

## Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными.

**Задача.** *Определить тип уравнения*

$$A(x, y)U_{xx} + 2B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = f(x, y) \quad (1)$$

*и привести его к каноническому виду.*

### Необходимый теоретический материал

I. Тип уравнения (1) определяется знаком выражения  $B^2 - AC$ :

- если  $B^2 - AC > 0$  в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением гиперболического типа в этой точке;
- если  $B^2 - AC < 0$  в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа в этой точке;
- если  $B^2 - AC = 0$  в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением параболического типа в этой точке.

Уравнение (1) будет являться уравнением гиперболического, эллиптического, параболического типа в области  $D$ , если оно гиперболично, эллиплично, параболично в каждой точке этой области.

Уравнение (1) может менять свой тип при переходе из одной точки (области) в другую. Например, уравнение  $yU_{xx} + U_{yy} = 0$  является уравнением эллиптического типа в точках  $(x, y)$ ,  $y > 0$ ; параболического типа в точках  $(x, 0)$ ; и гиперболического типа в точках  $(x, y)$ ,  $y < 0$ .

II. Чтобы привести уравнение к канонического виду, необходимо:

1. Определить коэффициенты  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$ ;
2. Вычислить выражение  $B^2 - AC$ ;
3. Сделать вывод о типе уравнения (1) (в зависимости от знака выражения  $B^2 - AC$ );
4. Записать уравнение характеристик:

$$A(x, y)dy^2 - 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0; \quad (2)$$

5. Решить уравнение (2). Для этого:

а) разрешить уравнение (2) как квадратное уравнение относительно  $dy$ :

$$dy = \frac{B(x, y) \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A(x, y)} dx; \quad (3)$$

б) найти общие интегралы уравнений (3) (характеристики уравнения (1)):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= C_1, \\ \psi_1(x, y) &= C_2, \end{aligned} \quad (4)$$

в случае уравнения гиперболического типа;

$$\varphi_2(x, y) = C, \quad (5)$$

в случае уравнения параболического типа;

$$\varphi_3(x, y) \pm i\psi_3(x, y) = C, \quad (6)$$

в случае уравнения эллиптического типа.



6. Ввести новые (характеристические) переменные  $\xi$  и  $\eta$  :

- в случае уравнения гиперболического типа в качестве  $\xi$  и  $\eta$  берут общие интегралы (4) уравнений (3), т.е.

$$\xi = \varphi_1(x, y),$$

$$\eta = \psi_1(x, y);$$

- в случае уравнения параболического типа в качестве  $\xi$  берут общий интеграл (5) уравнения (3), т.е.  $\xi = \varphi_2(x, y)$ , в качестве  $\eta$  берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию  $\psi_2$ , не выражающуюся через  $\varphi_2(x, y)$ , т.е.  $\eta = \psi_2(x, y)$ ;

- в случае уравнения эллиптического типа в качестве  $\xi$  и  $\eta$  берут вещественную и мнимую часть любого из общих интегралов (6) уравнений (3):

$$\xi = \operatorname{Re}(\varphi_3(x, y) + i\psi_3(x, y)) = \varphi_3(x, y),$$

$$\eta = \operatorname{Im}(\varphi_3(x, y) + i\psi_3(x, y)) = \psi_3(x, y).$$

7. Пересчитать все производные, входящие в уравнение (1), используя правило дифференцирования сложной функции:  $U(\xi(x, y); \eta(x, y))$

$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x,$$

$$U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y,$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + U_\xi \cdot \xi_{xx} + U_\eta \cdot \eta_{xx}, \quad (7)$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_y)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_y)^2 + U_\xi \cdot \xi_{yy} + U_\eta \cdot \eta_{yy},$$

$$U_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} \cdot (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x \eta_y + U_\xi \cdot \xi_{xy} + U_\eta \cdot \eta_{xy}.$$

8. Подставить найденные производные в исходное уравнение (1) и привести подобные слагаемые. В результате уравнение (1) примет один из следующих видов:

- в случае уравнения гиперболического типа:

$$\underline{U_{\xi\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;}$$

- в случае уравнения параболического типа:

$$\underline{U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;}$$

- в случае уравнения эллиптического типа:

$$\underline{U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0.}$$

## 1.2. Пример выполнения задачи 1

*Определить тип уравнения*

$$U_{xx} - 4U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - 3U_y + 5U = x^2 \quad (8)$$

*и привести его к каноническому виду.*

Решение:

1. Определим коэффициенты  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$ :

$$A=1, \quad B=-2, \quad C=-21.$$

2. Вычислим выражение  $B^2 - AC$ :

$$B^2 - AC = 4 + 21 = 25.$$

3.  $B^2 - AC = 25 > 0 \Rightarrow$  уравнение гиперболического типа во всей плоскости  $XOY$ .

4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dx dy - 21dx^2 = 0. \quad (9)$$



5. Решим уравнение (9). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно  $dy$ :

$$dy = \frac{-2 \pm \sqrt{25}}{1} dx;$$

$$dy = (-2 \pm 5)dx; \quad (10)$$

$$dy = -7dx, \quad dy = 3dx,$$

б) найдём общие интегралы уравнений (10) (характеристики уравнения(9)):

$$y = -7x + C_1, \quad y = 3x + C_2,$$

$$y + 7x = C_1, \quad y - 3x = C_2.$$

6. Введём характеристические переменные:

$$\xi = y + 7x,$$

$$\eta = y - 3x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдем сначала

$$\xi_x = 7, \xi_y = 1, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = -3, \eta_y = 1, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ -21 \end{array} \left| \begin{array}{l} U_x = 7U_\xi - 3U_\eta, \\ U_y = U_\xi + U_\eta, \\ U_{xx} = 49U_{\xi\xi} - 42U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}, \\ U_{xy} = 7U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta}, \\ U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}. \end{array} \right.$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (8) при соответствующих производных.



8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi} \{49 - 28 - 21\} + U_{\xi\eta} \{-42 - 16 - 42\} + U_{\eta\eta} \{9 + 12 - 21\} + \\ + U_{\xi} \{14 - 3\} + U_{\eta} \{-6 - 3\} + 5U = \frac{(\xi - \eta)^2}{16}.$$

Или после деления на  $-100$  (коэффициент при  $U_{\xi\eta}$ ):

$$U_{\xi\eta} - 0,11U_{\xi} + 0,09U_{\eta} - 0,05U = -\frac{(\xi - \eta)^2}{1600}.$$

**Ответ.** Уравнение (8) является уравнением гиперболического типа на всей плоскости  $XOY$ . Канонический вид

$$U_{\xi\eta} - 0,11U_{\xi} + 0,09U_{\eta} - 0,05U = -\frac{(\xi - \eta)^2}{1600},$$

где  $\xi = y + 7x$ ,  $\eta = y - 3x$ .

### 1.3. Пример выполнения задачи 2

*Определить тип уравнения*

$$25U_{xx} - 10U_{xy} + U_{yy} + U_y + 2U = 5y + 2x \quad (11)$$

*и привести его к каноническому виду.*

Решение:

1. Определим коэффициенты  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$ .  
В нашем примере они постоянны:

$$A=25, \quad B= -5, \quad C=1.$$

2. Вычислим выражение  $B^2 - AC$ :

$$B^2 - AC = 25 - 25 = 0.$$

3.  $B^2 - AC = 0 \Rightarrow$  уравнение параболического типа во всей плоскости  $XOY$ .

4. Запишем уравнение характеристик:

$$25dy^2 + 10dxdy + dx^2 = 0 . \quad (12)$$

5. Решим уравнение (12). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно  $dy$ . Однако в этом случае левая часть уравнения является полным квадратом:

$$\begin{aligned} (5dy + dx)^2 &= 0; \\ 5dy &= -dx; \end{aligned} \quad (13)$$

б) имеем только одно уравнение характеристик (13). Найдём его общий интеграл (уравнения параболического типа имеют только одно семейство вещественных характеристик):

$$\begin{aligned} 5y &= -x + C, \\ 5y + x &= C. \end{aligned}$$

6. Введём характеристические переменные: одну из переменных ( $\xi$ ) вводим как и ранее

$$\xi = 5y + x,$$

а в качестве  $\eta$  берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию, не выражающуюся через  $\xi$ , пусть

$$\eta = x;$$



7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдем сначала

$$\xi_x = 1, \xi_y = 5, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 1, \eta_y = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{l|l} 0 & U_x = U_\xi + U_\eta, \\ 1 & U_y = 5U_\xi, \\ 25 & U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ -10 & U_{xy} = 5U_{\xi\xi} + 5U_{\xi\eta}, \\ 1 & U_{yy} = 25U_{\xi\xi}. \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (11) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi} \{25 - 50 + 25\} + U_{\xi\eta} \{50 - 50\} + U_{\eta\eta} \{25\} + \\ + U_{\xi} \{5\} + 2U = \xi + \eta.$$

Функцию, стоящую в правой части уравнения (11) необходимо также выразить через характеристические переменные.

После деления на 25 (коэффициент при  $U_{\eta\eta}$ ):

$$U_{\eta\eta} + 0,2U_{\xi} + 0,08U = 0,4(\xi + \eta).$$

**Ответ.** Уравнение (11) является уравнением параболического типа на всей плоскости  $XOY$ . Канонический вид

$$U_{\eta\eta} + 0,2U_{\xi} + 0,08U = 0,4(\xi + \eta).$$

где  $\xi = 5y + x$ ,  $\eta = x$ .

## 1.4. Пример выполнения задачи 3

Определить тип уравнения

$$U_{xx} + 4U_{yy} + U_x - 3U_y + U = x^2 \quad (14)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$ :

$$A=1, \quad B=0, \quad C=4.$$

2. Вычислим выражение  $B^2 - AC$ :

$$B^2 - AC = 0 - 4 = -4.$$

3.  $B^2 - AC = -4 < 0 \Rightarrow$  уравнение эллиптического типа во всей плоскости  $XOY$ .

4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dx^2 = 0. \quad (15)$$



5. Решим уравнение (15). Для этого:

а) разрешаем уравнение (15) как квадратное уравнение относительно  $dy$ :

$$dy = \pm 2idx; \quad (16)$$

б) уравнения (16) – это пара комплексно-сопряженных уравнений. Они имеют пару комплексно-сопряженных общих интегралов (уравнения эллиптического типа не имеют вещественных характеристик)

$$\begin{aligned} y &= \pm 2xi + C, \\ y \mp 2xi &= C. \end{aligned} \quad (17)$$

6. Введём характеристические переменные как вещественную и мнимую части одного из общих интегралов (17):

$$\begin{aligned} \xi &= \operatorname{Re}(y + 2xi) = y, \\ \eta &= \operatorname{Im}(y + 2xi) = 2x. \end{aligned}$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдем сначала

$$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 2, \eta_y = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{l} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} U_x = 2U_\eta, \\ U_y = U_\xi, \\ U_{xx} = 4U_{\eta\eta}, \\ U_{yy} = U_{\xi\xi} \end{array} \right.$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (14) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi} \{4\} + U_{\eta\eta} \{4\} + \\ + U_{\xi} \{-3\} + U_{\eta} \{2\} + U = \xi.$$

Или после деления на 4 (коэффициент при  $U_{\xi\xi}$  и  $U_{\eta\eta}$ ):

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 0,75U_{\xi} + 0,5U_{\eta} + 0,25U = \xi.$$

**Ответ.** Уравнение (14) является уравнением эллиптического типа на всей плоскости  $XOY$ . Канонический вид

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 0,75U_{\xi} + 0,5U_{\eta} + 0,25U = \xi.$$

где  $\xi = y$ ,  $\eta = 2x$ .



## 1.5. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

$$1.1. \quad U_{xx} - 8U_{xy} - 9U_{yy} + 21U_x + 3U_y - U = 0.$$

$$1.2. \quad 2U_{xx} - 4U_{xy} - 6U_{yy} - U_x + 7U_y + 3U = 0.$$

$$1.3. \quad 3U_{xx} - 4U_{xy} + U_x - 3U_y + U = 0.$$

$$1.4. \quad -7U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - U_y + 4U = 0.$$

$$1.5. \quad U_{xx} - 2U_{xy} - 8U_{yy} + 3U_y - U = 0.$$

$$1.6. \quad U_{xx} - U_{xy} - 6U_{yy} + 2U_x - U = x.$$

$$1.7. \quad 4U_{xx} - 2U_{xy} - 6U_{yy} + 8U_x + U_y - U = y.$$

$$1.8. \quad U_{xx} - 16U_{yy} + U_x + 3U_y - 6U = 0.$$

$$1.9. \quad U_{xx} - 8U_{xy} + 2U_x - U_y - 5U = x + y.$$

$$1.10. \quad 6U_{xx} - U_{xy} - U_{yy} + U_x + U_y - U = 0.$$

## Задача 2.

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

$$2.1. \quad U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} + 2U_x - U_y + U = x$$

$$2.2. \quad 2U_{xx} - 4U_{xy} + 2U_{yy} + U_x - 3U_y + U = y^2$$

$$2.3. \quad U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + U_x - 3U_y + 5U = 0$$

$$2.4. \quad 3U_{xx} - 6U_{xy} + 3U_{yy} + 5U_x - 3U_y + 2U = y - x$$

$$2.5. \quad 4U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + U_x - 2U_y + U = 0$$

$$2.6. \quad U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} - U_y + U = x + y$$

$$2.7. \quad 9U_{xx} - 6U_{xy} + U_{yy} + 7U_x - 2U_y - U = 0$$

$$2.8. \quad 2U_{xx} - 8U_{xy} + 8U_{yy} + U_x - U_y + U = 0$$

$$2.9. \quad U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 5U_x + U_y - 3U = y$$

$$2.10. \quad 9U_{xx} - 12U_{xy} + 4U_{yy} - 3U_x - 2U_y + U = 0$$