Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными

Задача. *Определить тип уравнения*

$$A(x,y)U_{xx} + 2B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y) \quad (1)$$

и привести его к каноническому виду.

Необходимый теоретический материал

I. Тип уравнения (1) определяется знаком выражения $B^2 - AC$:

- если $B^2 - AC > 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением гиперболического типа в этой точке;
- если $B^2 - AC < 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа в этой точке;
- если $B^2 - AC = 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением параболического типа в этой точке.

Уравнение (1) будет являться уравнением гиперболического, эллиптического, параболического типа в области D, если оно гиперболично, эллиптично, параболично в каждой точке этой области.

Уравнение (1) может менять свой тип при переходе из одной точки (области) в другую. Например, уравнение $yU_{xx} + U_{yy} = 0$ является уравнением эллиптического типа в точках (x,y), $y > 0$; параболического типа в точках $(x,0)$; и гиперболического типа в точках (x,y), $y < 0$.

II. Чтобы привести уравнение к каноническому виду, необходимо:

1. Определить коэффициенты $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$;
2. Вычислить выражение $B^2 - AC$;
3. Сделать вывод о типе уравнения (1) (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$);
4. Записать уравнение характеристик:

$$A(x, y)dy^2 - 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0; \qquad (2)$$

5. Решить уравнение (2). Для этого:

а) разрешить уравнение (2) как квадратное уравнение относительно dy:

$$dy = \frac{B(x, y) \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A(x, y)} dx; \qquad (3)$$

б) найти общие интегралы уравнений (3) (характеристики уравнения (1)):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= C_1, \\ \psi_1(x, y) &= C_2, \end{aligned} \qquad (4)$$

в случае уравнения гиперболического типа;

$$\varphi_2(x, y) = C \ , \qquad (5)$$

в случае уравнения параболического типа;

$$\varphi_3(x, y) \pm i\psi_3(x, y) = C, \qquad (6)$$

в случае уравнения эллиптического типа.

6. Ввести новые (характеристические) переменные ξ и η :

- в случае уравнения гиперболического типа в качестве ξ и η берут общие интегралы (4) уравнений (3), т.е.

$$\xi = \varphi_1(x, y),$$

$$\eta = \psi_1(x, y);$$

- в случае уравнения параболического типа в качестве ξ берут общий интеграл (5) уравнения (3), т.е. $\xi = \varphi_2(x, y)$, в качестве η берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию ψ_2, не выражающуюся через $\varphi_2(x, y)$, т.е. $\eta = \psi_2(x, y)$;
- в случае уравнения эллиптического типа в качестве ξ и η берут вещественную и мнимую часть любого из общих интегралов (6) уравнений (3):

$$\xi = \mathrm{Re}\big(\varphi_3(x, y) + i\,\psi_3(x, y)\big) = \varphi_3(x, y),$$

$$\eta = \mathrm{Im}\big(\varphi_3(x, y) + i\,\psi_3(x, y)\big) = \psi_3(x, y).$$

7. Пересчитать все производные, входящие в уравнение (1), используя правило дифференцирования сложной функции: $U(\xi(x,y);\eta(x,y))$

$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x,$$
$$U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y,$$
$$U_{xx} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + U_\xi \cdot \xi_{xx} + U_\eta \cdot \eta_{xx}, \tag{7}$$
$$U_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_y)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_y)^2 + U_\xi \cdot \xi_{yy} + U_\eta \cdot \eta_{yy},$$
$$U_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_x\xi_y + U_{\xi\eta} \cdot (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_y + U_\xi \cdot \xi_{xy} + U_\eta \cdot \eta_{xy}.$$

8. Подставить найденные производные в исходное уравнение (1) и привести подобные слагаемые. В результате уравнение (1) примет один из следующих видов:

- в случае уравнения гиперболического типа:

$$U_{\xi\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;$$

- в случае уравнения параболического типа:

$$U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;$$

- в случае уравнения эллиптического типа:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0.$$

1.2. Пример выполнения задачи 1

Определить тип уравнения

$$U_{xx} - 4U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - 3U_y + 5U = x^2 \qquad (8)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$:

$$A=1, \quad B= -2, \quad C=-21.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 4 + 21 = 25\,.$$

3. $B^2 - AC = 25 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа во всей плоскости XOY.
4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dxdy - 21dx^2 = 0\,. \qquad (9)$$

5. Решим уравнение (9). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно dy:

$$dy = \frac{-2 \pm \sqrt{25}}{1}\,dx;$$

$$dy = (-2 \pm 5)dx; \tag{10}$$

$$dy = -7dx, \qquad dy = 3dx,$$

б) найдём общие интегралы уравнений (10) (характеристики уравнения(9)):

$$y = -7x + C_1, \qquad y = 3x + C_2,$$

$$y + 7x = C_1, \qquad y - 3x = C_2.$$

6. Введём характеристические переменные:

$$\xi = y + 7x,$$

$$\eta = y - 3x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение. Найдем сначала

$$\xi_x = 7, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = -3, \eta_y = 1, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l}
2 & U_x = 7U_\xi - 3U_\eta, \\
-3 & U_y = U_\xi + U_\eta, \\
1 & U_{xx} = 49U_{\xi\xi} - 42U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}, \\
1 & U_{xy} = 7U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta}, \\
-21 & U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.
\end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (8) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{49-28-21\}+U_{\xi\eta}\{-42-16-42\}+U_{\eta\eta}\{9+12-21\}+$$

$$+U_{\xi}\{14-3\}+U_{\eta}\{-6-3\}+5U=\frac{(\xi-\eta)^2}{16}.$$

Или после деления на -100 (коэффициент при $U_{\xi\eta}$):

$$U_{\xi\eta}-0{,}11U_{\xi}+0{,}09U_{\eta}-0{,}05U=-\frac{(\xi-\eta)^2}{1600}.$$

Ответ. Уравнение (8) является уравнением гиперболического типа на всей плоскости XOY. Канонический вид

$$U_{\xi\eta}-0{,}11U_{\xi}+0{,}09U_{\eta}-0{,}05U=-\frac{(\xi-\eta)^2}{1600},$$

где $\xi=y+7x,\quad \eta=y-3x.$

1.3. Пример выполнения задачи 2

Определить тип уравнения

$$25U_{xx} - 10U_{xy} + U_{yy} + U_{y} + 2U = 5y + 2x \qquad (11)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$.
   В нашем примере они постоянны:

   $A=25, \quad B= -5, \quad C=1.$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

   $$B^2 - AC = 25 - 25 = 0.$$

3. $B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ уравнение параболического типа во всей плоскости XOY.

4. Запишем уравнение характеристик:

$$25dy^2 + 10dxdy + dx^2 = 0 \ . \qquad (12)$$

5. Решим уравнение (12). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно dy. Однако в этом случае левая часть уравнения является полным квадратом:

$$(5dy + dx)^2 = 0;$$

$$5dy = -dx; \qquad (13)$$

б) имеем только одно уравнение характеристик (13). Найдём его общий интеграл (уравнения параболического типа имеют только одно семейство вещественных характеристик):

$$5y = -x + C,$$

$$5y + x = C.$$

6. Введём характеристические переменные: одну из переменных (ξ) вводим как и ранее

$$\xi = 5y + x,$$

а в качестве η берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию, не выражающуюся через ξ, пусть

$$\eta = x;$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение. Найдем сначала

$$\xi_x = 1, \xi_y = 5, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 1, \eta_y = 0, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l} 0 & U_x = U_\xi + U_\eta, \\ 1 & U_y = 5U_\xi, \\ 25 & U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ -10 & U_{xy} = 5U_{\xi\xi} + 5U_{\xi\eta}, \\ 1 & U_{yy} = 25U_{\xi\xi}. \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (11) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{25-50+25\}+U_{\xi\eta}\{50-50\}+U_{\eta\eta}\{25\}+$$
$$+U_{\xi}\{5\}+2U=\xi+\eta.$$

Функцию, стоящую в правой части уравнения (11) необходимо также выразить через характеристические переменные.

После деления на 25 (коэффициент при $U_{\eta\eta}$):

$$U_{\eta\eta}+0{,}2U_{\xi}+0{,}08U=0{,}4(\xi+\eta).$$

Ответ. Уравнение (11) является уравнением параболического типа на всей плоскости XOY. Канонический вид

$$U_{\eta\eta}+0{,}2U_{\xi}+0{,}08U=0{,}4(\xi+\eta).$$

где $\xi=5y+x,\quad \eta=x.$

1.4. Пример выполнения задачи 3

Определить тип уравнения

$$U_{xx} + 4U_{yy} + U_x - 3U_y + U = x^2 \qquad (14)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$:

$$A=1, \quad B=0, \quad C=4.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 0 - 4 = -4.$$

3. $B^2 - AC = -4 < 0 \Rightarrow$ уравнение эллиптического типа во всей плоскости XOY.

4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dx^2 = 0 \ . \qquad (15)$$

5. Решим уравнение (15). Для этого:

а) разрешаем уравнение (15) как квадратное уравнение относительно dy:

$$dy = \pm 2i dx\,; \tag{16}$$

б) уравнения (16) – это пара комплексно-сопряженных уравнений. Они имеют пару комплексно-сопряженных общих интегралов (уравнения эллиптического типа не имеют вещественных характеристик)

$$\begin{gathered} y = \pm 2xi + C, \\ y \mp 2xi = C. \end{gathered} \tag{17}$$

6. Введём характеристические переменные как вещественную и мнимую части одного из общих интегралов (17):

$$\xi = \mathrm{Re}(y + 2xi) = y,$$

$$\eta = \mathrm{Im}(y + 2xi) = 2x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение. Найдем сначала

$$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 2, \eta_y = 0, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l} 1 & U_x = 2U_\eta, \\ -3 & U_y = U_\xi, \\ 1 & U_{xx} = 4U_{\eta\eta}, \\ 4 & U_{yy} = U_{\xi\xi} \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (14) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{4\}+U_{\eta\eta}\{4\}+$$
$$+U_{\xi}\{-3\}+U_{\eta}\{2\}+U=\xi.$$

Или после деления на 4 (коэффициент при $U_{\xi\xi}$ и $U_{\eta\eta}$):

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}-0{,}75U_{\xi}+0{,}5U_{\eta}+0{,}25U=\xi.$$

Ответ. Уравнение (14) является уравнением эллиптического типа на всей плоскости XOY. Канонический вид

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}-0{,}75U_{\xi}+0{,}5U_{\eta}+0{,}25U=\xi.$$

где $\xi=y, \quad \eta=2x.$

1.5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

1.1. $U_{xx} - 8U_{xy} - 9U_{yy} + 21U_x + 3U_y - U = 0$.

1.2. $2U_{xx} - 4U_{xy} - 6U_{yy} - U_x + 7U_y + 3U = 0$.

1.3. $3U_{xx} - 4U_{xy} + U_x - 3U_y + U = 0$.

1.4. $-7U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - U_y + 4U = 0$.

1.5 $U_{xx} - 2U_{xy} - 8U_{yy} + 3U_y - U = 0$.

1.6 $U_{xx} - U_{xy} - 6U_{yy} + 2U_x - U = x$.

1.7 $4U_{xx} - 2U_{xy} - 6U_{yy} + 8U_x + U_y - U = y$.

1.8 $U_{xx} - 16U_{yy} + U_x + 3U_y - 6U = 0$.

1.9 $U_{xx} - 8U_{xy} + 2U_x - U_y - 5U = x + y$.

1.10 $6U_{xx} - U_{xy} - U_{yy} + U_x + U_y - U = 0$.

Задача 2.

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

2.1. $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} + 2U_x - U_y + U = x$

2.2. $2U_{xx} - 4U_{xy} + 2U_{yy} + U_x - 3U_y + U = y^2$

2.3. $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + U_x - 3U_y + 5U = 0$

2.4. $3U_{xx} - 6U_{xy} + 3U_{yy} + 5U_x - 3U_y + 2U = y - x$

2.5. $4U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + U_x - 2U_y + U = 0$

2.6. $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} - U_y + U = x + y$

2.7. $9U_{xx} - 6U_{xy} + U_{yy} + 7U_x - 2U_y - U = 0$

2.8. $2U_{xx} - 8U_{xy} + 8U_{yy} + U_x - U_y + U = 0$

2.9. $U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 5U_x + U_y - 3U = y$

2.10. $9U_{xx} - 12U_{xy} + 4U_{yy} - 3U_x - 2U_y + U = 0$