$

где  $K$  – поправочный коэффициент

Пример: зарегистрированных торговых мест на рынке  $Y_0 = 500$ , выборочная проверка участка  $A$  рынка показала, что на 40 зарегистрированных приходится 10 неучтенных мест, т.е. поправочный коэффициент

$$K = 50 : 40 = 1,25$$

Тогда на всём рынке будет:

$$Y_1 = Y_0 K \text{ или } Y_1 = 500 \cdot 1,25 = 625 \text{ мест.}$$

## Необходимая численность выборки

Объём выборки – это число единиц генеральной совокупности, которое мы должны обследовать, не превышая предельную ошибку  $\Delta$  с вероятностью  $p$ .

Расчёта объёма выборки зависит от способа отбора:

1) Случайный отбор.

- повторный отбор:

$$n = \frac{t^2 \sigma_X^2}{\Delta_X^2};$$

$$n = t^2 \frac{w(1-w)}{\Delta_w^2}$$

- бесповторный отбор:

$$n = \frac{t^2 \sigma_X^2 N}{\Delta_X^2 N + t^2 \sigma_X^2};$$

$$n = \frac{t^2 w(1-w)N}{\Delta_w^2 N + t^2 w(1-w)}$$

Пример: определить численность выборки, если

$$\Delta^2 = 0,01$$

$$N = 100$$

$$\sigma^2 = 1$$

$$t = 2$$

Тогда  $n = \frac{4 \cdot 100}{1 + 4} = 80 \Rightarrow$  лучше провести сплошное обследование

## Необходимая численность выборки

2) Механический отбор – используются формулы случайного отбора

3) Типический отбор

- повторный отбор:

$$n = \frac{t^2 \alpha^2}{\Delta_X^2} ; \quad n = \frac{t^2 w(1-w)}{\Delta_w^2}$$

- бесповторный отбор:

$$n = \frac{t^2 \alpha^2 N}{\Delta_X^2 N + t^2 \alpha^2} ; \quad n = \frac{t^2 w(1-w)N}{\Delta_w^2 N + t^2 w(1-w)}$$

4) Серийный отбор

- повторный отбор:

$$n = \frac{t^2 \delta^2}{\Delta_X^2} ; \quad n = \frac{t^2 w_s(1-w_s)}{\Delta_w^2}$$

- бесповторный отбор:

$$n = \frac{t^2 \delta^2 S}{\Delta_X^2 S + t^2 \delta^2} ; \quad n = \frac{t^2 w_s(1-w_s)S}{\Delta_w^2 S + t^2 w_s(1-w_s)}$$

## Практика применения выборки

Основные направления применения выборочного метода:

- маркетинговые исследования
- изучение общественного мнения
- обследование уровня цен и объемов продаж в регионах
- оценка качества продукции
- статистический контроль производства
- обработка материалов переписи населения и переписей вообще

Пример1: оценка генеральной доли. В ходе исследования по выведению на рынок нового лекарства *A* было установлено, что доля купивших лекарство составила 2 %. Объем бесповторной случайной выборки равен 1000 чел. Объем генеральной совокупности оценивается в 25 000 чел. Тогда величина стандартной ошибки выборки по доле составит:

$$\mu = \sqrt{\frac{0,02(1 - 0,02)}{1000} \left(1 - \frac{1000}{25000}\right)} = 0,0043$$

Т.е. с вероятностью 95,4 % можно утверждать, что предельная ошибка выборки  $\leq 0,86$  %. Доля купивших препарат *A* находится в интервале  $1,14 \leq p \leq 2,86$  .

## Практика применения выборки

Пример 2: определение объёма выборки.

В ходе изучения конъюнктуры рынка необходимо с помощью выборки выявить среднюю цену на товар  $B$ . Разница между максимальной и минимальной ценой товара не может превышать 24 руб. Исходя из допущения нормального распределения цен на товар  $B$  в диапазон  $x \pm 3\sigma$  включается 99,7 % всех вариантов значений цены, т.е.  $24 \approx 6\sigma$ . Предельная ошибка повторной случайной выборки установлена на уровне 1 руб. Доверительная вероятность принята равной 95,4 %.

Тогда искомый объём выборки составит:

$$n = \frac{2^2 4^2}{1^2} = 64 \text{ чел.}$$

Для сравнения: если бы мы хотели узнать среднюю цену на товар  $B$  с предельной ошибкой не более 50 коп., то, при прочих равных условиях, нам бы понадобилась выборка объёмом:

$$n = \frac{2^2 4^2}{0,5^2} = 256 \text{ чел.}$$

# Тема 11. Статистическая проверка гипотез



1. Основные понятия и определения



2. Ошибки при проверке гипотез



3. Статистические критерии. Критическая область. Область принятия гипотезы



4. Общая схема проверки гипотез



5. Параметрические и непараметрические тесты

- критерии согласия
- Z-критерий
- T-критерий
- F-критерий

## Основные понятия и определения

Статистическая гипотеза – это предположение о свойствах случайных величин или событий, которое мы хотим проверить по имеющимся данным.

Различают два вида статистических гипотез:

- 1) гипотезы о неизвестных параметрах генеральной совокупности. Они проверяются параметрическими тестами.

Пример: дисперсии 2-х нормальных совокупностей равны между собой

- 2) гипотезы о неизвестной форме распределения генеральной совокупности. Они проверяются непараметрическими тестами).

Пример: генеральная совокупность распределена по закону Пуассона

Исходное утверждение, которое берут за основу, - нулевая гипотеза  $H_0$   
 Другое проверяемое предположение, которое противоречит исходному, - альтернативная гипотеза  $H_1$ .

Пример: производитель молока утверждает, что его средняя жирность равна 3,2%. Представитель торговой сети не согласен с данным утверждением. Тогда:

$$H_0: \bar{X} = 3,2 \%$$

$$H_1: \bar{X} \neq 3,2 \% \text{ или } H_1: \bar{X} \geq 3,2 \%$$

## Ошибки при проверке гипотез

Ошибки, допускаемые при проверке гипотез, делятся на два типа:

- 1) отклонение гипотезы  $H_0$ , когда она верна, — ошибка первого рода;
- 2) принятие гипотезы  $H_0$ , когда в действительности верна какая-то другая гипотеза, — ошибка второго рода.

Вероятность ошибки первого рода обозначается  $\alpha$  и называется уровнем значимости, по которому проверяется справедливость гипотезы  $H_0$ .

Вероятность ошибки второго рода обозначается  $\beta$ . Ее величина зависит от альтернативной гипотезы  $H_1$ .

	Решение	
	Принять $H_0$	Принять $H_1$
Справедлива $H_0$	Правильное с вероятностью $1 - \alpha$	Ошибочное с вероятностью $\alpha$
Справедлива $H_1$	Ошибочное с вероятностью $\beta$	Правильное с вероятностью $1 - \beta$

Уровень значимости  $\alpha$  задается исследователем самостоятельно, до проверки гипотезы. Обычно считают достаточным  $\alpha = 0,05$ , иногда  $\alpha = 0,01$ , редко  $\alpha = 0,001$ .

## Статистические критерии

Для проверки выдвинутых нулевых гипотез используют случайную величину  $K$ , которую называют статистическим критерием.

Статистические критерии подразделяются на три типа:

1. Критерии значимости, которые служат для проверки гипотез о параметрах распределений генеральной совокупности (чаще всего нормального распределения). Эти критерии называются параметрическими.  
Пример:  $Z$ -критерий в случае стандартного нормального распределения,  $F$ -критерий в случае распределения Фишера,  $T$ -критерий в случае распределения Стьюдента.
2. Критерии, которые для проверки гипотез не используют предположений о распределении генеральной совокупности. Эти критерии не требуют знания параметров распределений, поэтому называются непараметрическими.  
Пример:  $D$ -критерий Колмогорова-Смирнова.
3. Критерии согласия служат для проверки гипотез о согласии распределения генеральной совокупности, из которой получена выборка, с ранее принятой теоретической моделью (чаще всего нормальным распределением).  
Пример: критерий согласия  $\chi^2$ .

## Критическая область и область принятия гипотезы

После выбора критерия множество его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: критическую область и область принятия гипотезы. Критическая область – это совокупность значений критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается. Область принятия гипотезы – это совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Критическая область и область принятия гипотезы являются интервалами, их разделяют критические точки  $k_{кр}$ .



## Общая схема проверки гипотез

1. Формулируются нулевая и альтернативная гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ .  
Выбирается уровень значимости  $\alpha$
2. Выбирается подходящий статистический критерий и определяется форма распределения, используемая в тесте
3. Определяется критическая область и область принятия гипотезы
4. Вычисляется наблюдаемое и критическое (граничное) значения критерия при уровне значимости  $\alpha$
5. Найденное значение  $K_{набл}$  критерия сравнивается с  $K_{кр}$ .  
По результатам сравнения делается вывод: принять гипотезу или отвергнуть

## Общая схема проверки гипотез: пример

Оценить значимость коэффициента корреляции  $r = 0,89$  при числе выборочных наблюдений  $n = 6$ .

1. Нулевая гипотеза: коэффициент корреляции  $r$  равен нулю, т.е. связь между факторным признаком  $x$  и результативным признаком  $y$  отсутствует.

$$H_0: r = 0$$

$$H_1: r \neq 0$$

Примем уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

2. Так как выборка малая, распределение  $r$  будет отличаться от нормального, подходящим статистическим критерием будет выступать  $t$ -критерий Стьюдента с  $n - 2$  степенями свободы.

$$t = |r| \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

3. Критические (табличные) значение  $t$ -критерия по таблице распределения Стьюдента при  $n - 2 = 6 - 2 = 4$  равны:

$$t_{\text{табл}} = \pm 2,78$$

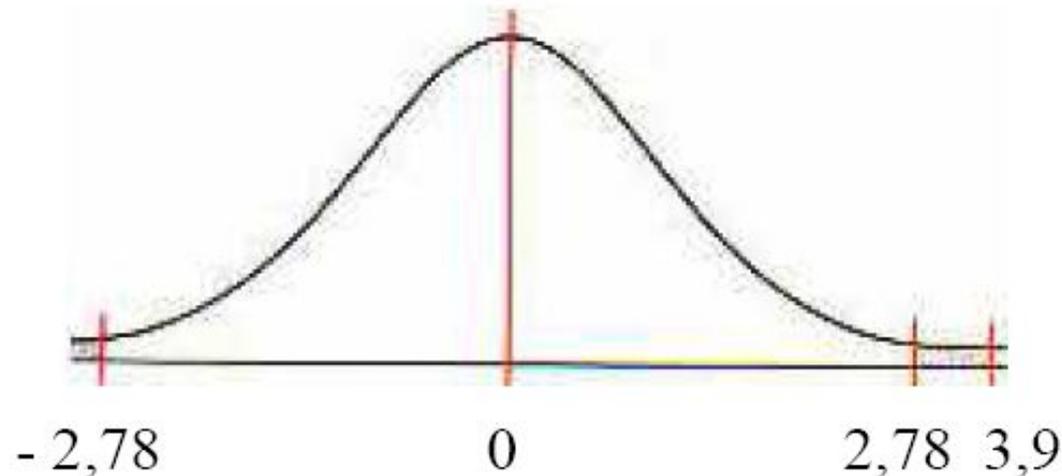
## Общая схема проверки гипотез: пример

4. Расчётное (фактическое) значение  $t$ -критерия равно

$$t_{\text{расч}} = 0,89 \sqrt{\frac{6-2}{1-0,89^2}} = 3,9$$

5. Так как расчётное значение попадает в критическую область, т.е.

$t_{\text{табл}} < t_{\text{расч}}$ , то нулевая гипотеза отклоняется. Между признаками  $x$  и  $y$  существует значимая корреляция



## Критерий согласия $\chi^2$

Применяется для проверки предположения о нормальном распределении генеральной совокупности.

$$H_0: f_o(x) = f_e(x)$$

$$H_1: f_o(x) \neq f_e(x)$$

где  $f_o$  - эмпирические (фактические) частоты интервалов группировки

$f_e$  - теоретические (ожидаемые) частоты, рассчитываются по формулам нормального распределения

1. Формулируется гипотеза, выбирается уровень значимости  $\alpha$
2. Получается выборка объема  $n \geq 30$  независимых наблюдений и представляется эмпирическое распределение в виде интервального вариационного ряда
3. Рассчитываются выборочные характеристики  $\bar{X}$  и  $s$ .
4. Вычисляются значения теоретических частот  $f_e$  попадания в  $i$ -й интервал группировки

$$f_{ei} = p_i n$$

где  $p_i = F(z_i) - F(z_{i-1})$ ,

$F(z)$  - функции Лапласа,

$z$  - стандартная оценка

## Критерий согласия $\chi^2$

6. Из таблиц распределения  $\chi^2$  находится критическое значение  $\chi^2_{\text{табл}}$  критерия для уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $n - 3$ .

$$\chi_{\text{расч}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

7. Вывод: если  $\chi^2_{\text{расч}} \geq \chi^2_{\text{табл}}$ , то эмпирическое распределение не соответствует нормальному распределению при уровне значимости  $\alpha$ , в противном случае нет оснований отрицать это соответствие.

Пример: проверить нормальный характер распределения объема продаж в супермаркете при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и следующих данных:

Объём продаж	Число дней $f_o$
190 – 200	10
200 – 210	26
210 – 220	56
220 – 230	64
230 – 240	30
240 – 250	14

Критерий согласия  $\chi^2$  - пример расчета

$H_0$ : объём продаж есть случайная величина, распределённая нормально  
 $\bar{X} = 221$   $s = 12,33$  число степеней свободы  $\nu = 6 - 3 = 3$

Расчет теоретических частот  $f_e$ 

Объём продаж	Число дней $f_o$	Нормированные интервалы $(z_i; z_{i+1})$	Теоретическая вероятность $p_i$	Теоретическая частота $f_e$
190 – 200	10	(- 2,51; - 1,70)	0,045	9
200 – 210	26	(- 1,70; - 0,89)	0,142	28,4
210 – 220	56	(- 0,89; - 0,08)	0,281	56,2
220 – 230	64	(- 0,08; 0,73)	0,299	59,8
230 – 240	30	(0,73; 1,54)	0,171	34,2
240 – 250	14	(1,54; 2,35)	0,062	12,4
Итого:	$n = 200$		1,000	200

Фактическое значение  $\chi^2$  – критерия равно:

$$\chi_{\text{расч}}^2 = \frac{(10 - 9)^2}{9} + \dots + \frac{(14 - 12,4)^2}{12,4} = 1,33.$$

Критическое значение  $\chi^2$  по таблице распределения  $\chi^2$  равно  $\chi_{\text{табл}}^2 = 7,815$ .  
 Так как  $\chi_{\text{расч}}^2 < \chi_{\text{табл}}^2$ , то нулевая гипотеза принимается.

## Z - критерий

Применяется для оценки значимости отклонений параметров генеральной совокупности от выборки, например, выборочной средней от генеральной средней, при известной генеральной дисперсии  $\sigma^2$

$$H_0: \bar{X} = \tilde{X}$$

$$H_1: \bar{X} \neq \tilde{X}$$

Уровень значимости:  $\alpha$ .

1. Принимаем предположение о нормальности, формулируем гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  задаем уровень значимости  $\alpha$
2. Получаем выборку объема  $n$
3. Вычисляем среднюю арифметическую выборочную
4. Определяем значение Z - критерия по формуле:

$$Z = \frac{\tilde{X} - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

## Z - критерий

5. По таблицам находим критическое значение  $Z_{табл}$  для уровня значимости  $\alpha$ . Например, если  $\alpha = 0,05$  и используется двусторонний Z - критерий, то критические точки будут соответствовать значениям  $\alpha/2 = 0,025$   $Z = \pm 1,96$

6. Если  $|Z_{расч}| \geq Z_{табл}$  (случай двустороннего критерия) или  $Z_{расч} \geq Z_{табл}$  (правосторонний критерий) или  $Z_{расч} \leq Z_{табл}$  (левосторонний критерий), то делаем вывод об отклонении гипотезы  $H_0$



## Z – критерий – пример расчета

Вы являетесь менеджером на кондитерской фабрике, которая выпускает набор конфет «Ассорти» весом  $\bar{X} = 368$  г. Выборка объёмом  $n = 25$  дала средний вес набора  $\tilde{X} = 372,5$  г. Является ли различие существенным и необходима ли переналадка фабричного оборудования, если  $\sigma = 15$ ? Распределение генеральной совокупности близко к нормальному.

$$H_0: \bar{X} = 368 \text{ г.}$$

$$H_1: \bar{X} \neq 368 \text{ г.}$$

$$\alpha = 0,05$$

$$Z_{\text{расч}} = \frac{372,5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = 1,50$$

$$Z_{\text{табл}} = \pm 1,96$$

Так как  $|Z_{\text{расч}}| < Z_{\text{табл}}$ , то нулевая гипотеза не отклоняется. Мер по переналадке оборудования на фабрике предпринимать не нужно.

## T - критерий

Применяется для оценки значимости отклонений параметров генеральной совокупности от выборки при неизвестной генеральной дисперсии  $\sigma^2$ . Вместо нее используется выборочная дисперсия  $s^2$

Используют  $t$  – распределению Стьюдента с  $\nu = n - 1$  степенями свободы

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{X}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

**Пример расчета:** термопластоавтомат изготавливает пластмассовую крышку средней толщиной  $\bar{X} = 0,25$  см. Выборка объёмом  $n = 10$  дала выборочную среднюю  $\bar{X} = 0,253$  см. при выборочном стандартном отклонении  $s = 0,003$  см. Нужно проверить предположение, что при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  термопластоавтомат работает точно.

$$H_0: \bar{X} = 0,25 \text{ см.}$$

$$H_1: \bar{X} \neq 0,25 \text{ см.}$$

$$\alpha = 0,05$$

$$\nu = 10 - 1 = 9$$

$$T_{\text{расч}} = \frac{0,253 - 0,25}{\frac{0,003}{\sqrt{10}}} = 3,162$$

$$T_{\text{табл}} = \pm 2,262$$

Так как  $|T_{\text{расч}}| > T_{\text{табл}}$ , то  $H_0$  отклоняется: нельзя утверждать, что термопластоавтомат работает точно

## F-критерий

Применяется для сравнения двух выборочных дисперсий из нормальных генеральных совокупностей

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$

$H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$  (двусторонний критерий) или  $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$  (односторонний критерий)

Уровень значимости задается  $\alpha$

1. Принимаем предположение о нормальном распределении генеральных совокупностей, формулируем гипотезу и альтернативу, назначаем уровень значимости  $\alpha$
2. Получаем две независимые выборки из совокупностей  $X$  и  $Y$  объемом  $n_x$  и  $n_y$  соответственно
3. Рассчитываем значения выборочных дисперсий  $S_x^2$  и  $S_y^2$ . Большая из дисперсий  $S_1^2$ , меньшая –  $S_2^2$
4. Вычисляем значение  $F$ -критерия 
$$F_{\text{расч}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$
5. Сравниваем  $F_{\text{расч}}$  с  $F_{\text{табл}}$  при заданной  $\alpha$  и  $\nu_1 = n_1 - 1$  и  $\nu_2 = n_2 - 1$ .
6. Если  $F_{\text{расч}} \geq F_{\text{табл}}$ , то дисперсии различаются значимо.

## F-критерий – пример расчета

Проверим, одинакова ли колеблемость зарплат на предприятиях А и В при условии нормального распределения зарплат на обоих предприятиях. Выборка на предприятии А  $n_1 = 21$  дала стандартное отклонение  $s_1 = 322$  руб., на предприятии В  $n_2 = 16$ ,  $s_2 = 288$  руб. Уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

$$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

$$v_1 = n_1 - 1 = 21 - 1 = 20$$

$$v_2 = n_2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{322^2}{288^2} = 1,25$$

$$F_{\text{табл}} = 2,33$$

Так как  $F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}}$ , то  $H_0$  не отвергается, т.е. наблюдаемое различие между двумя дисперсиям не является значимым.

