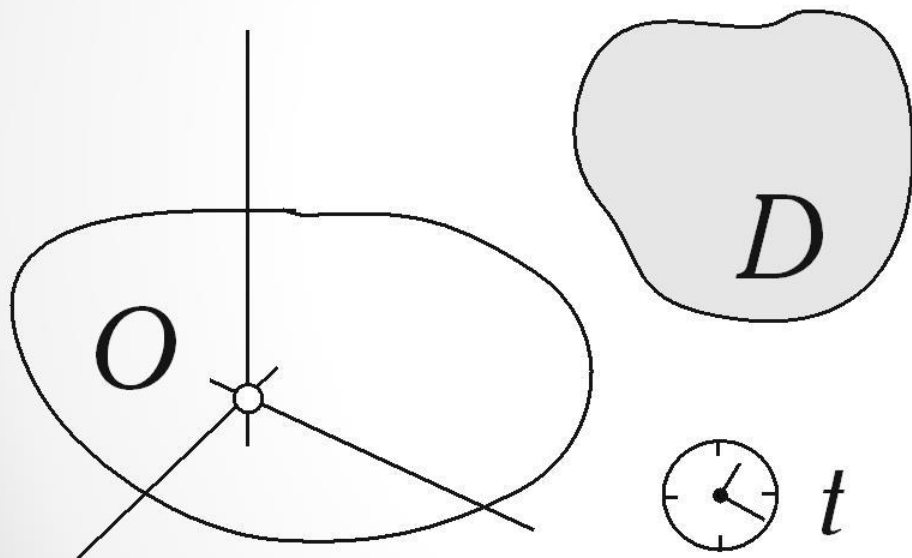


Лекция 5

Кинематика точки

Основные определения и понятия

Кинематика — раздел теоретической механики, изучающий геометрические свойства движения.



Закон движения — любые аналитические соотношения, позволяющие в любой момент однозначно определить положение движущегося тела.

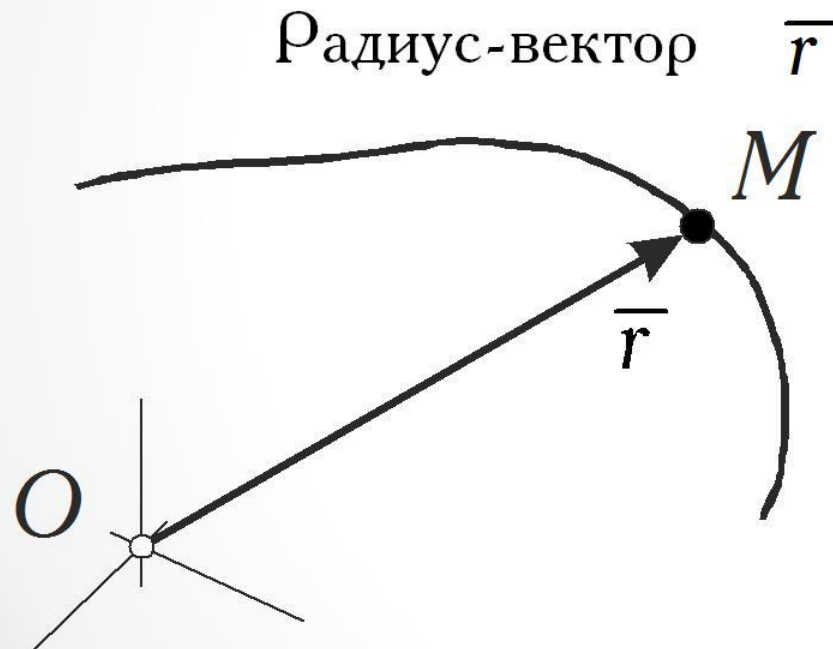
Основные задачи кинематики

1. Определение законов движения тел — определение вида и состава уравнений, позволяющих однозначно определять заданное движение тела
2. По известным законам движения тела определение положений, скоростей и ускорений отдельных точек — прямая задача кинематики
3. Определение по известному движению отдельных точек тела параметров закона или уравнений движения тела — обратная задача кинематики

Способы задания движения точки

ТОЧКИ

1. Векторный способ



Радиус-вектор \vec{r} - известная, дважды дифференцируемая функция времени.

Закон движения при векторном способе задания

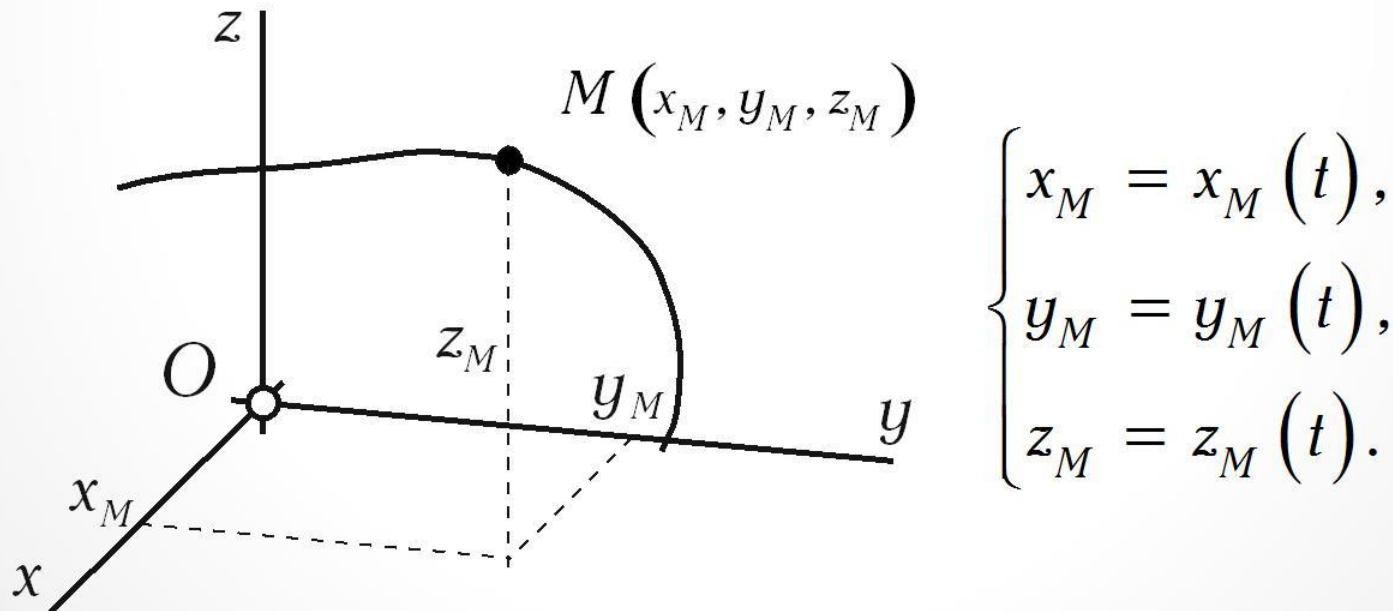
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Способы задания движения точки

2. Координатный способ

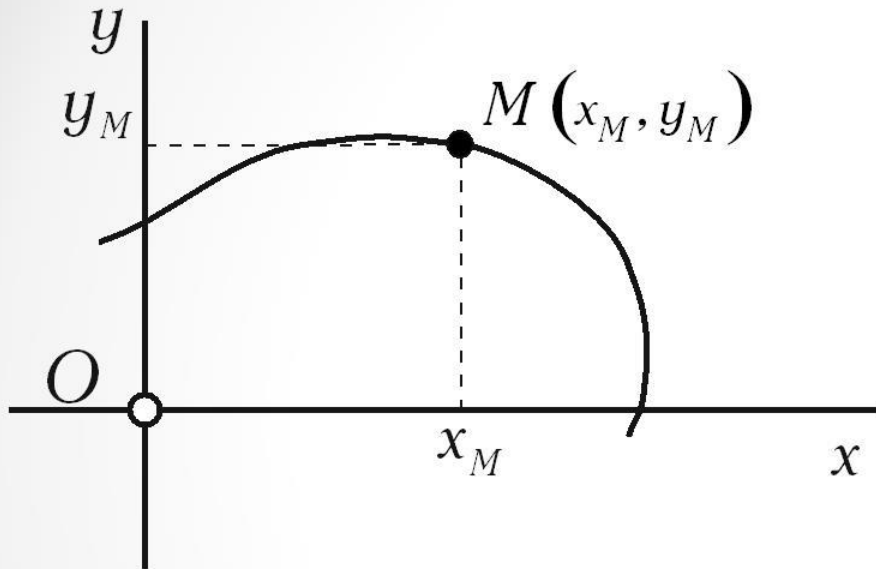
Положение точки в пространстве может быть задано набором трех любых независимых координат

□ Прямоугольные декартовы координаты



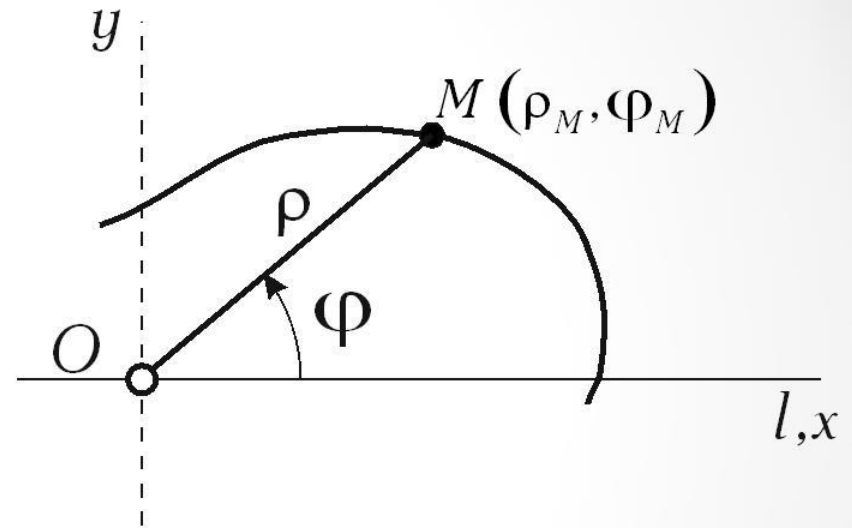
Способы задания движения точки

Движение в плоскости



Декартовы координаты

$$\begin{cases} x_M = x_M(t), \\ y_M = y_M(t). \end{cases}$$



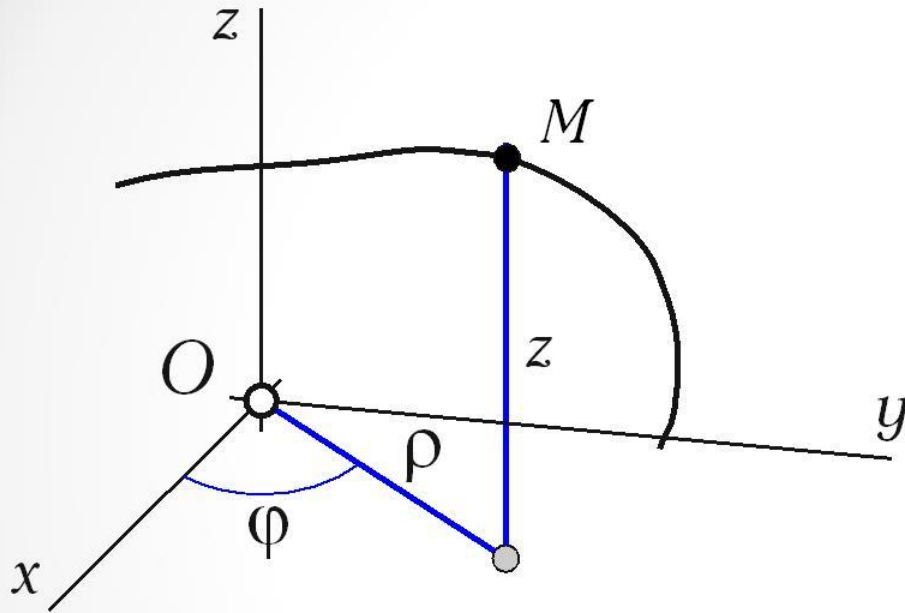
Полярные координаты

$$\begin{cases} \rho_M = \rho_M(t), \\ \varphi_M = \varphi_M(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_M = \rho \cos \varphi, \\ y_M = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

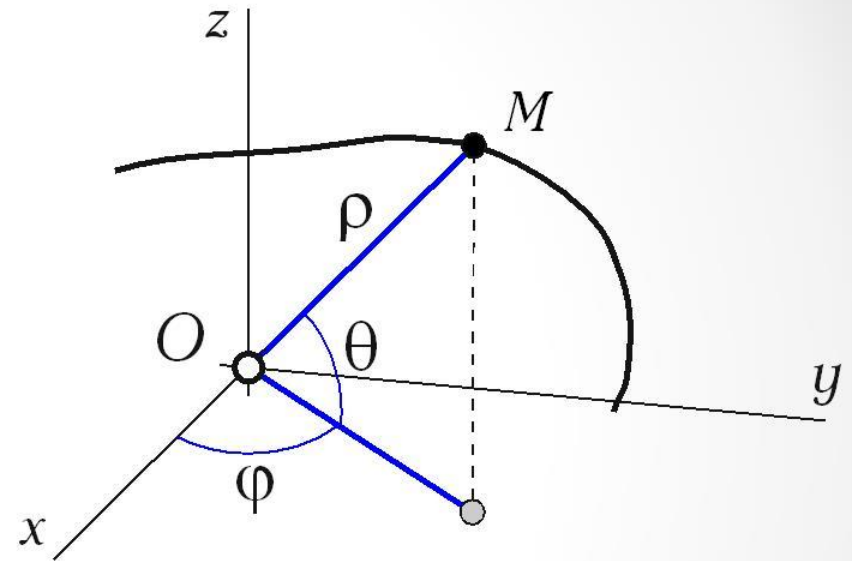
Способы задания движения точки

Цилиндрические координаты



$$\begin{cases} \rho = \rho(t), \\ \varphi = \varphi(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

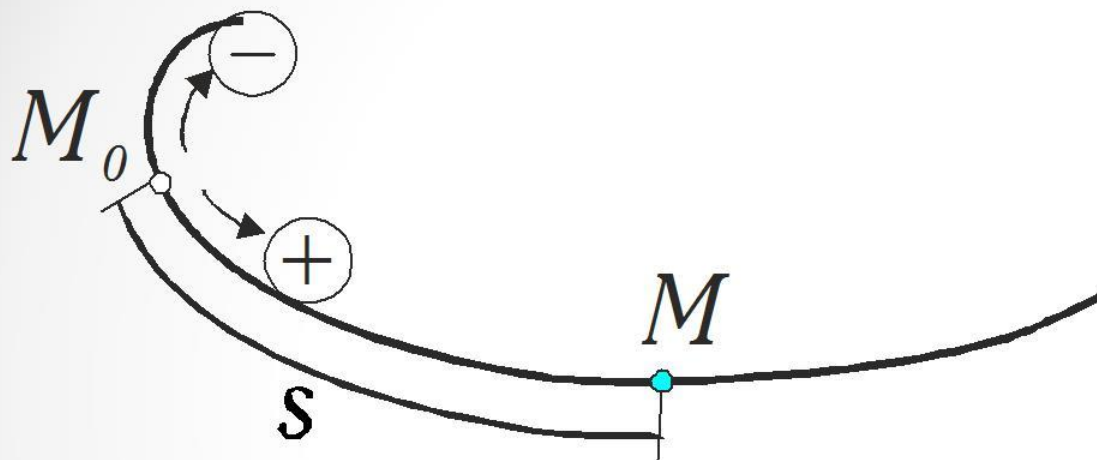
Сферические координаты



$$\begin{cases} \rho = \rho(t), \\ \varphi = \varphi(t), \\ \theta = \theta(t). \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Способы задания движения точки

3. Естественный способ



Закон движения

- Траектория движения
- Начало отсчета
- Направление отсчета
- Дуговая координата $s=s(t)$

Уравнение траектории

В плоскости

- $y = f(x)$
- $f(x, y) = 0$
- $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

В пространстве

- $\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$
- $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$

Переход от одного способа задания движения точки к другому

Векторный - Координатный

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \longleftrightarrow \quad x = r_x, y = r_y, z = r_z$$

Векторный - Естественный

$$\vec{r} = \vec{r} [s(t)]$$

Годограф вектора — линия, по которой перемещается конец вектора, если начало его находится в одной и той же точке

Траектория движения точки есть годограф ее радиус-вектора

Переход от одного способа задания движения точки к другому

Координатный - **естественный**

1. Уравнения движения точки в координатной форме — параметрическое уравнение траектории.

Если возможно — параметр исключается из уравнений.

2. $M_0 = M[x(0), y(0), z(0)]$

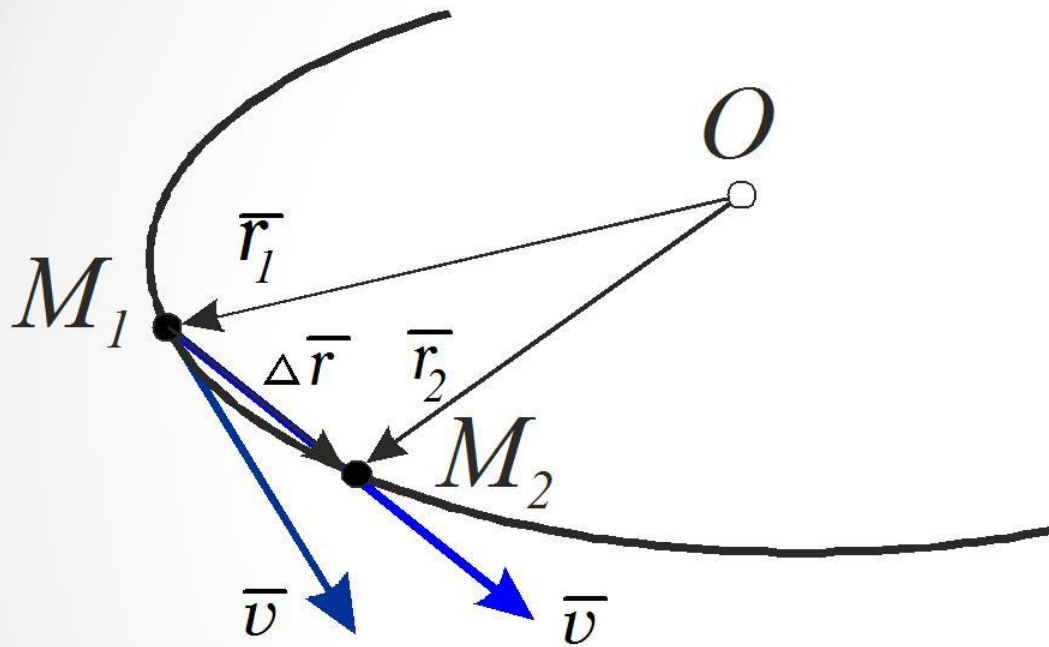
3. Положительное направление определяется исходя из условия задачи.

4. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad dx = \dot{x}dt, \quad dy = \dot{y}dt, \quad dz = \dot{z}dt$

$$s(t) = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \mp \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Скорость точки

Векторный способ задания движения



$$\begin{array}{ll} t_1 & \bar{r}_1 \\ t_2 & \bar{r}_2 \\ \Delta \bar{r} & = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 \end{array}$$

$$\bar{v}_{cp} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

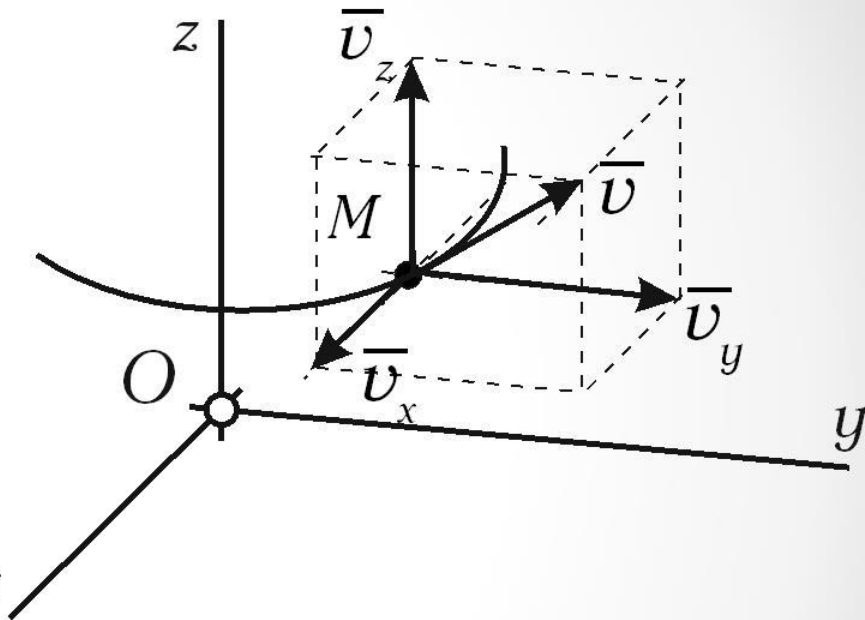
$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$$

Скорость точки

Координатный способ задания движения —
декартовы координаты

$$\begin{aligned}\bar{r} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ \bar{v} = \dot{\bar{r}} &= \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} = \\ &= \bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z\end{aligned}$$

Для определения вектора скорости находят проекции этого вектора на оси координат x



$$\begin{cases} v_x = \dot{x}, \\ v_y = \dot{y}, \\ v_z = \dot{z}. \end{cases} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

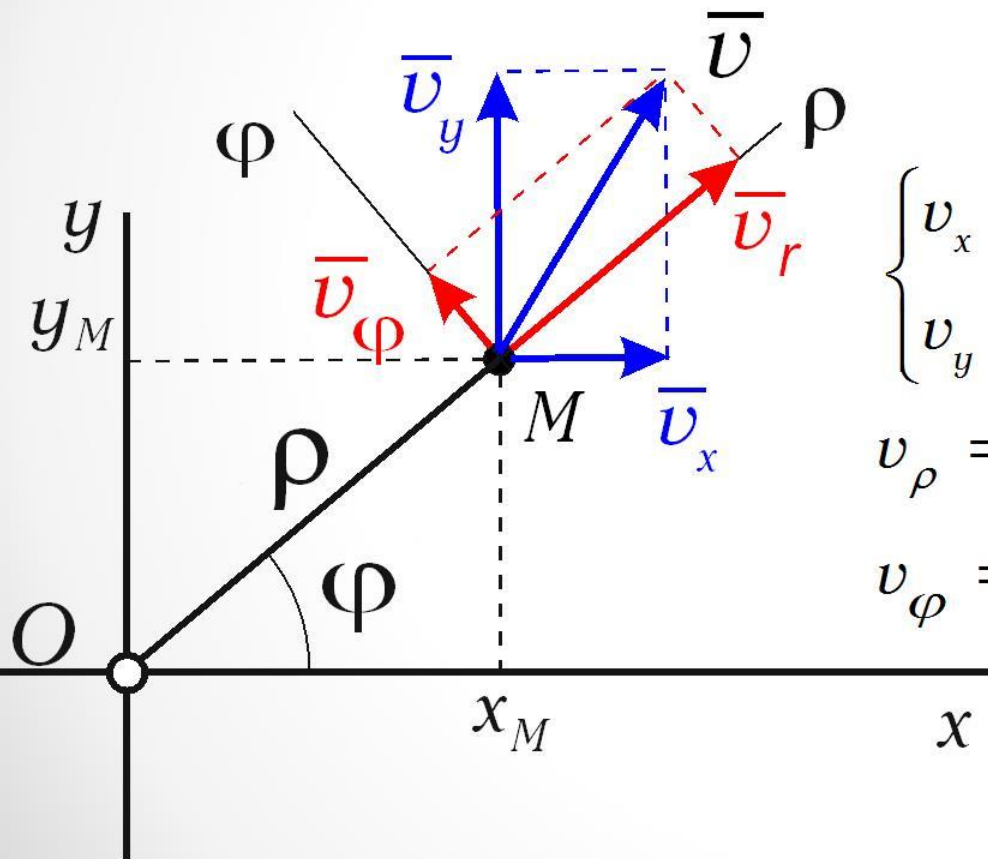
$$\cos \alpha = \cos(\bar{v}, \bar{i}) = v_x / v,$$

$$\cos \beta = \cos(\bar{v}, \bar{j}) = v_y / v,$$

$$\cos \gamma = \cos(\bar{v}, \bar{k}) = v_z / v.$$

Скорость точки

Координатный способ задания движения —
полярные координаты



$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \dot{\varphi}, \\ v_y = \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$v_\rho = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi = \dot{\rho}$$

$$v_\varphi = -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi = \rho \dot{\varphi}$$

Скорость точки

Естественный способ задания движения

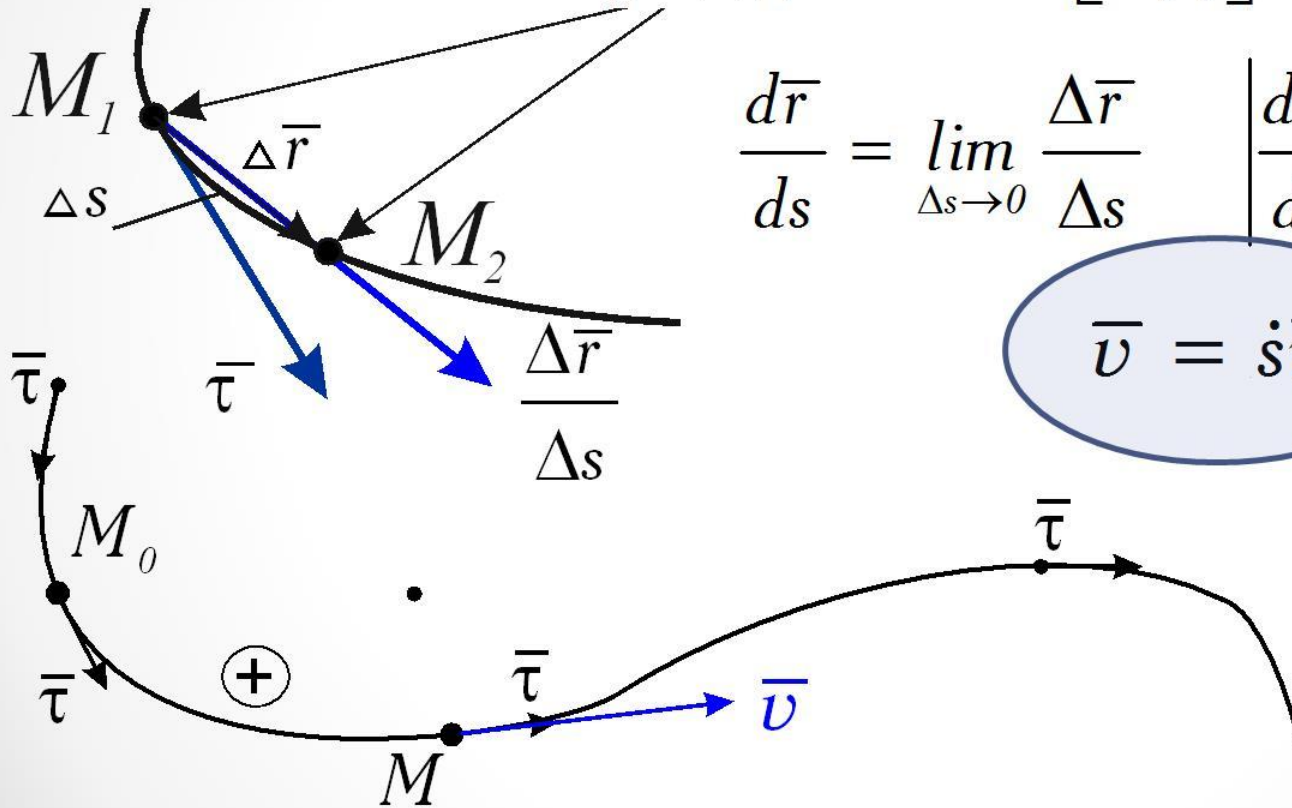
$$\bar{r} = \bar{r} [s(t)] \quad \bar{v} = \dot{\bar{r}} [s(t)] = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \quad \left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1 \quad \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$$

$$\bar{v} = \dot{s} \bar{\tau}$$

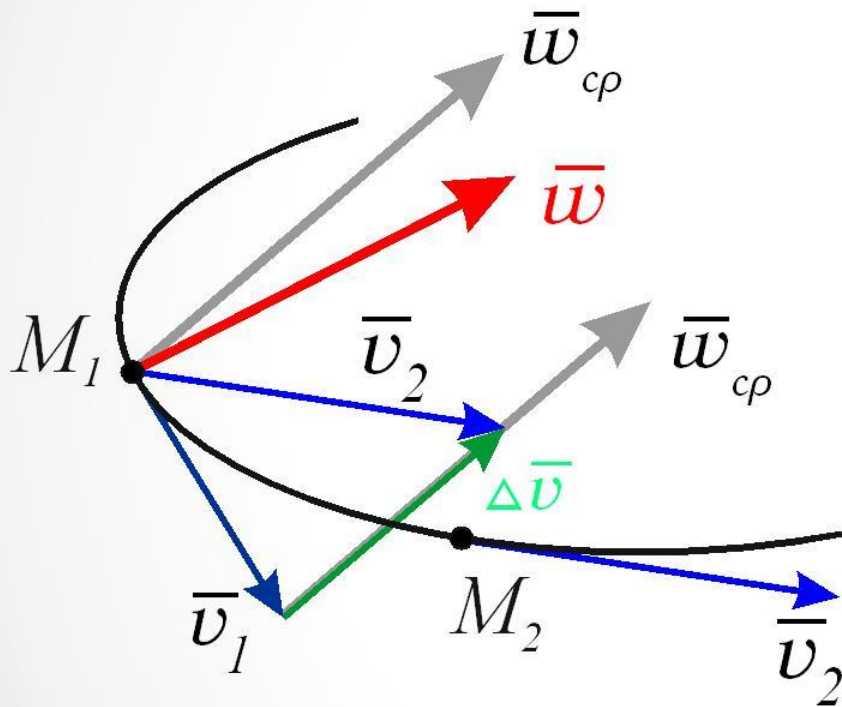
$$\dot{s} > 0 \quad \bar{v} \uparrow \uparrow \bar{\tau}$$

$$\dot{s} < 0 \quad \bar{v} \uparrow \downarrow \bar{\tau}$$



Ускорение точки

Векторный способ задания движения



$$t_1 \quad \bar{v}_1$$

$$t_2 \quad \bar{v}_2$$

$$\Delta \bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$$

$$\bar{w}_{cp} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

$$\bar{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}$$

Ускорение точки

Координатный способ задания движения – декартовы координаты

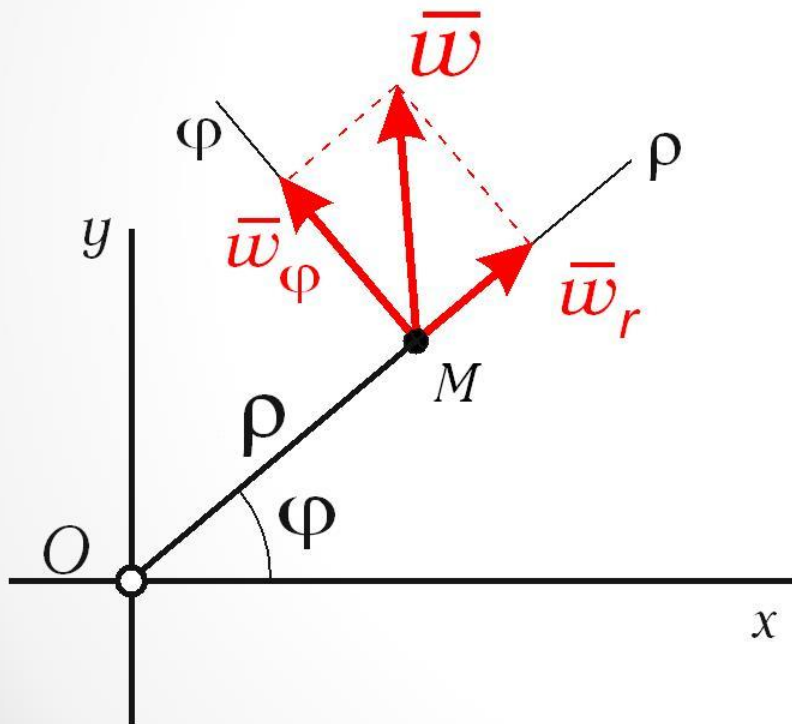
$$\begin{aligned}\bar{v} &= v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k} = \dot{x} \bar{i} + \dot{y} \bar{j} + \dot{z} \bar{k} \\ \bar{w} &= \dot{\bar{v}} = \dot{v}_x \bar{i} + \dot{v}_y \bar{j} + \dot{v}_z \bar{k}\end{aligned}$$

Для определения ускорения точки находят проекции вектора ускорения на оси координат

$$\begin{cases} w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \\ w_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \\ w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}. \end{cases}$$

Ускорение точки

Координатный способ задания движения —
полярные координаты



Для определения ускорения точки находят проекции вектора ускорения на оси координат — радиальную и окружную (трансверсальную)

$$\begin{cases} w_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \\ w_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \end{cases}$$

Ускорение точки

Естественный способ задания движения

$$M, M_1, M_2 \in \text{пл. } T'$$

$$M_1, M_2 \rightarrow M \quad \text{пл. } T' \rightarrow \text{пл. } T$$

Пл. T - соприкасающаяся
плоскость

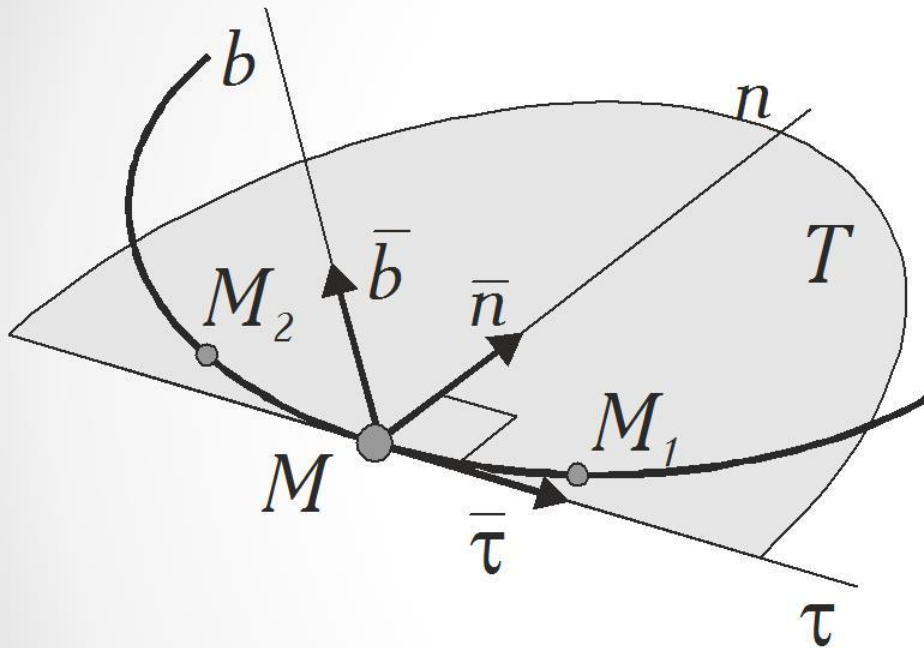
$$M\tau \in \text{пл. } T$$

$$Mn \in \text{пл. } T \quad Mn \perp M\tau$$

Mn — главная нормаль

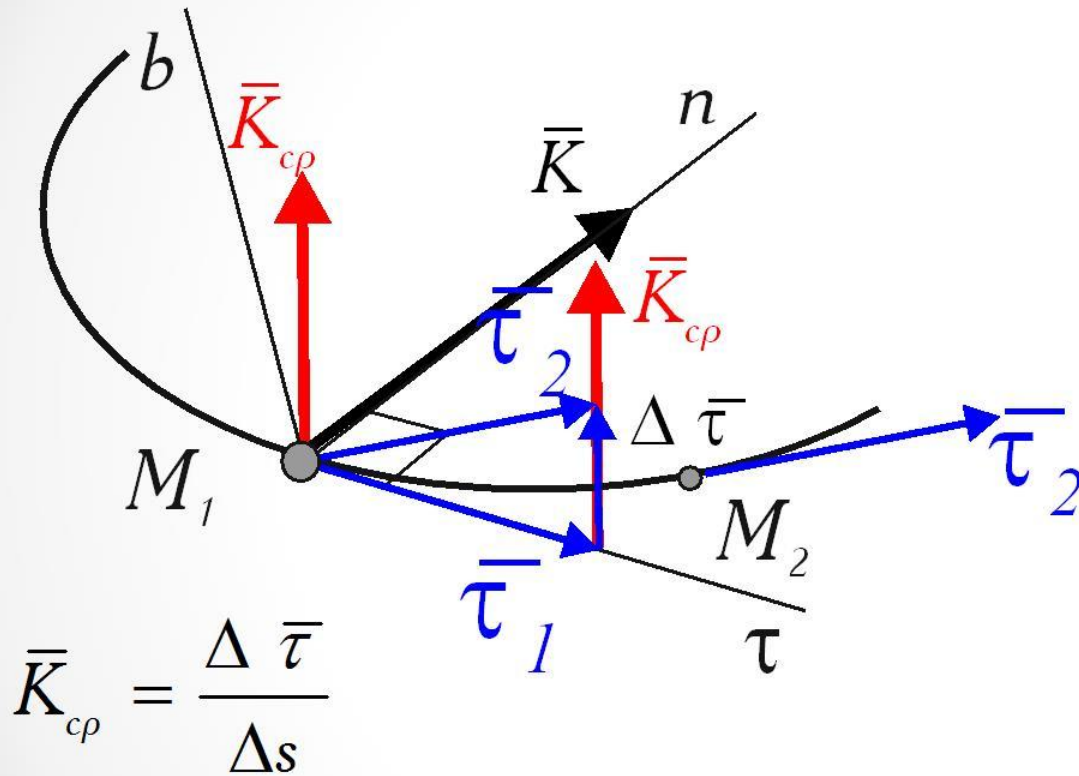
Mb - бинормаль

$(\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b})$ = правая тройка векторов



Ускорение точки

Естественный способ задания движения



$$\bar{K}_{cp} = \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s}$$

$$\bar{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \bar{K}_{cp} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}$$

$$t_1 \quad s_1 \quad \bar{\tau}_1$$

$$t_2 \quad s_2 \quad \bar{\tau}_2$$

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$\Delta \bar{\tau} = \bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1$$

$$|\bar{K}| = \frac{1}{\rho} \quad \bar{K} \perp M_1 \tau$$

$$\bar{K} = \frac{1}{\rho} \bar{n}$$

Ускорение точки

Естественный способ задания движения

$$\bar{v} = \dot{\bar{\tau}}$$

$$\bar{w} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{\tau}} + \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{dt}, \quad \text{но } \bar{\tau} = \bar{\tau} [s(t)] \Rightarrow \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\bar{w} = \ddot{\bar{\tau}} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n} = \bar{w}_\tau + \bar{w}_n$$

Касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине

$$w_\tau = \ddot{s} = \dot{v}$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории