Бином Ньютона
Треугольник Паскаля
Факториал

Бином Ньютона.

Широко используемая формула бинома Ньютона имеет чисто комбинаторную природу и является алгебраической версией треугольника Паскаля.

$$(a+b)^0 = \mathbf{1}$$

$$(a+b)^1 = a^1b^0 + a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = a^2b^0 + \mathbf{2}a^1b^1 + a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3b^0 + \mathbf{3}a^2b^1 + \mathbf{3}a^1b^2 + a^0b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4b^0 + \mathbf{4}a^3b^1 + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}a^1b^3 + a^0b^4$$

……………………………………………………………………

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n$$

Выбор пути (направо или налево) здесь заменяется выбором буквы ("a" или "b").

Следствие: полагая $a=b=1$, **получим**

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = \mathbf{2}^n$$

Бином Ньютона – это формула, выражающая выражение (*a* + *b*)*n* в виде многочлена.

Широко известные формулы сокращенного умножения квадрата суммы и разности, куба суммы и разности, являются частными случаями бинома Ньютона.

Когда степень бинома невысока, коэффициенты многочлена могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого треугольника Паскаля. (Блез Паскаль (1623 – 1662) – французский математик).

- самой известной математической работой Блеза Паскаля является трактат об "арифметическом треугольнике", образованном биномиальными коэффициентами (треугольник Паскаля), который имеет применение в теории вероятностей и обладает удивительными и занимательными свойствами .

Треугольник Паскаля.

Рассмотрим на первый взгляд другой математический объект: известный со школы арифметический треугольник, у которого сумма любых двух чисел дает число, расположенное под ними.

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

……………………………………….

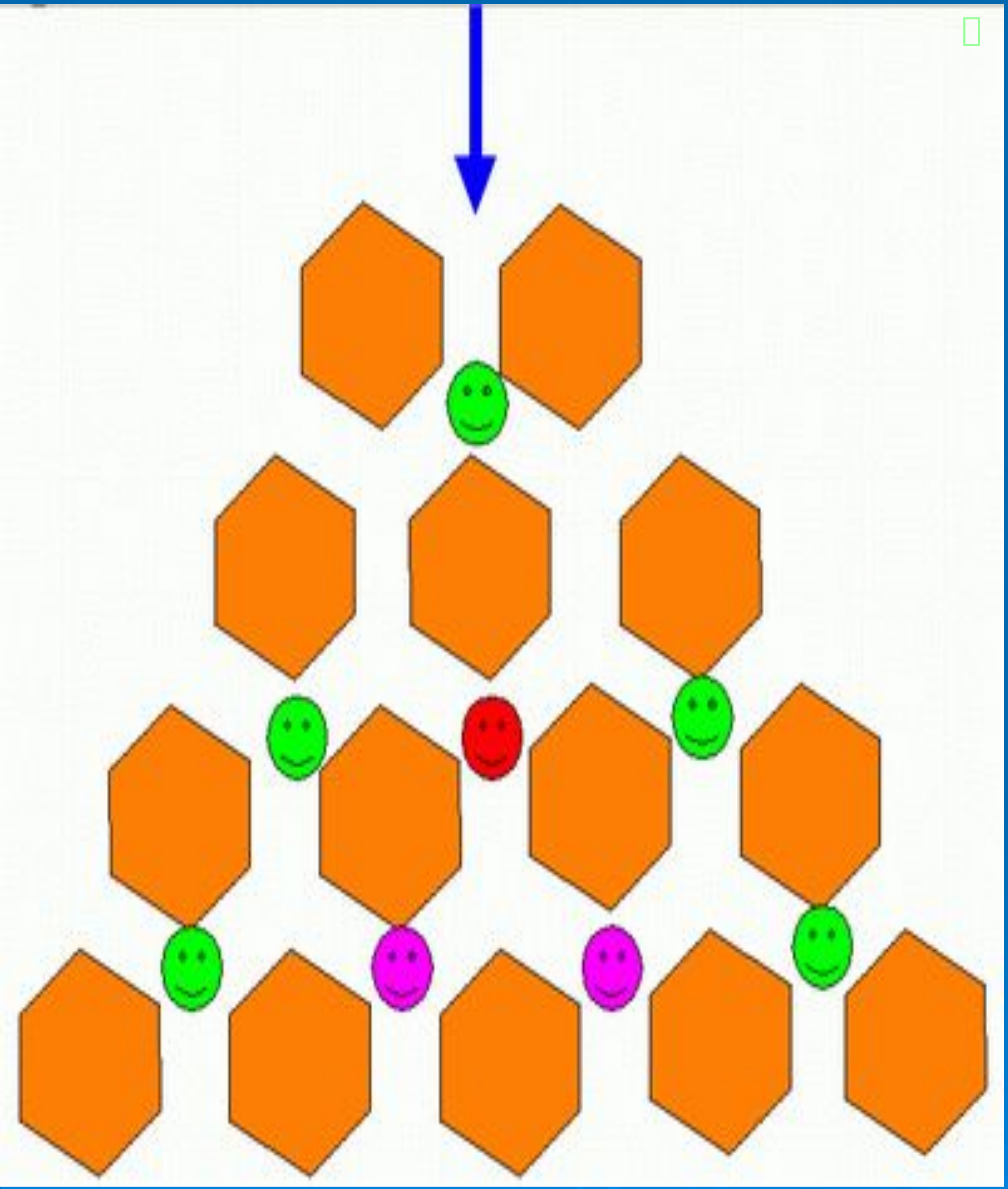
(здесь, например, 3=2+1, 6=3+3).

Будем рассматривать «косые» линии чисел как «улицы», а сами числа как «перекрестки». При этом числа на перекресток показывают число путей, ведущих «сверху» в данную точку. Для небольших чисел это проверяется непосредственно.

треугольник Паскаля был известен задолго до 1653 года - даты выхода "Трактата об арифметическом треугольнике".

- Так, этот треугольник воспроизведен на титульном листе учебника арифметики,
- написанном в начале XVI Петром Апианом, астрономом из Ингольтштадского университета. Изображен треугольник и на иллюстрации в книге одного китайского математика, выпущенной в 1303 году. Омар Хайям, бывший не только философом и поэтом, но и математиком, знал о существовании треугольника около 1100 года, в свою очередь, заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.

Мартин Гарднер пишет в книге "Математические новеллы" (М., Мир, 1974): "Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В тоже время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике



Предположим, что вы входите в город как показано на схеме синей стрелкой, и можете двигаться только вперед, точнее, все время выбирая, вперед налево, или вперед направо. Узлы, в которые можно попасть только единственным образом, отмечены зелеными смайликами, точка, в которую можно попасть двумя способами, показана красным смаликом, а тремя, соответственно, розовым. Это один из вариантов построения треугольника, предложенный Гуго Штейнгаузом в его классическом "Математическом калейдоскопе".

Треугольник Паскаля

$$(a+b)^n = \sum C_n^k a^k b^{n-k}$$

0: 1

1: 1 1

2: 1 2 1

3: 1 3 3 1

4: 1 4 6 4 1

5: 1 5 10 10 5 1

6: 1 6 15 20 15 6 1

7: 1 7 21 35 35 21 7 1

8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1

9: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

10: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

11: 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

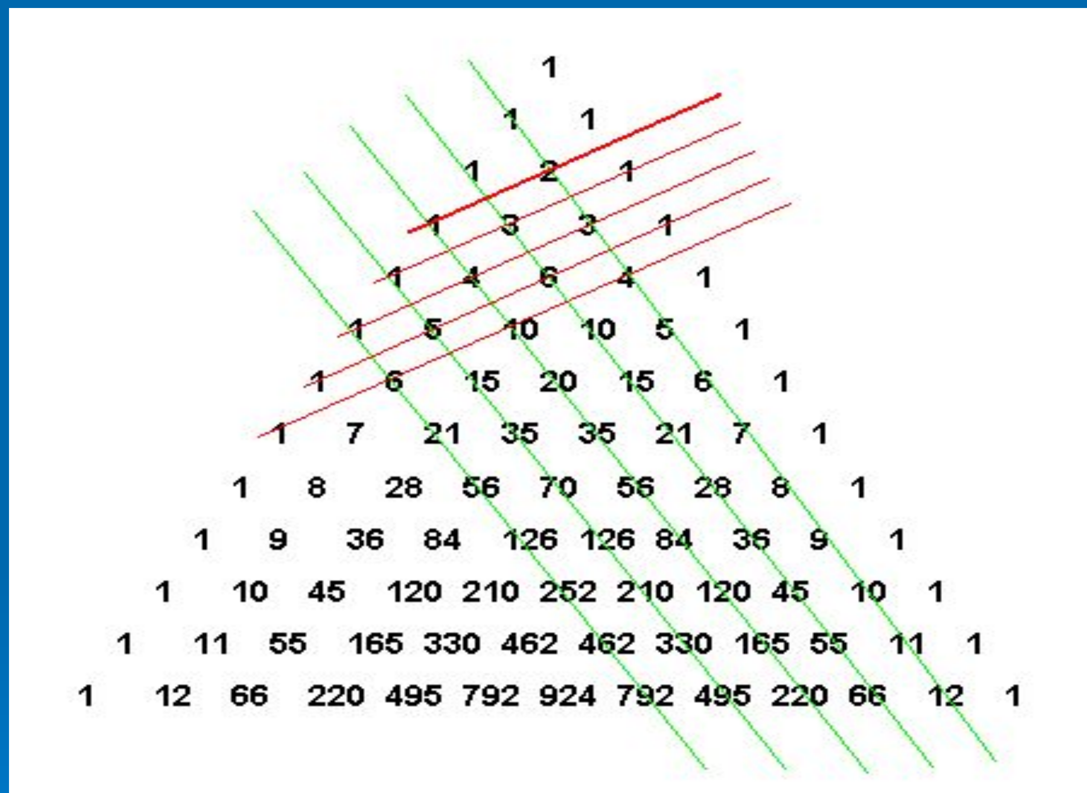
12: 1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

13: 1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

14: 1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

А еще проще объясняют устройство треугольника Паскаля слова: каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел.

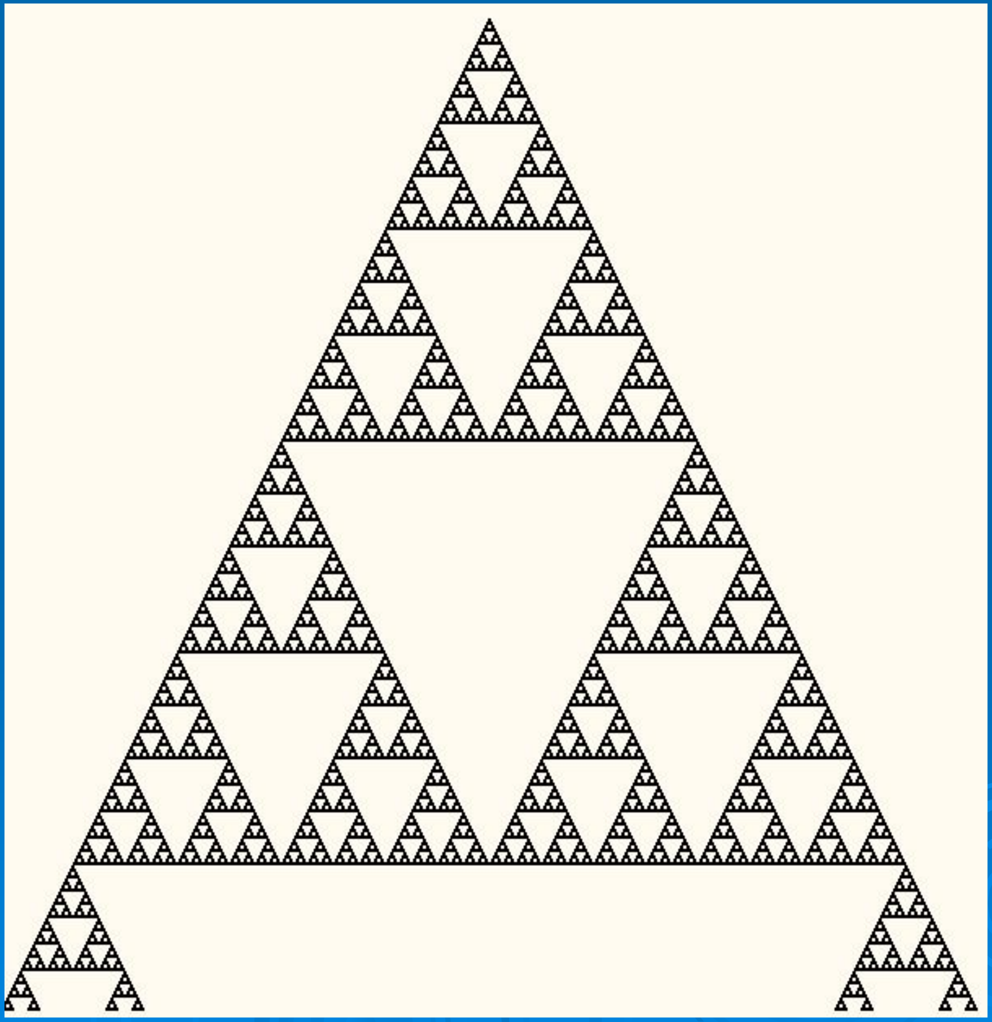
Все элементарно, но сколько в этом таится чудес.



- Суммы чисел, стоящих вдоль не столь круто падающих диагоналей (на рисунке отмечены красными линиями) образуют хорошо известную постоянным читателям последовательность Фибоначчи

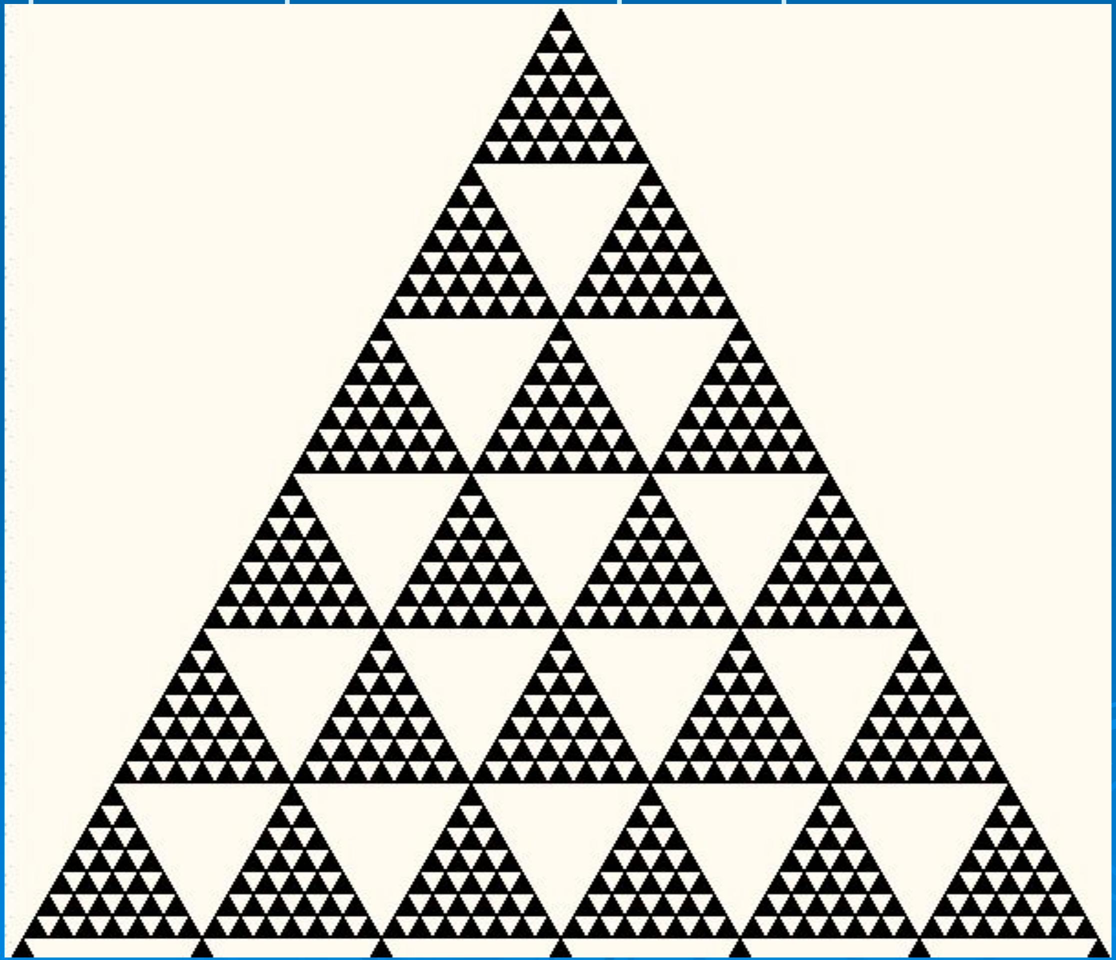
Четность числа легко определить сравнением остатка от деления на два с нулем, для четного остаток нуль, для нечетного - единица. А для определения остатка можно использовать функцию Mod,

имеющуюся практически во всех языках программирования.



Движемся далее - пробуем проверять не четность, а остаток от деления на другие числа, и каждый раз удивляемся открывающимся видом треугольника. Поиграв некоторое время, заметим, что при задании числа, деление на которое мы проверяем, простым,

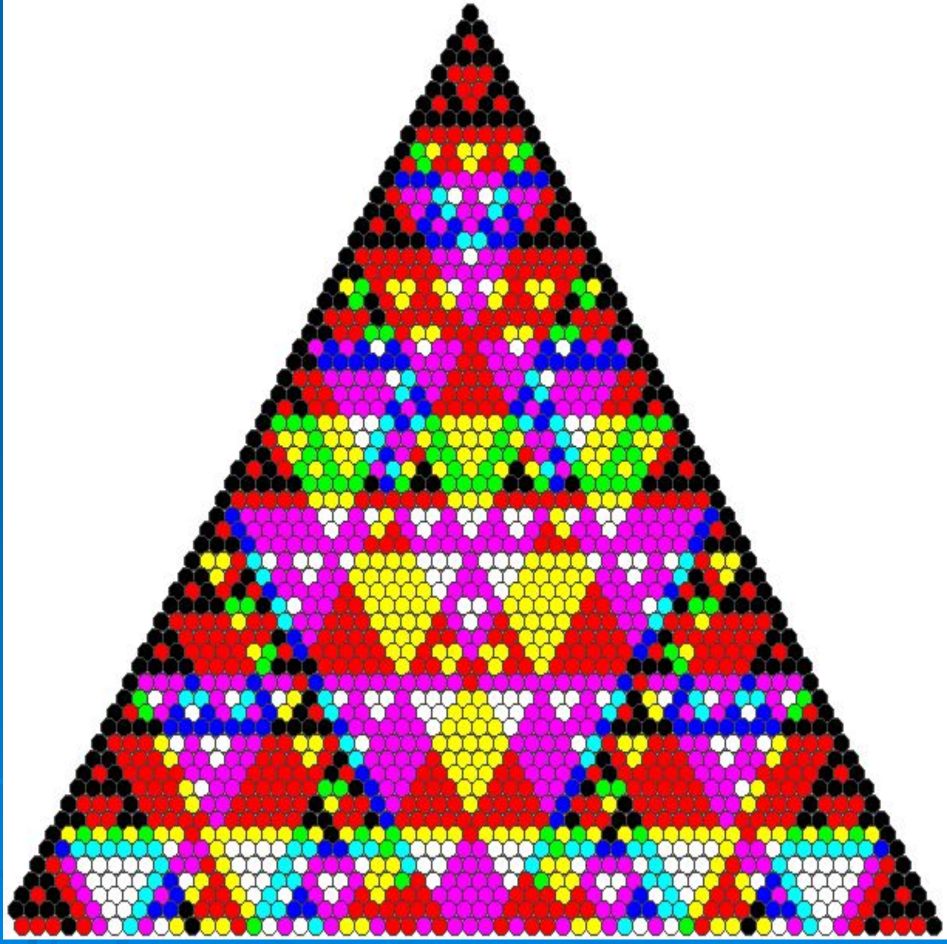
получаются красивые орнаменты с ярко выраженной закономерностью



назначим три переменных ,ответственных, соответственно, за красную, зеленую и синюю составляющую раскраски ячейки и привяжем их значение (максимальное может быть равным 255) к проверке делимости на разные числа. В приведенном листинге программы красный цвет зависит, по-прежнему, от четности числа,

зеленый - от делимости его на 9, а синий - от делимости на 11.

- И вот результат работы программы. Не правда ли красиво? Видны красные треугольные "зоны Серпинского", которые, накладываясь на зеленые окошки от девяток, дают желтые зоны, а с синими участками от деления на 11 дают сиреневые участки.



Треугольник Паскаля-бесконечный треугольник из чисел

- **Факториал натурального числа** — произведение всех чисел от единицы до этого числа включительно, обозначается с помощью восклицательного знака: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n$. Слово «факториал» латинское, переводится примерно как «производящий действие». Факториал очень быстро растёт с ростом числа. Так, 3!=6 , 7!=5040 , а 10!=3628800. Формулы, позволяющей быстро вычислить факториал без утомительного перемножения ряда чисел, не известно. Существует приближённая формула, найденная английским математиком XIX века Стирлингом: $n!\approx(n/e)n$, где e≈2,7128K— основание натуральных логарифмов. Факториалы широко используются в комбинаторике и теории вероятностей.