Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Линейные пространства

Определение линейного пространства

Множество $\mathbb{R}$ элементов произвольной природы, называемых векторами и обозначаемых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$, называется **линейным пространством**, если:

1) $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$;

2) $\bar{y} = \alpha \cdot \bar{x}$.

Основные аксиомы:

1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$

2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$

3) $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$

4) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{0}$

5) $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$ для любого $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$

6) $\alpha(\beta\overline{x}) = (\alpha\beta)\overline{x}$

7) $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$

8) $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$

Основные утверждения:

1) во всяком линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент;
2) для каждого элемента $\overline{x}$ имеется единственный противоположный элемент $\overline{y}$, который можно представить в виде $\overline{y} = (-1) \cdot \overline{x}$;
3) для всякого $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$ выполняется $0 \cdot \overline{x} = 0$.

В линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ матриц размера $n \times 1$ вектором является столбец

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right)^T$$

$$\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \overline{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

то

$$\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\lambda\overline{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n).$$

Вектор $(0, 0, \ldots, 0)$ обозначают $\overline{0}$ и называют нулевым.

Пример. В арифметическом линейном пространстве $\mathbb{R}_3$ дано три вектора: $\overline{a}=(1;\ 2;\ -2)$, $\overline{b}=(0;\ -1;\ 3)$, $\overline{c}=(-2;\ 3;\ -4)$.

Найти вектор $\overline{d}=2\overline{a}+4\overline{b}-3\overline{c}$.

Решение. По правилу умножения вектора на число и сложения векторов получаем:

$$2\overline{a}=(2;\ 4;\ -4),\ 4\overline{b}=(0;\ -4;\ 12),\ -3\overline{c}=(6;\ -9;\ 12),\ 2\overline{a}+4\overline{b}-3\overline{c}=(8;\ -9;\ 20).$$

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Вектор $\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n$ называется **линейной комбинацией** векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что имеет место равенство

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = 0$$

Если же соотношение выполняется только в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, называется **линейно независимой**.

Теорема 1. Для того чтобы система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов был линейной комбинацией других.

$$\overline{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\overline{a}_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\overline{a}_3 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\overline{a}_n$$

$$\overline{a}_1 = \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n$$

$$(-1)\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = 0.$$

$$-1,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

Теорема 2. Всякая система векторов, содержащая нуль-вектор, линейно зависима.

Теорема 3. Всякая система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Размерность линейных пространств. Базис и координаты

Линейное пространство называется n-**мерным**, если в нем существует система из n линейно независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ векторов, линейно зависима.

Любая линейно независимая система, состоящая из n векторов n-мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$, называется **базисом** этого пространства, а входящие в него векторы называются **базисными**.

Теорема 4. Любой вектор линейного пространства $\mathbb{R}^n$ можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов фиксированного базиса.

Пусть $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ — какой-либо базис $\mathbb{R}^n$

Система векторов $\overline{x}, \overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$

$$\lambda_0\overline{x} + \lambda_1\overline{f}_1 + \lambda_2\overline{f}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{f}_n = 0.$$

$$\overline{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\overline{f}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)\overline{f}_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right)\overline{f}_n,$$

$\bar{x}$ представлен двумя линейными комбинациями вида

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{f}_n,$$

$$\bar{x} = \beta_1 \bar{f}_1 + \beta_2 \bar{f}_2 + \ldots + \beta_n \bar{f}_n.$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)\bar{f}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\bar{f}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{f}_n = 0.$$

Коэффициенты линейной комбинации, с помощью которой вектор $\bar{x}$ выражается через базисные векторы, называются **координатами вектора** $\bar{x}$ относительно данного базиса.

Теорема 5. При сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении на число — умножаются на это число.

Изоморфизм линейных пространств

Если между векторами линейных пространств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ можно установить взаимно однозначное соответствие, такое, что из $\bar{x}_1 \in \mathbb{R} \to \bar{y}_1 \in \mathbb{R}'$, $\bar{x}_2 \in \mathbb{R} \to \bar{y}_2 \in \mathbb{R}'$ для любых α и β следует, что $\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2 \to \alpha\bar{y}_1 + \beta\bar{y}_2$, то говорят, что пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ **изоморфны**, а само соответствие называется **изоморфизмом**.

Подпространства

Пусть имеем некоторую систему векторов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ из линейного пространства $\mathbb{R}$. **Линейной оболочкой** этой системы векторов называется множество всех их линейных комбинаций, обозначается $L(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$. Ясно, что линейная оболочка образует подпространство в $\mathbb{R}$.

Теорема 6 (о размерности линейной оболочки). Размерность линейной оболочки $L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ равна числу r, если среди векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ имеется линейно независимая подсистема, состоящая из r векторов, а любая подсистема из $(r+1)$ векторов линейно зависима.

Евклидовы и нормированные линейные пространства

Говорят, что в линейном пространстве $\mathbb{R}$ введено понятие **длины вектора**, или **нормы**, если каждому $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$ поставлено в соответствие число, обозначаемое символом $\|\overline{x}\|$ (иногда $|\overline{x}|$), такое, что:

1) $\|\overline{x}\| \geq 0$ для каждого $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$; из условия $\|\overline{x}\| = 0$ следует $\overline{x} = \overline{0}$;

2) $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha| \cdot \|\overline{x}\|$ для любых чисел α и любого вектора $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$;

3) $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ (неравенство Минковского).

Предположим, что имеется некоторое правило, позволяющее любой паре векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из линейного пространства $\mathbb{R}$ поставить в соответствие число, обозначаемое $(\overline{x}, \overline{y})$. Это число называется **скалярным произведением** векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, если выполнены следующие условия:

а) $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$ для любых $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\mathbb{R}$;

б) $(\overline{x}, \overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{x}, \overline{z})$ для любых $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ из $\mathbb{R}$;

в) $(\lambda\overline{x}, \overline{y}) = \lambda(\overline{x}, \overline{y})$ для любого числа λ и любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\mathbb{R}$;

г) $(\overline{x}, \overline{x}) > 0$, если $\overline{x} \neq \overline{0}$, и $(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, если $\overline{x} = \overline{0}$.

Пусть $\overline{x}=(\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_n)$ и $\overline{y}=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — два произвольных вектора из арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Положим

$$(\overline{x},\overline{y})=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots\alpha_n\beta_n.$$

Длиной вектора $\overline{x}$ (модулем, нормой) в евклидовом пространстве называется число

$$|\overline{x}|=\|\overline{x}\|=\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}. \qquad |\overline{x}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2}$$

Теорема 7. Для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из E_n справедливо неравенство

$$|(\overline{x},\overline{y})|\le|\overline{x}|\cdot|\overline{y}|.$$

$$\lambda\overline{x}-\overline{y} \qquad (\lambda\overline{x}-\overline{y},\ \lambda\overline{x}-\overline{y})\ge 0 \qquad \lambda^2(\overline{x},\overline{x})-2\lambda(\overline{x},\overline{y})+(\overline{y},\overline{y})\ge 0.$$

$$(\overline{x},\overline{y})^2-(\overline{x},\overline{x})(\overline{y},\overline{y})\le 0 \qquad (\overline{x},\overline{y})^2\le(\overline{x},\overline{x})(\overline{y},\overline{y})$$

$$-1 \le \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}||\bar{y}|} \le 1 \qquad \cos\varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}||\bar{y}|}$$

Два ненулевых вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из E_n называются **ортогональными**, если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Теорема 8. Всякая система ненулевых попарно ортогональных векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ линейно независима (такая система векторов называется ортогональной).

Базис линейного пространства E_n называется **ортогональным**, если его векторы образуют ортогональную систему. Базис называется **ортонормированным**, если он ортогональный, а все его векторы имеют длину, равную единице.

$$\overline{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0);$$

$$\overline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Положим $\overline{b_1} = \overline{a}_1$ $\quad \overline{b}_2 = \alpha_1 \overline{b}_1 + \overline{a}_2 \quad \left(\overline{b_2}, \overline{b_1}\right) = 0 \quad \alpha_1\left(\overline{b_1}, \overline{b_1}\right) + \left(\overline{a_2}, \overline{b_1}\right) = 0 \quad \alpha_1 = -\frac{\left(\overline{a_2}, \overline{b_1}\right)}{\left(\overline{b_1}, \overline{b_1}\right)}$

$$\overline{b_3} = \beta_1 \overline{b}_1 + \beta_2 \overline{b}_2 + \overline{a}_3 \qquad \beta_1 = -\frac{\left(\overline{a_3}, \overline{b_1}\right)}{\left(\overline{b_1}, \overline{b_1}\right)} \qquad \beta_2 = -\frac{\left(\overline{a_3}, \overline{b_2}\right)}{\left(\overline{b_2}, \overline{b_2}\right)}$$

Связь между координатами вектора в различных базисах

Теорема *Пусть* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *и* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ *– два базиса линейного пространства* L. *Причем имеют место равенства:*

$$\begin{array}{ccccccccc} e'_1 & = & t_{11}e_1 & + & t_{21}e_2 & + & \ldots & + & t_{n1}e_n, \\ e'_2 & = & t_{12}e_1 & + & t_{22}e_2 & + & \ldots & + & t_{n2}e_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e'_n & = & t_{1n}e_1 & + & t_{2n}e_2 & + & \ldots & + & t_{nn}e_n. \end{array}$$

Если вектор a *имеет в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *координаты* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *а в базисе* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ *– координаты* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, *то справедливо равенство*

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \text{ где}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составленную таким образом матрицу $\mathbf{T}$ называют ***матрицей перехода*** от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Замечания. 1) Столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – это координаты векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Но $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ – это базис, то есть линейно независимая система. Таким образом, столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – линейно независимы. Тогда согласно критерию равенства нулю определителя, $|\mathbf{T}| \neq 0$.

2) Найдём теперь матрицу перехода от базиса $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Имеем $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$, то есть $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}$. Таким образом, если $\mathbf{T}$ – это матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, то $\mathbf{T}^{-1}$ – это матрица перехода от базиса $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пример Вектор x в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2$ имеет координаты 2, 3. Найти его координаты в базисе $c_1 = (4, 3)$, $c_2 = (5, 4)$.

Стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}^2$ образуют векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Найдём матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису c_1, c_2:

$$\begin{matrix} c_1 = 4e_1 + 3e_2 \\ c_2 = 5e_1 + 4e_2 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Можно найти, что $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора x в базисе c_1, c_2 будут -7 и 6, то есть $x = -7c_1 + 6c_2$.