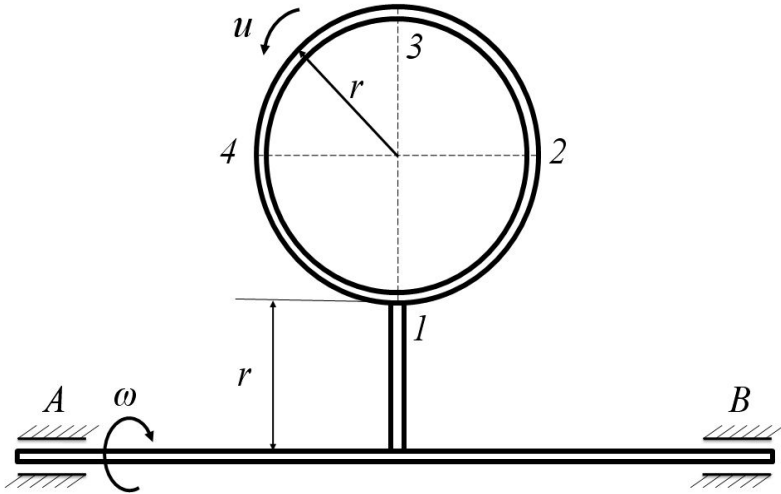


Пример



Полое кольцо радиусом r жестко соединено с валом AB , и притом так, что ось вала расположена в плоскости кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в направлении стрелки с постоянной относительной скоростью u .

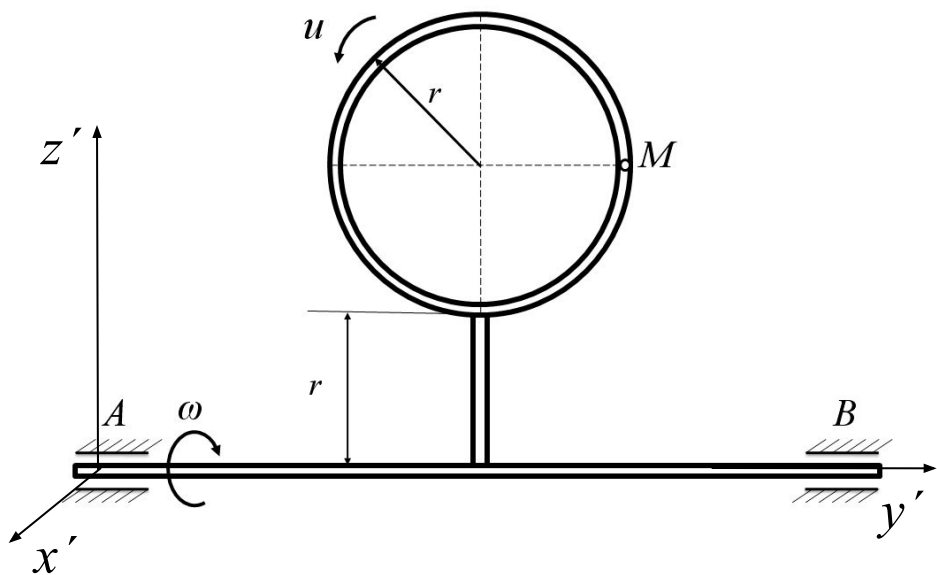
Вал AB вращается по направлению движения стрелки часов, если смотреть по оси вращения от B к A . Угловая скорость вала ω постоянна.

Определить скорость и ускорение абсолютного движения частиц жидкости, расположенных в положениях 1, 2, 3 и 4.

Определим *скорость* и *ускорение* *абсолютного* движения частиц жидкости, расположенных в положении 2 (точка M).

Точка M совершает *сложное* движение.

Выберем системы координат.



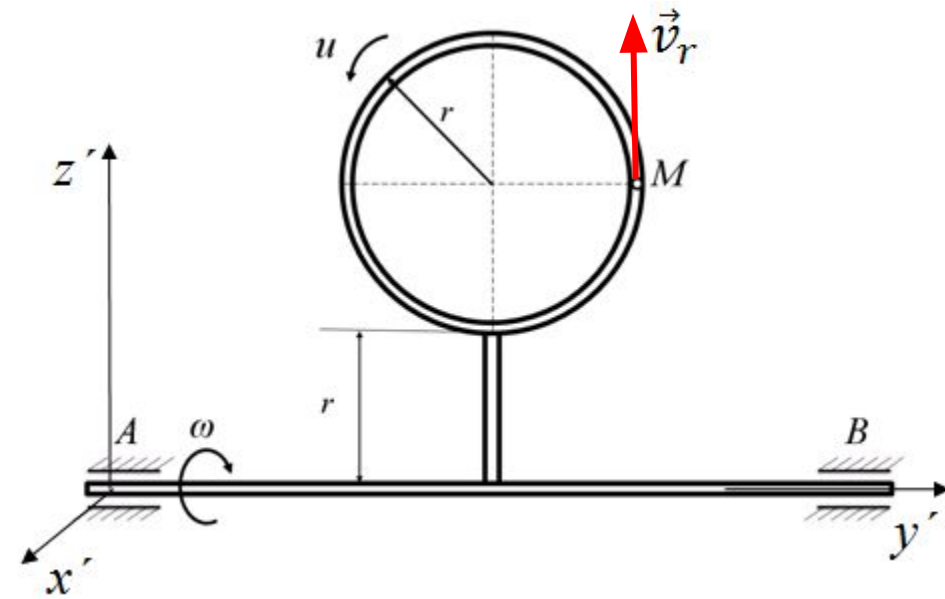
$A x'y'z'$ – основная (неподвижная) система координат;

Подвижную систему координат жестко свяжем с кольцом.

Относительное движение точки M .

Для определения относительного движения точки мысленно остановим подвижную систему координат.

Оставшееся движение точки – *относительное*.



В нашем случае относительное движение точки M является криволинейным по кольцу радиусом r с постоянной скоростью u .

$$v_r = u = \text{const.}$$

Относительное ускорение точки M определяется равенством

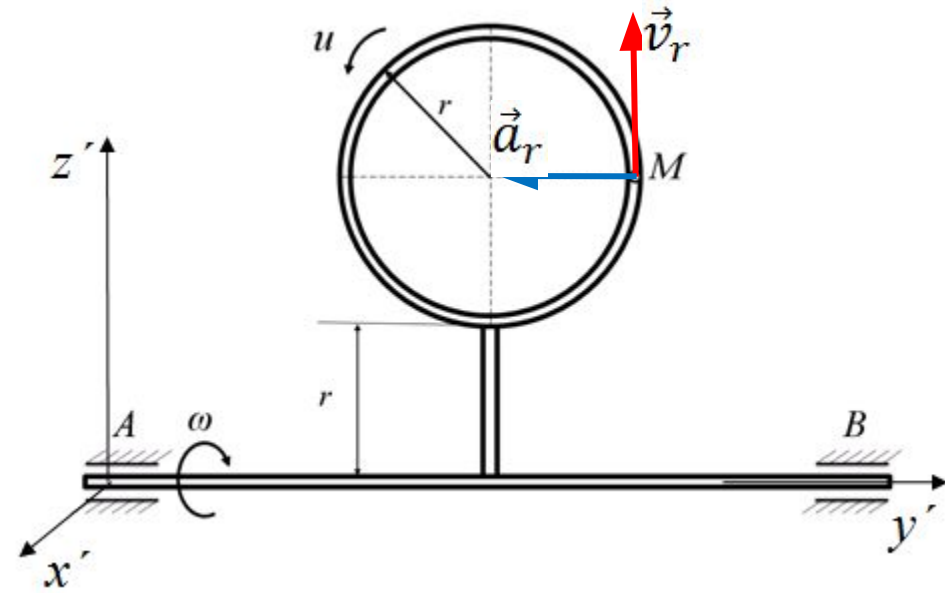
$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n,$$

где

$$a_r^\tau = \dot{v}_r = 0,$$

так как $v_r = u = \text{const}$;

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{u^2}{r}.$$



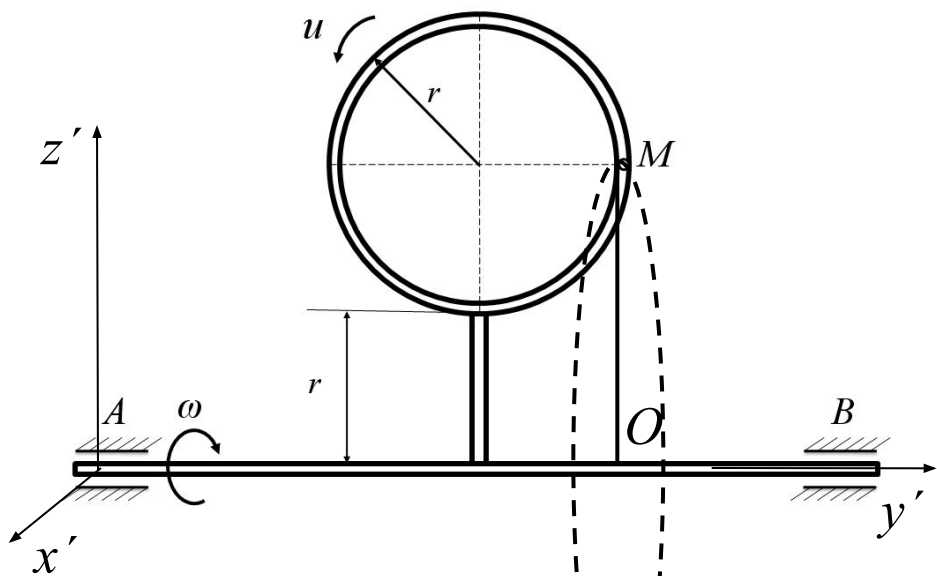
Тогда

$$a_r = \frac{u^2}{r}.$$

Переносное движение точки M .

Для определения переносного движения точки мысленно остановим его относительное движение.

Переносные скорость и ускорение – это скорость и ускорение точки M при остановленном относительном движении.



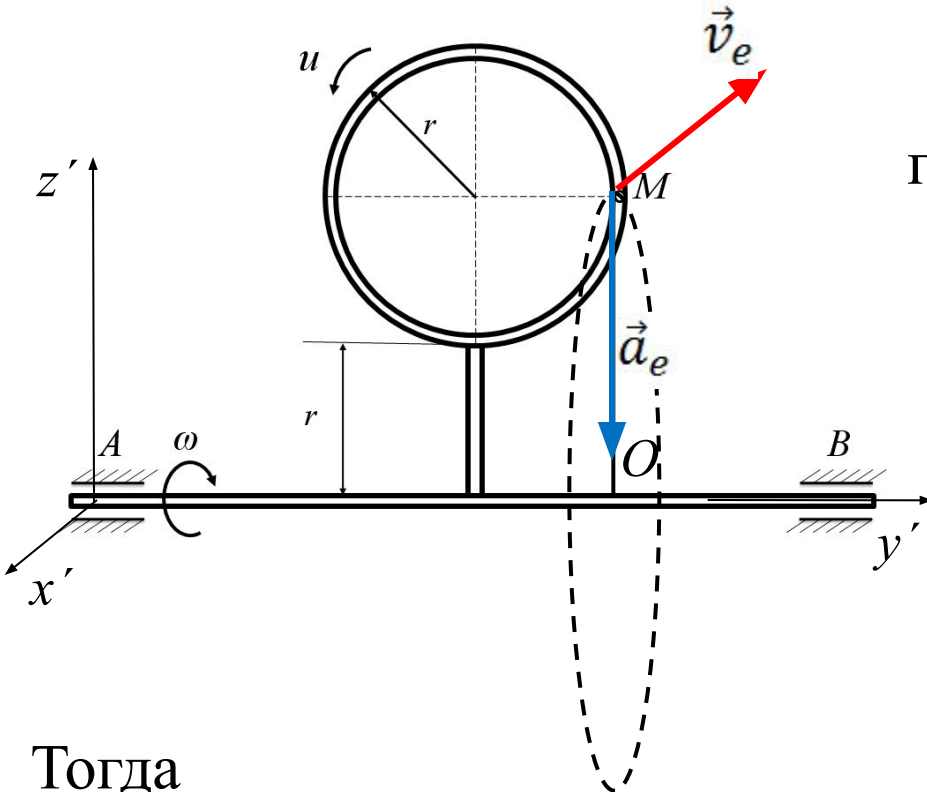
В нашем случае переносное движение – вращательное движение кольца с постоянной угловой скоростью ω .

Траектория движения точки M кольца – окружность радиусом $R_{\text{вр}} = OM$, $OM = 2r$.

Вычислим *переносную скорость* точки M .

$$v_e = \omega \cdot OM = 2r\omega, \quad \vec{v}_e \parallel Ax'.$$

Вычислим *переносное ускорение* точки M .



где

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\text{вп}} + \vec{a}_e^{\text{ос}},$$

$$a_e^{\text{вп}} = \varepsilon \cdot OM = 0,$$

так как $\omega = \text{const}$,

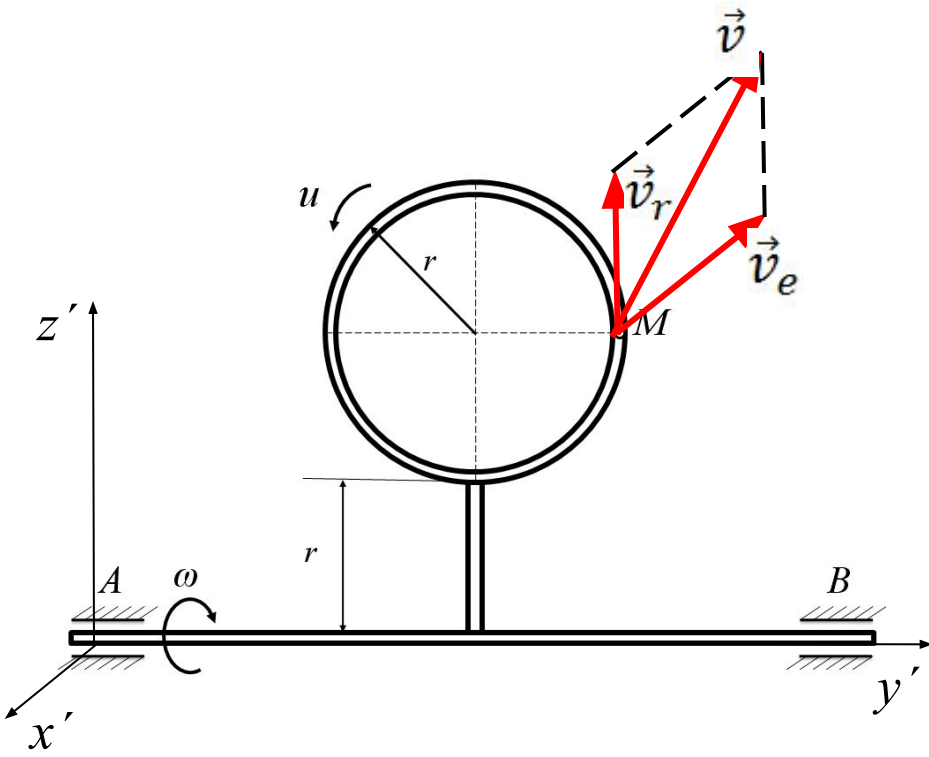
$$a_e^{\text{ос}} = \omega^2 \cdot OM = 2r\omega^2.$$

Тогда

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\text{ос}}, \quad a_e = 2r\omega^2.$$

Вычислим абсолютную скорость точки M .

По теореме о сложении скоростей

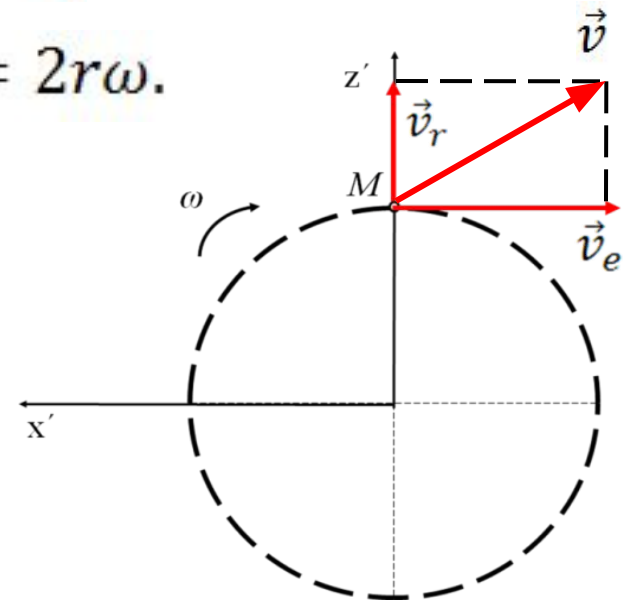


$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

где

$$v_r = u,$$

$$v_e = 2r\omega.$$



Так как $\vec{v}_r \perp \vec{v}_e$, то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{u^2 + 4r^2\omega^2}.$$

Вычислим *абсолютное ускорение* точки M .

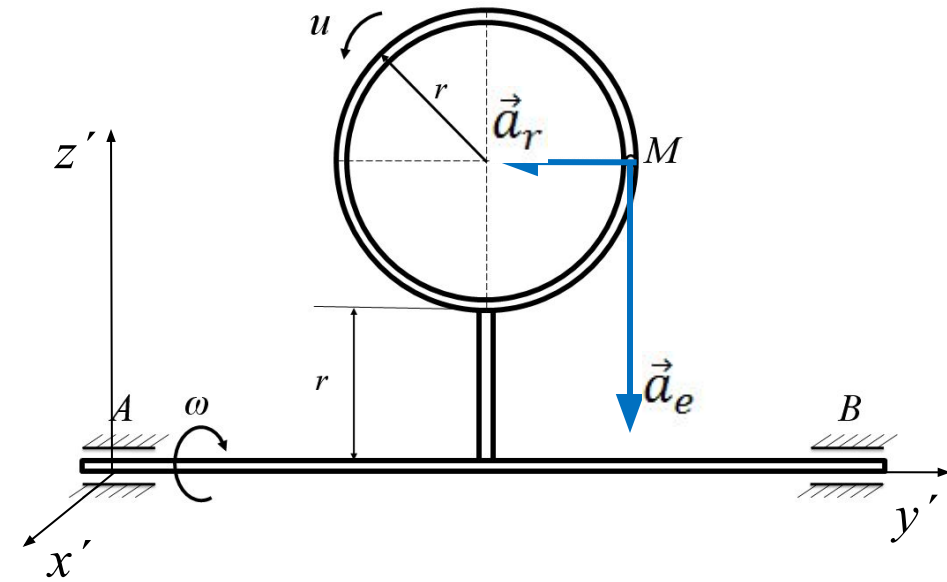
По теореме о сложении ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

где

$$a_r = \frac{u^2}{r},$$

$$a_e = 2r\omega^2.$$



Вычислим ускорение Кориолиса.

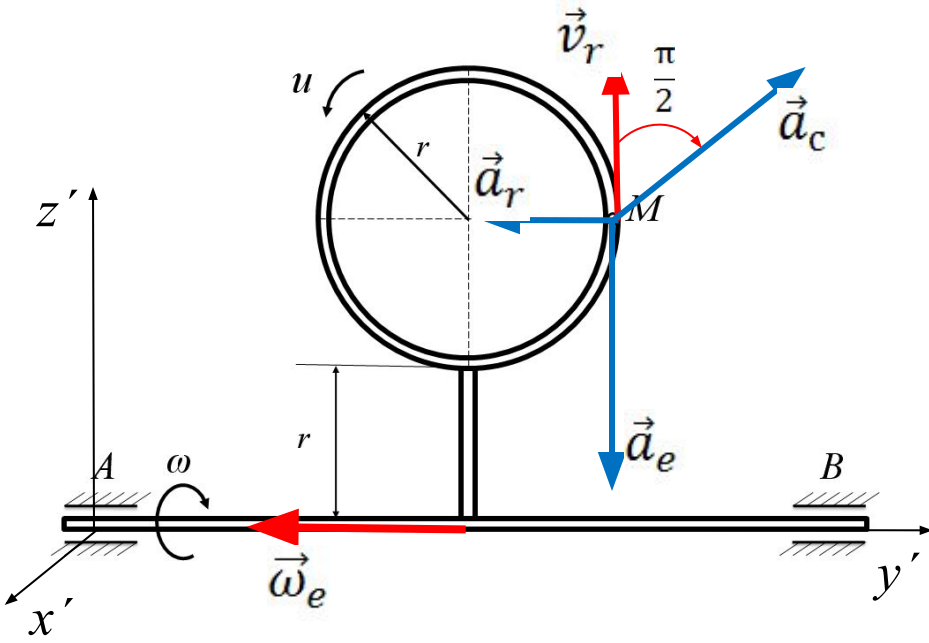
$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \quad a_c = 2 \omega_e v_r \sin \alpha,$$

где

$$v_r = u,$$

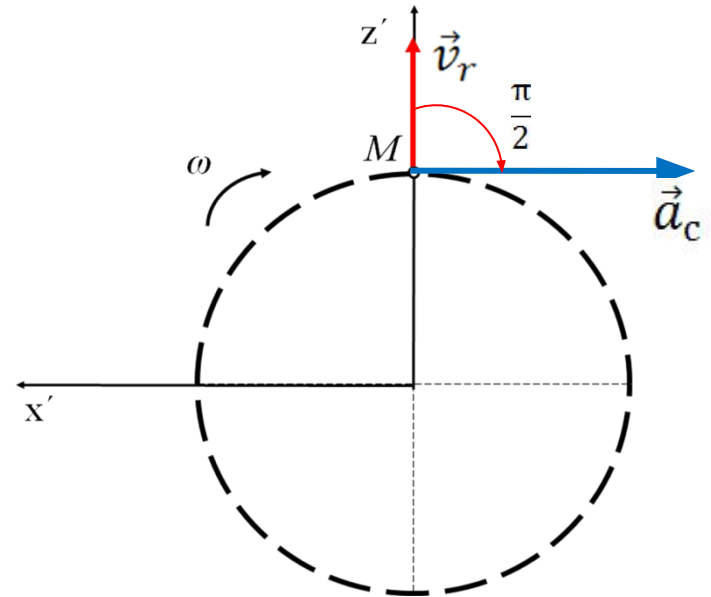
$$\omega_e = \omega,$$

$$\sin \alpha = 1, \quad \text{так как } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$



Тогда

$$a_c = 2\omega u, \quad \vec{a}_c \parallel Ax'.$$



Так как *относительное, переносное ускорения* и *ускорение Кориолиса* взаимно перпендикулярны, то модуль абсолютного ускорения определяется равенством

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_c^2 + a_e^2 + a_r^2} = \sqrt{4\omega^2 u^2 + 4r^2\omega^4 + \frac{u^4}{r^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{4r^2\omega^2 u^2 + 4r^4\omega^4 + u^4}{r^2}} = \sqrt{\frac{4r^2\omega^2 u^2 + (2r^2\omega^2)^2 + (u^2)^2}{r^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(2r^2\omega^2 + u^2)^2}{r^2}} = 2r\omega^2 + \frac{u^2}{r} \end{aligned}$$