Астраханский государственный технический университет

# Дифференциальное исчисление функции одной переменной

# Производная, основные понятия и правила дифференцирования

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$. Введем в рассмотрение *приращения* функции и ее аргумента в этой точке:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0), \Delta x = x = x_0, (\Delta x \neq 0)$$

Так как $x = x_0 + \Delta x$, то приращение функции можно также представить в виде:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

*Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* $x_0$ называется число (обозначают: $y', y'_x, \frac{dy}{dx}, f', f'_x, \frac{df}{dx}$), равное:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если $x_0$ заменить на $x$, то получается, что производная есть некоторая функция $y'(x)$, произведенная из данной функции.

# Геометрический смысл производной

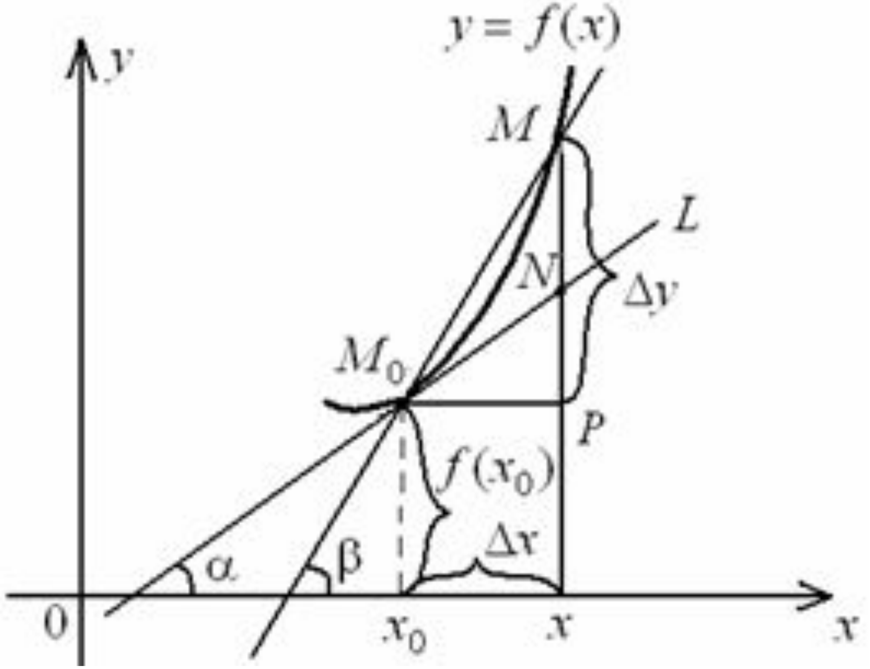
Возьмем на непрерывной кривой, заданной функцией $y = f(x)$ точки $M_0$ и $M$. Прямую $M_0 M$ называют *секущей*. Пусть точка $M$, двигаясь вдоль кривой, неограниченно приближается к точке $M_0$. Тогда секущая, поворачиваясь около точки $M_0$, стремится к некоторому *предельному* положению – прямой $L$. Эта прямая называется *касательной к кривой в точке* $M_0$.

Коротко говорят, что *касательная* – это предельное положение секущей.

Угловой коэффициент секущей равен: $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta$.

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Итак, производная $y'(x_0)$ есть *угловой коэффициент касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$. В этом заключается *геометрический смысл* производной.




*Уравнение касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0$: $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярна касательной и проходящая через точку $M_0$, называется *нормалью к кривой*.

*Уравнение нормали*: $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$.

# Физический смысл производной

Пусть материальная точка движется прямолинейно по некоторой прямой по закону $y = f(x)$, где $x$ – время, $y$ – положение точки на прямой в этот момент. Тогда производная $y'(x)$ – это *скорость* (мгновенная) движения точки в момент времени $x$.

Если $y = f(x)$ описывает какой-либо процесс, производная $y'$ есть *скорость протекания* этого *процесса*. В этом состоит *физический смысл* производной.

# Понятие дифференцируемости функции в точке

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$ называется *дифференцируемой на этом интервале*.

Если $f'(x)$ непрерывна, то это означает, что в каждой точке графика функции можно провести касательную, плавно (непрерывно) изменяющую свое положение при переходе от точки к точке. Такая линия называется *гладкой*. В этом состоит *геометрический смысл дифференцируемости* функции на интервале.

Если $f(x)$ элементарная функция, то функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны в своих областях определения; если $f(x)$ не дифференцируема в $x_0$, то в ней нет касательной или она вертикальная.

*Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции* состоит в следующем.

Если функция дифференцируема в некоторой точке $x_0$, то она и непрерывна в ней. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Очевидно, что свойство дифференцируемости является более жестким, чем свойство непрерывности функции, то есть множество (класс) дифференцируемых функций является более узким, чем класс непрерывных функций.

Отметим, что операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

# Правила дифференцирования

1. $(u(x) \pm v(x))` = u`(x) \pm v`(x)$
2. $(u(x)v(x))`= u`(x)v(x) + u(x)v`(x)$
3. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
4. Дифференцирование сложной функции. Пусть функция $x = \psi(t)$ дифференцируема в точке t, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = \psi(t)$. Тогда функция $y=f(\psi(t))$ дифференцируема в точке t, а производная вычисляется по формуле $(f(\psi(t)) )`= f`(x)\psi`(t)$

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. Пусть $y = u(x) \pm v(x) \Rightarrow \Delta y = (u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x)) = (u(x + \Delta x) - u(x)) \pm (v(x + \Delta x) - v(x))$

Разделив данное равенство на $\Delta$ x и переходя к пределу, получим $(u(x) \pm v(x))`= u`(x) \pm v`(x)$.□

2. $y=(u(x)v(x))$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\pm u(x+\Delta x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)(v(x+\Delta x)-v(x))+v(x)(u(x+\Delta x)-u(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\Delta v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\Delta u(x)}{\Delta x}=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).\square$$

3. $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}, \Delta y=\left(\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)=\dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}=$

$$=\frac{(u(x+\Delta x)-u(x))v(x)-u(x)(v(x+\Delta x)-v(x))}{v(x+\Delta x)v(x)}=$$

$$=\frac{\Delta u(x)v(x)-u(x)\Delta v(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

Вычисляя предел отношения $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.\square$$

4. Из условий дифференцируемости функций $y = f(x)$ , $x = \psi(t)$ следует,

$$\Delta y = f`(x)\Delta x + \alpha\Delta x,\ \Delta x = \psi`(t)\Delta t + \beta\Delta t,$$

где $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, $\beta\Delta t = o(\Delta t)$

Тогда будем иметь

$$\Delta y = f`(x)\Delta x + \alpha\Delta x = f`(x)\Delta x + \alpha(\psi`(t)\Delta t + \beta\Delta t).$$

Разделим левую и правую части равенства на $\Delta t$ В результате получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha\psi'(t) + \alpha\beta$$

Вычислим предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}(\alpha\psi'(t) + \alpha\beta) = f'(x)\psi'(t).\square$$

# Вычисление производных элементарных функций
# Производные тригонометрических функций

y = sin x, y\`= cosx

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin(x+\Delta x)-sinx}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2cos(x+\Delta x/2)sin(\Delta x/2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}cos(x+\Delta x/2)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=cosx,$$

$$y=cos\,x,\ y'=-sinx$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cos(x+\Delta x)-cosx}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2sin(x+\Delta x/2)sin(\Delta x/2)}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}sin(x+\Delta x/2)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=-sinx,$$

$$y=tgx=\frac{sinx}{cosx}$$

$$y'=\frac{sin'xcosx-sinxcos'x}{cos^2x}=\frac{cos^2x+sin^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}$$

Аналогичным образом вычисляется производная функции $y=ctgx$

$$ctg'x=-\frac{1}{sin^2x}$$

# Производная логарифмической функции

$$y = log_a x,\ y' = \frac{1}{xlna}$$

$$\Delta y = log_a(x + \Delta x) - log_a x = log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$(log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot log_a \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

Воспользуемся вторым замечательным пределом

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot log_a \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot log_a e = \frac{1}{xlna}$$

# Производная обратной функции

**Т е о р е м а**

Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) в некоторой окрестности точки x0 и является дифференцируемой в этой точке, то существует обратная функция $x = \phi(y)$,которая имеет производную $\phi`(y_0) = 1/f`(x_0)$ в точке $y_0 = f(x_0)$.

**Д о к а з а т е л ь с т в о**

Так как функция возрастает (убывает) в некоторой окрестности точки $x_0$, она имеет обратную функцию. Из условия дифференцируемости следует непрерывность функции. Тогда, если $\Delta y \to 0$, то $\Delta x \to 0$. В этом случае имеем:

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = 1/f'(x_0)$$

# Производная обратной функции

Функция $y = a^x$ является обратной к фунуции $x = \ln_a y$. Пользуемся формулой $y' = \frac{1}{log_a' y} = \frac{1}{1/ylna} = ylna = a^x lna$

# Производные обратных тригонометрических функций

Функция $y = arcsin\, x$, $x \in [-1;\, 1]$ служит обратной для функции $x = sin\, y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right]$ Тогда, $(arcsin\, x)' = \frac{1}{(sin\, y)'} = \frac{1}{cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Аналогичным образом выводится формула $(arccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Вычислим производную функции $y = arctg\, x$, $x \in (-\infty;\, +\infty)$. Эта функция является обратной для функции $x = tg\, y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$(y = arctg\, x)' = \frac{1}{(tg\, y)'} = \frac{1}{1/cos^2 x} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Аналогичным образом выводится формула $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

# Производные логарифмических функций

Если функция y=f(x) положительна и дифференцируема, то справедливы следующие равенства:

$$\ln y = \ln f(x),\ (\ln f(x))` = y`/y$$

Величина, определяемая последней формулой, называется логарифмической производной. Ей удобно пользоваться для вычисления производных от функций вида $y = u(x)^{v(x)}$

Предполагается, что функции u(x), v(x) являются дифференцируемыми и u(x) > 0 Прологарифмируем равенство $y = u(x)^{v(x)}$ $\ln y = = v(x)\ln u(x)$.

Тогда

$$y'/y = (v(x))' \ln u(x) + v(x)\frac{(u(x))'}{u(x)}$$

Откуда получаем

$$y' = u(x)^{v(x)}\left((v(x))' \ln u(x) + v(x)\frac{(u(x))'}{u(x)}\right)$$

# Производная степенной функции

$$y = x^a,\ x > 0.$$

$$\ln y = a\ln x =\Rightarrow y`/y = a/x =\Rightarrow y` = ya/x = ax^{a-1}$$

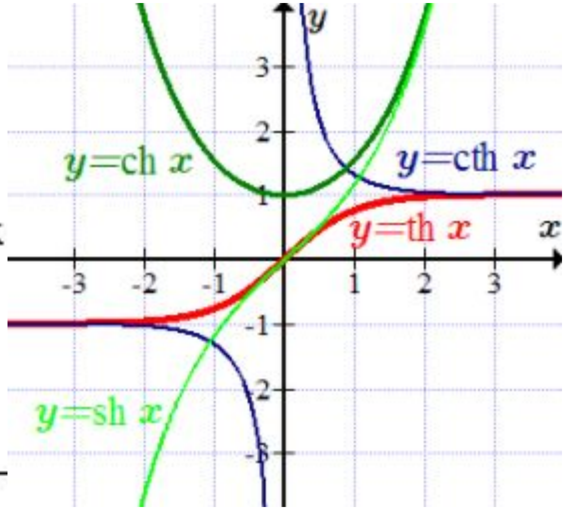
В математике, механике и других науках используются следующие функции, называемые *гиперболическими* и определяемые формулами:

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ –}$$

гиперболические синус и косинус;

$$y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{и} \quad y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ –}$$

гиперболические тангенс и котангенс.




1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
17. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
18. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
19. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

# Таблица производных основных элементарных функций

# Спасибо за внимание!