



Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н. Ельцина

Линейные пространства

Определение линейного пространства

Множество \mathbb{R} элементов произвольной природы, называемых векторами и обозначаемых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$, называется **линейным пространством**, если:

$$1) \bar{z} = \bar{x} + \bar{y};$$

$$2) \bar{y} = \alpha \cdot \bar{x}.$$

Основные аксиомы:

$$1) \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$$

$$2) (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$$

$$3) \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$$

$$4) \bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$$

$$5) 1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \text{ для любого } \bar{x} \text{ из } \mathbb{R}$$

$$6) \alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$$

$$7) (\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$$

$$8) \alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$$

Основные утверждения:

- 1) во всяком линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент;
- 2) для каждого элемента \bar{x} имеется единственный противоположный элемент \bar{y} , который можно представить в виде $\bar{y} = (-1) \cdot \bar{x}$;
- 3) для всякого \bar{x} из \mathbb{R} выполняется $0 \cdot \bar{x} = 0$.

В линейном арифметическом пространстве \mathbb{R}^n матриц размера $n \times 1$ вектором является столбец

$$\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \quad \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)^T$$

то

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n), \\ \lambda \bar{a} &= (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n). \end{aligned}$$

Вектор $(0, 0, \dots, 0)$ обозначают $\bar{0}$ и называют нулевым.

Пример. В арифметическом линейном пространстве \mathbb{R}_3 дано три вектора: $\bar{a} = (1; 2; -2)$, $\bar{b} = (0; -1; 3)$, $\bar{c} = (-2; 3; -4)$.

Найти вектор $\bar{d} = 2\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}$.

Решение. По правилу умножения вектора на число и сложения векторов получаем:

$$2\bar{a} = (2; 4; -4), 4\bar{b} = (0; -4; 12), -3\bar{c} = (6; -9; 12), 2\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c} = (8; -9; 20).$$

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Вектор $\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$ называется **линейной комбинацией** векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что имеет место равенство

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0$$

Если же соотношение выполняется только в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называется **линейно независимой**.

Теорема 1. Для того чтобы система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов был линейной комбинацией других.

$$\bar{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \bar{a}_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \bar{a}_3 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) \bar{a}_n$$

$$\bar{a}_1 = \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$$

$$(-1)\bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0.$$

$$-1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

Теорема 2. Всякая система векторов, содержащая нуль-вектор, линейно зависима.

Теорема 3. Всякая система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Размерность линейных пространств.

Базис и координаты

Линейное пространство называется n -мерным, если в нем существует система из n линейно независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ векторов, линейно зависима.

Любая линейно независимая система, состоящая из n векторов n -мерного линейного пространства \mathbb{R}^n , называется **базисом** этого пространства, а входящие в него векторы называются **базисными**.

Теорема 4. Любой вектор линейного пространства \mathbb{R}^n можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов фиксированного базиса.

Пусть $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$ — какой-либо базис \mathbb{R}^n

Система векторов $\bar{x}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$

$$\lambda_0 \bar{x} + \lambda_1 \bar{f}_1 + \lambda_2 \bar{f}_2 + \dots + \lambda_n \bar{f}_n = 0.$$

$$\bar{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \bar{f}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right) \bar{f}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_0} \right) \bar{f}_n,$$

\bar{x} представлен двумя линейными комбинациями вида

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + \dots + \alpha_n \bar{f}_n,$$

$$\bar{x} = \beta_1 \bar{f}_1 + \beta_2 \bar{f}_2 + \dots + \beta_n \bar{f}_n.$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) \bar{f}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \bar{f}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \bar{f}_n = 0.$$

Коэффициенты линейной комбинации, с помощью которой вектор \bar{x} выражается через базисные векторы, называются **координатами вектора \bar{x}** относительно данного базиса.

Теорема 5. При сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении на число — умножаются на это число.

Изоморфизм линейных пространств

Если между векторами линейных пространств \mathbb{R} и \mathbb{R}' можно установить взаимно однозначное соответствие, такое, что из $\bar{x}_1 \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{y}_1 \in \mathbb{R}'$, $\bar{x}_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{y}_2 \in \mathbb{R}'$ для любых α и β следует, что $\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2 \rightarrow \alpha\bar{y}_1 + \beta\bar{y}_2$, то говорят, что пространства \mathbb{R} и \mathbb{R}' **изоморфны**, а само соответствие называется **изоморфизмом**.

Подпространства

Пусть имеем некоторую систему векторов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ из линейного пространства \mathbb{R} . **Линейной оболочкой** этой системы векторов называется множество всех их линейных комбинаций, обозначается $L(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$. Ясно, что линейная оболочка образует подпространство в \mathbb{R} .

Теорема 6 (о размерности линейной оболочки). Размерность линейной оболочки $L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ равна числу r , если среди векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ имеется линейно независимая подсистема, состоящая из r векторов, а любая подсистема из $(r + 1)$ векторов линейно зависима.

Евклидовы и нормированные линейные пространства

Говорят, что в линейном пространстве \mathbb{R} введено понятие **длины вектора**, или **нормы**, если каждому \bar{x} из \mathbb{R} поставлено в соответствие число, обозначаемое символом $\|\bar{x}\|$ (иногда $|\bar{x}|$), такое, что:

- 1) $\|\bar{x}\| \geq 0$ для каждого \bar{x} из \mathbb{R} ; из условия $\|\bar{x}\| = 0$ следует $\bar{x} = \bar{0}$;
- 2) $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$ для любых чисел α и любого вектора \bar{x} из \mathbb{R} ;
- 3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (неравенство Минковского).

Предположим, что имеется некоторое правило, позволяющее любой паре векторов \bar{x} и \bar{y} из линейного пространства \mathbb{R} поставить в соответствие число, обозначаемое (\bar{x}, \bar{y}) . Это число называется **скалярным произведением** векторов \bar{x} и \bar{y} , если выполнены следующие условия:

- а) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$ для любых \bar{x} и \bar{y} из \mathbb{R} ;
- б) $(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{x}, \bar{z})$ для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ из \mathbb{R} ;
- в) $(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$ для любого числа λ и любых векторов \bar{x} и \bar{y} из \mathbb{R} ;
- г) $(\bar{x}, \bar{x}) > 0$, если $\bar{x} \neq \bar{0}$, и $(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, если $\bar{x} = \bar{0}$.

Пусть $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\bar{y} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — два произвольных вектора из арифметического пространства \mathbb{R}^n . Положим

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n.$$

Длиной вектора \bar{x} (модулем, нормой) в евклидовом пространстве называется число

$$|\bar{x}| = \|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}. \quad |\bar{x}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

Теорема 7. Для любых векторов \bar{x} и \bar{y} из E_n справедливо неравенство

$$|(\bar{x}, \bar{y})| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|.$$

$$\lambda \bar{x} - \bar{y} \quad (\lambda \bar{x} - \bar{y}, \lambda \bar{x} - \bar{y}) \geq 0 \quad \lambda^2 (\bar{x}, \bar{x}) - 2\lambda (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) \geq 0.$$

$$(\bar{x}, \bar{y})^2 - (\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}) \leq 0 \quad (\bar{x}, \bar{y})^2 \leq (\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y})$$

$$-1 \leq \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}||\bar{y}|} \leq 1 \quad \cos \varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}||\bar{y}|}$$

Два ненулевых вектора \bar{x} и \bar{y} из E_n называются **ортогональными**, если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Теорема 8. Всякая система ненулевых попарно ортогональных векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ линейно независима (такая система векторов называется ортогональной).

Базис линейного пространства E_n называется **ортогональным**, если его векторы образуют ортогональную систему. Базис называется **ортонормированным**, если он ортогональный, а все его векторы имеют длину, равную единице.

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0);$$

$$\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0);$$

.....

$$\bar{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Положим $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$ $\bar{b}_2 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2$ $(\bar{b}_2, \bar{b}_1) = 0$ $\alpha_1 (\bar{b}_1, \bar{b}_1) + (\bar{a}_2, \bar{b}_1) = 0$ $\alpha_1 = -\frac{(\bar{a}_2, \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)}$

$\bar{b}_3 = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \bar{a}_3$ $\beta_1 = -\frac{(\bar{a}_3, \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)}$ $\beta_2 = -\frac{(\bar{a}_3, \bar{b}_2)}{(\bar{b}_2, \bar{b}_2)}$

Связь между координатами вектора в различных базисах

Теорема Пусть e_1, e_2, \dots, e_n и e'_1, e'_2, \dots, e'_n – два базиса линейного пространства L . Причем имеют место равенства:

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n, \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Если вектор a имеет в базисе e_1, e_2, \dots, e_n координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а в базисе e'_1, e'_2, \dots, e'_n – координаты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, то справедливо равенство

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \text{ где}$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составленную таким образом матрицу \mathbf{T} называют *матрицей перехода* от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису e'_1, e'_2, \dots, e'_n .

Замечания. 1) Столбцы матрицы \mathbf{T} – это координаты векторов e'_1, e'_2, \dots, e'_n в базисе e_1, e_2, \dots, e_n . Но e'_1, e'_2, \dots, e'_n – это базис, то есть линейно независимая система. Таким образом, столбцы матрицы \mathbf{T} – линейно независимы. Тогда согласно критерию равенства нулю определителя, $|\mathbf{T}| \neq 0$.

2) Найдём теперь матрицу перехода от базиса e'_1, e'_2, \dots, e'_n к базису e_1, e_2, \dots, e_n . Имеем $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$, то есть $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}$. Таким образом, если \mathbf{T} – это матрица перехода от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису e'_1, e'_2, \dots, e'_n , то \mathbf{T}^{-1} – это матрица перехода от базиса e'_1, e'_2, \dots, e'_n к базису e_1, e_2, \dots, e_n .

Пример Вектор x в стандартном базисе линейного пространства \mathbb{R}^2 имеет координаты 2, 3. Найти его координаты в базисе $c_1 = (4, 3)$, $c_2 = (5, 4)$.

Стандартный базис линейного пространства \mathbb{R}^2 образуют векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Найдём матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= 4e_1 + 3e_2 \\ c_2 &= 5e_1 + 4e_2 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Можно найти, что $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора x в базисе c_1, c_2 будут -7 и 6 , то есть $x = -7c_1 + 6c_2$.