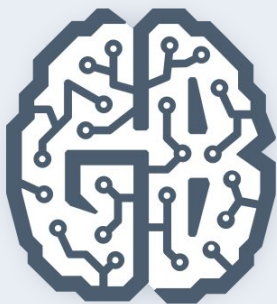


Введение в математику

Урок 2



Введение в аналитическую геометрию

Векторы на плоскости и в пространстве

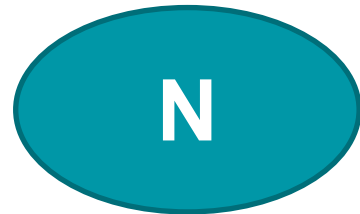
План урока

1. Что такое векторы
2. Векторы на прямой, на плоскости и пространстве
3. Длина вектора: формула расстояния
4. Теорема Пифагора



Векторы

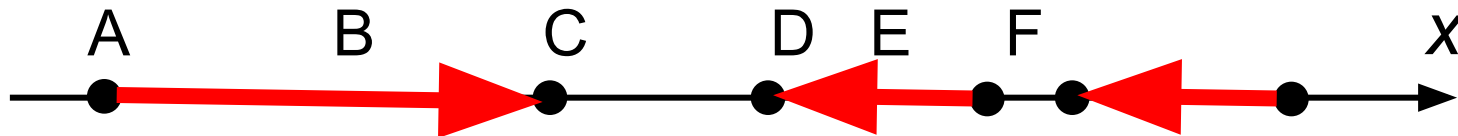
$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}$$



Векторы на прямой

N=1

$$\vec{x} = [x_1]$$

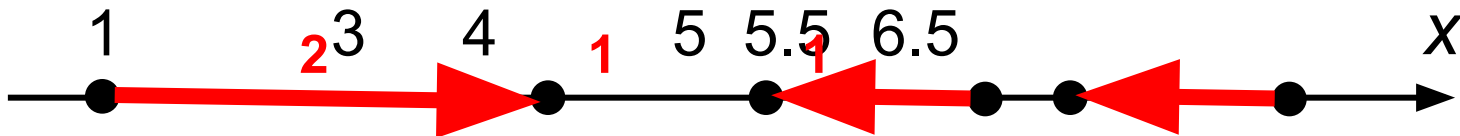


Векторы на прямой

N=1

$$\vec{X} = [x_1]$$

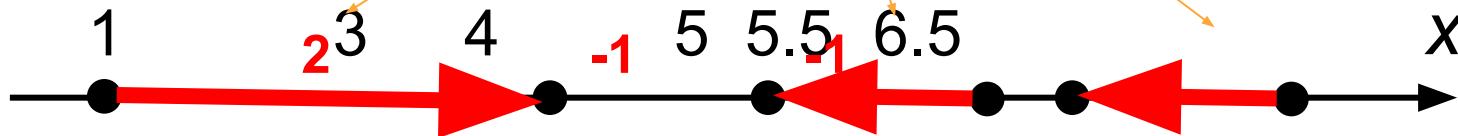
$$X = |\vec{X}| = 3 - 1$$



Векторы на прямой

N=1

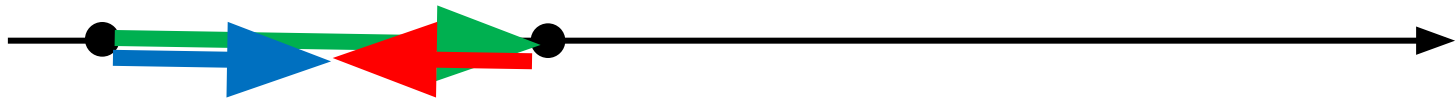
$$\vec{x} = [x_1]$$



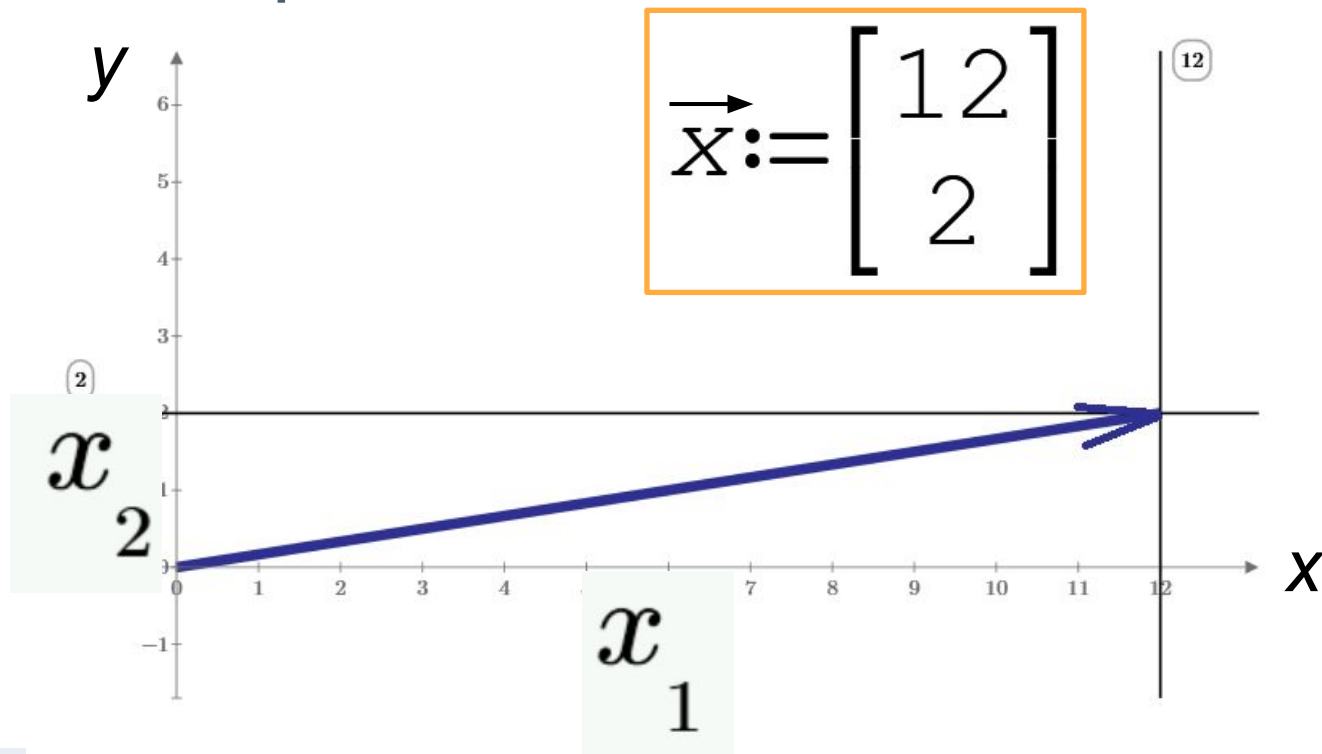
Векторы на прямой

N=1

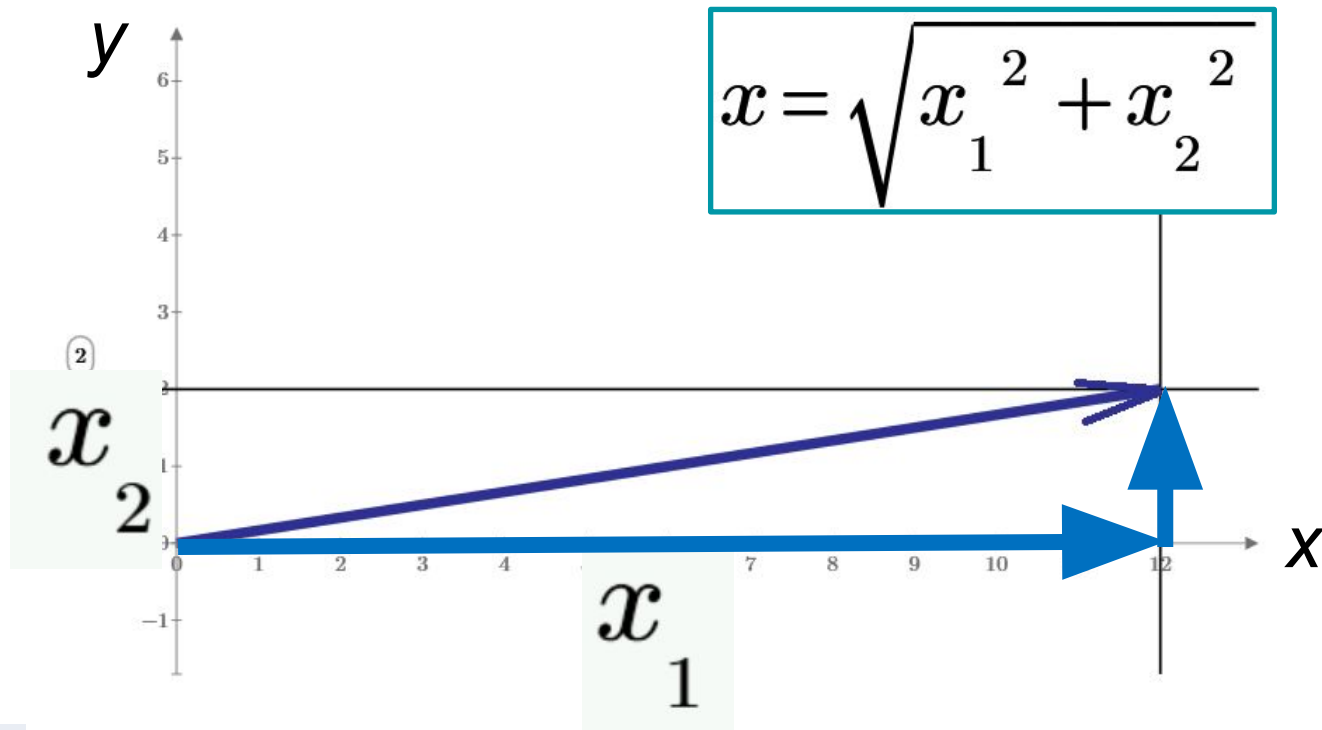
$$\vec{x} = [x_1]$$



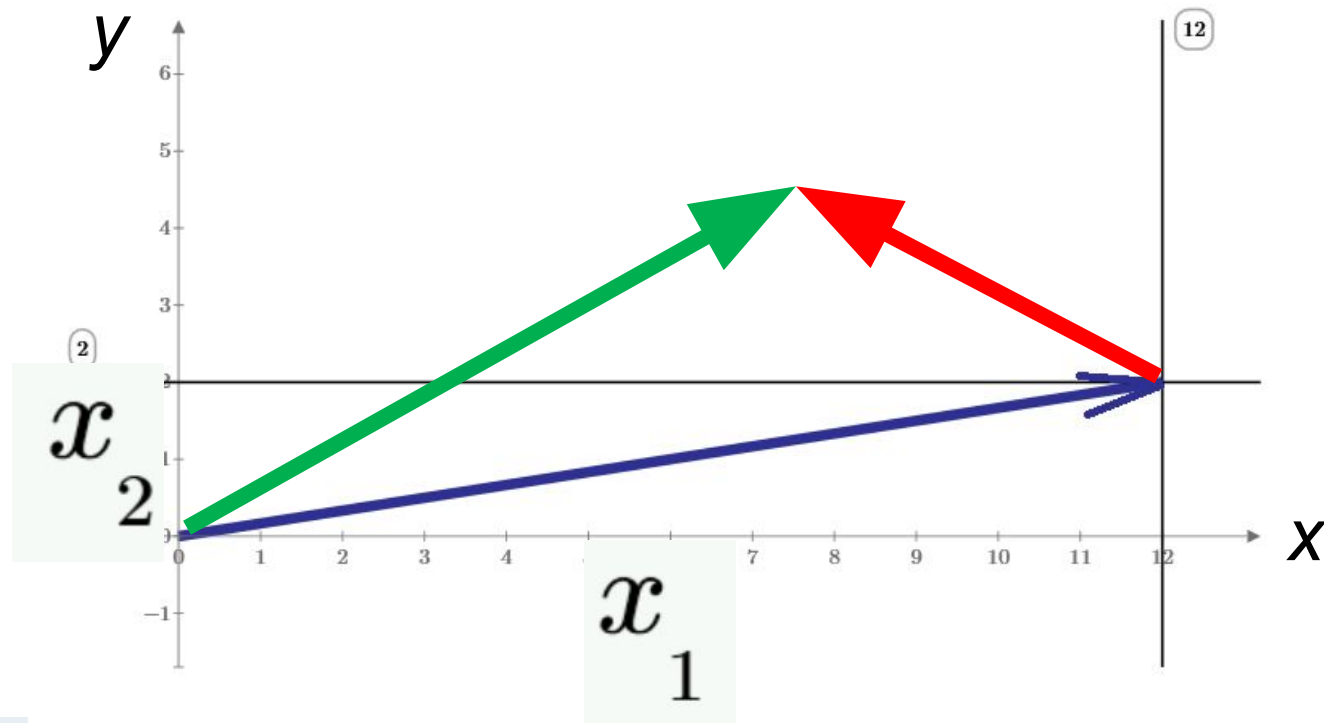
Векторы на плоскости



Длина вектора



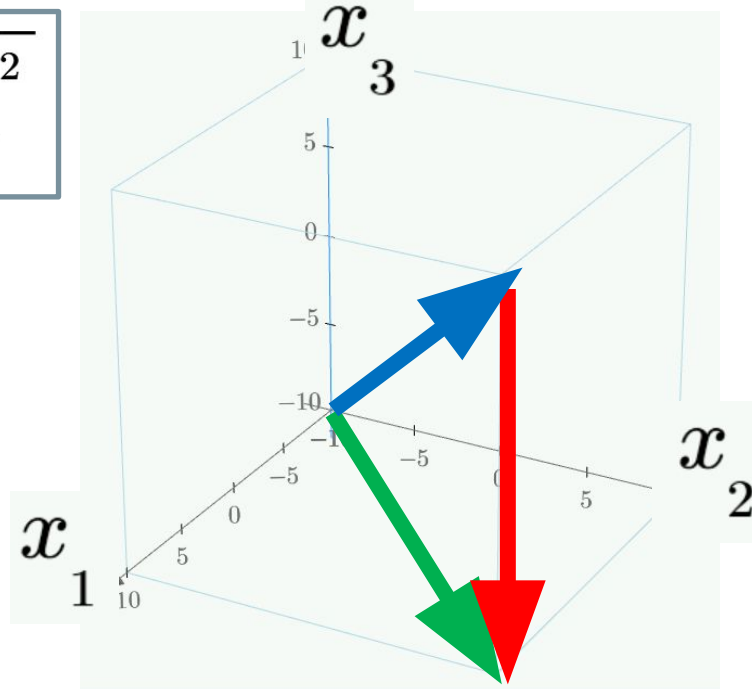
Векторы на плоскости



Векторы в пространстве

$$x := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



Домашнее задание

Напишите код на Python, реализующий расчет длины вектора, заданного его координатами.



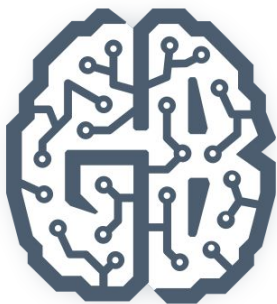
Что мы узнали?

1. Что такое векторы
2. Как визуализировать векторы на плоскости
и в пространстве
3. Как считать длину вектора: теорема Пифагора



Введение в математику

Урок 2



Введение в аналитическую геометрию

Прямая на плоскости

План урока

1. Уравнение прямой на плоскости
2. Графики прямой (Python)
3. Наклон прямой
4. Параллельные и перпендикулярные прямые

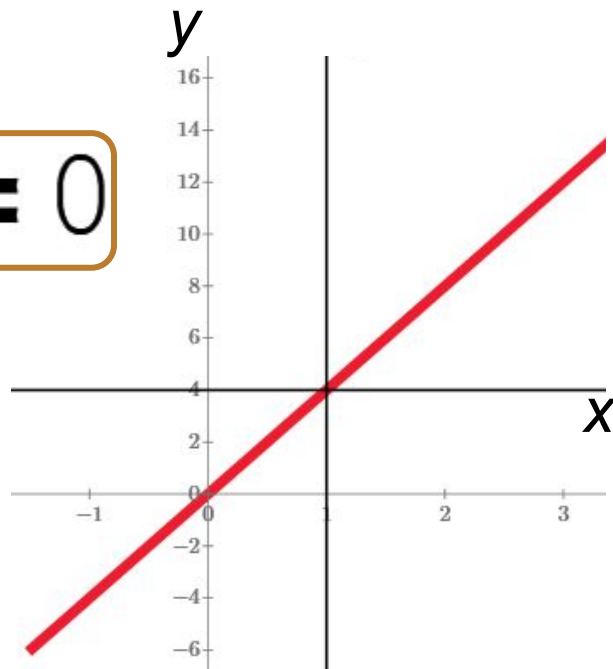


Уравнение прямой на плоскости

$$y = k \cdot x + b$$

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$$



Уравнение прямой на плоскости

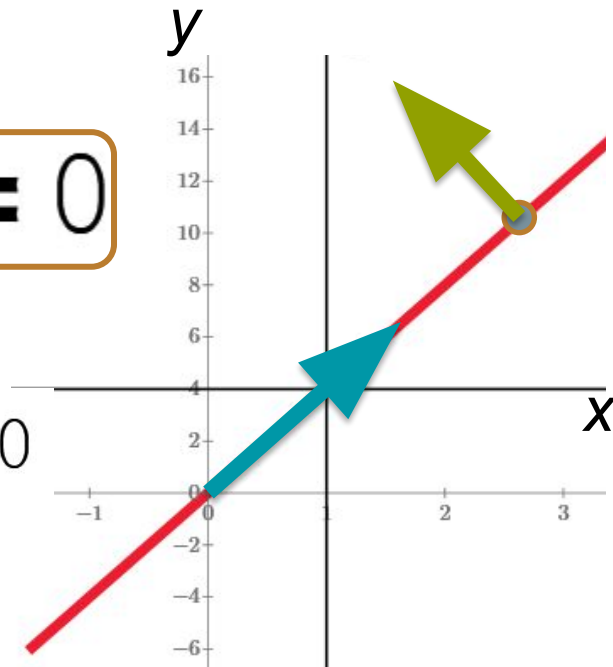
$$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$$

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C = 0$$

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$



Прямая, проходящая через две точки

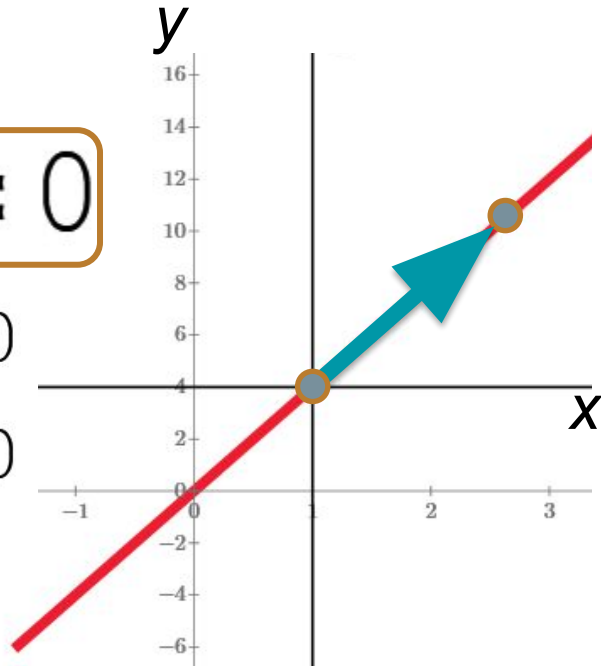
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

$$A \cdot (x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$A \cdot (x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

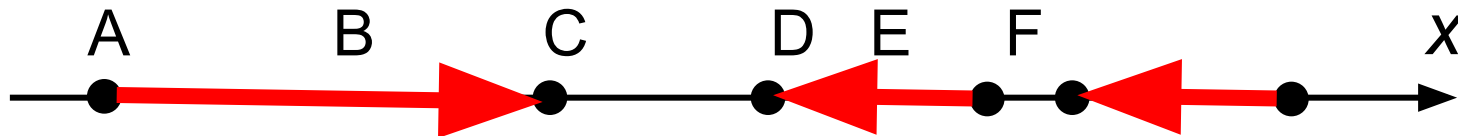
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$



Векторы на прямой

N=1

$$\vec{x} = [x_1]$$

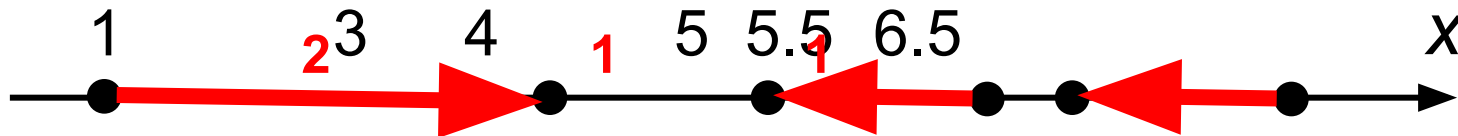


Векторы на прямой

N=1

$$\vec{X} = [x_1]$$

$$X = |\vec{X}| = 3 - 1$$



Уравнение прямой на плоскости

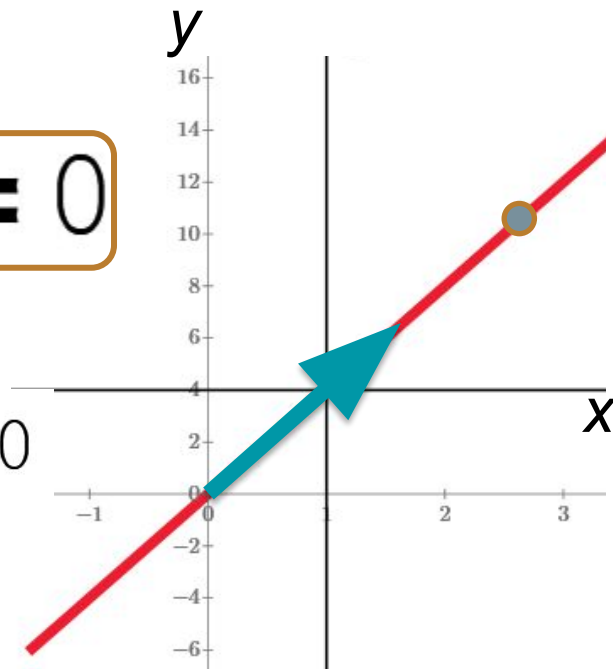
$$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$$

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C = 0$$

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

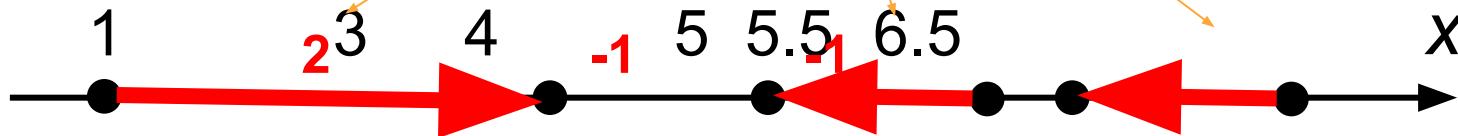
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$



Векторы на прямой

N=1

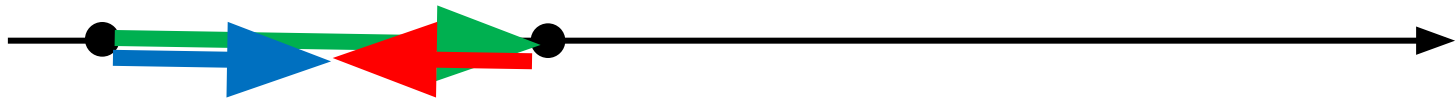
$$\vec{x} = [x_1]$$



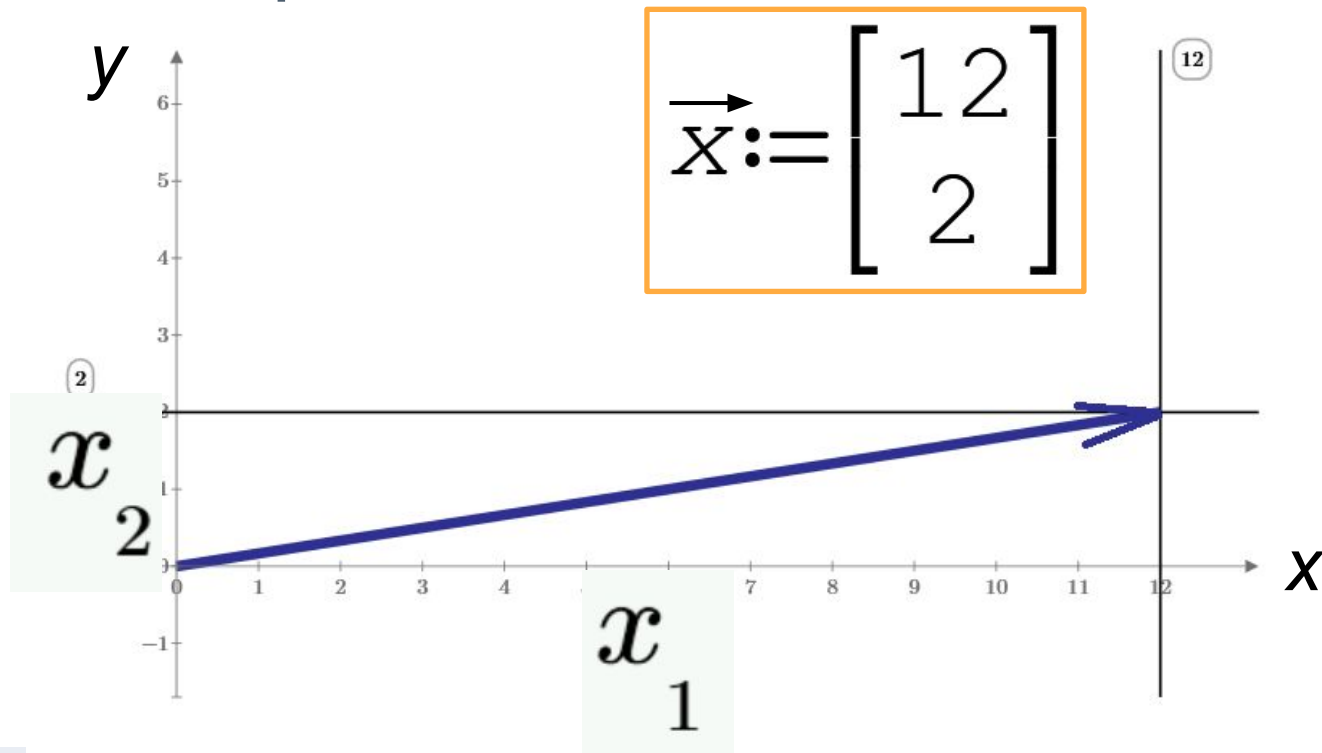
Векторы на прямой

N=1

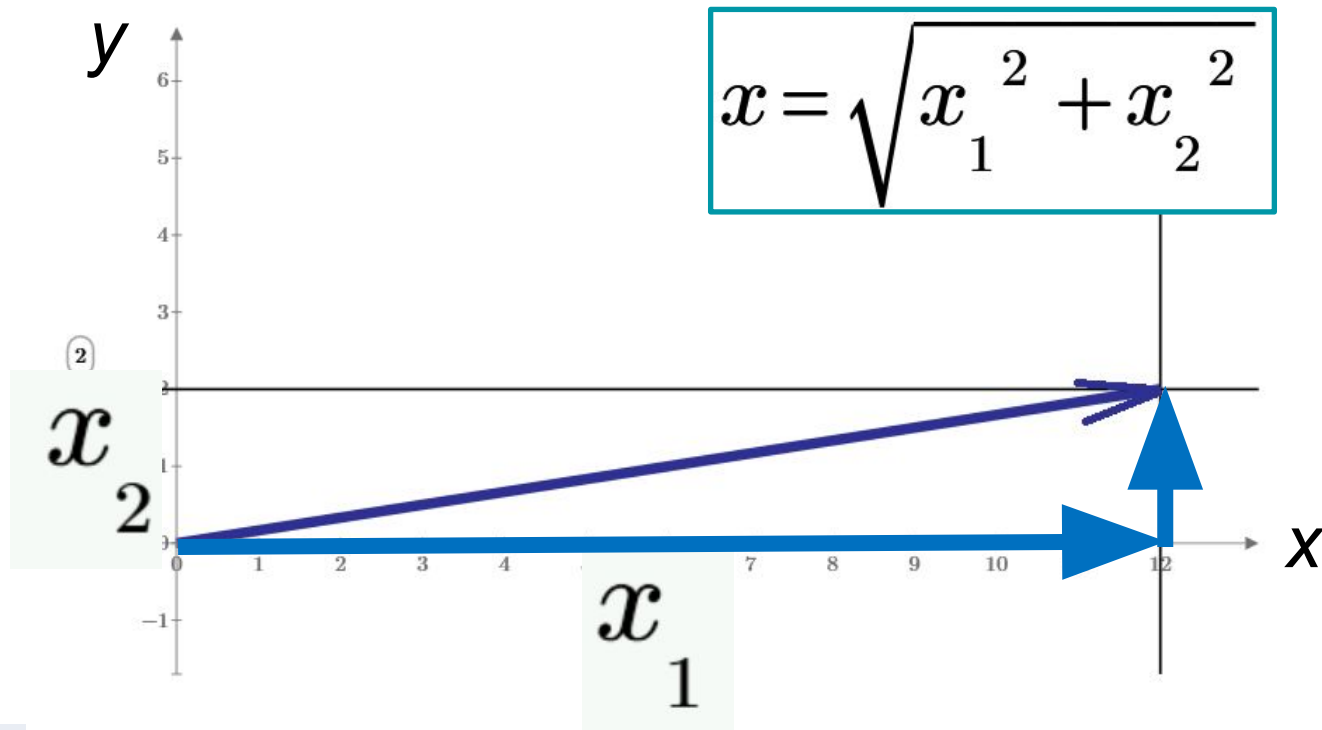
$$\vec{x} = [x_1]$$



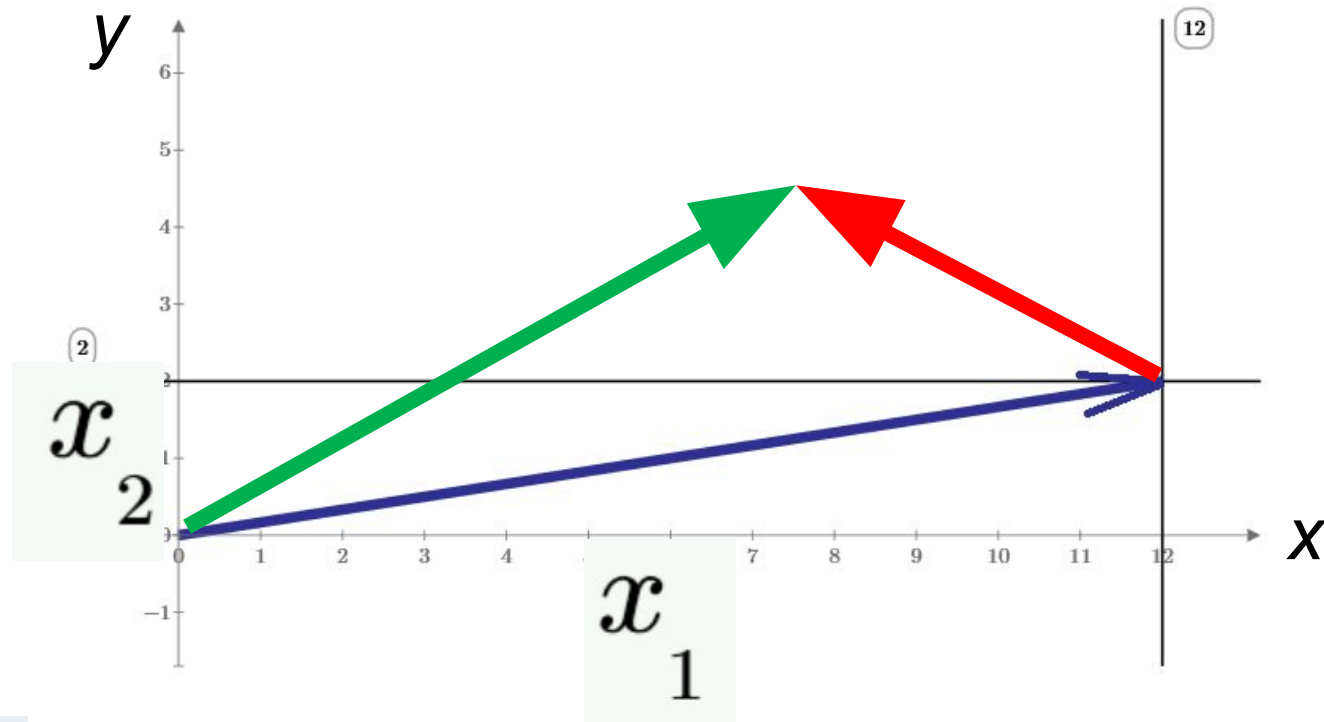
Векторы на плоскости



Длина вектора



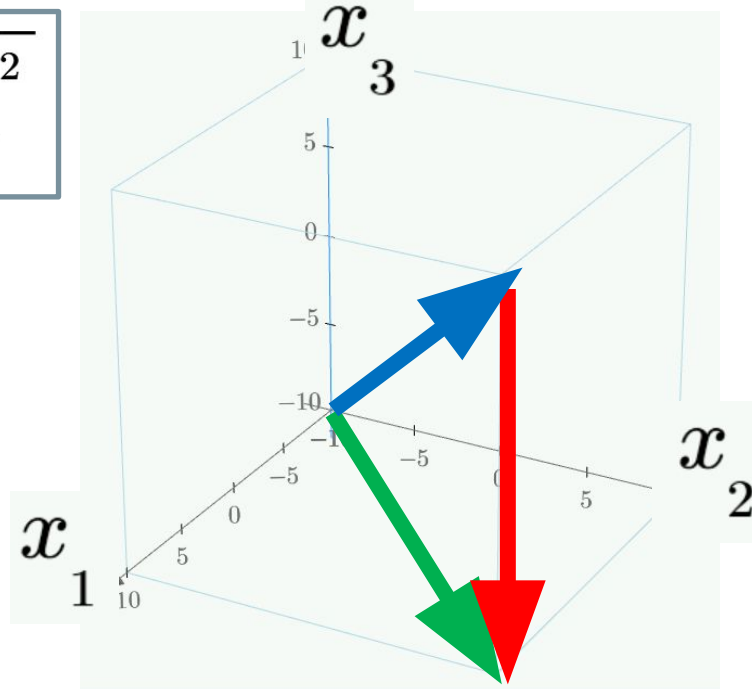
Векторы на плоскости



Векторы в пространстве

$$x := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

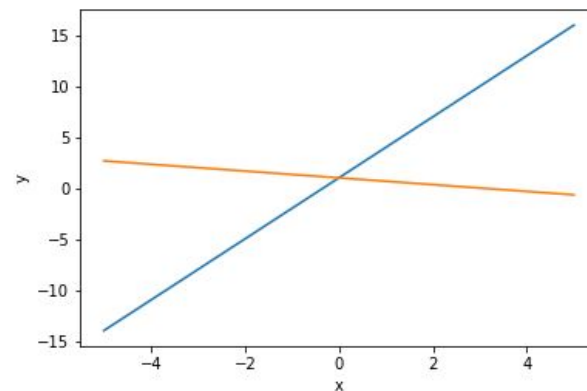


Домашнее задание

Почему прямые не кажутся перпендикулярными?

```
x = np.linspace(-5, 5, 21)
y = 3*x+1
y2 = (-1/3)*x+1
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,y2)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
```

<matplotlib.text.Text at 0x6aa80f0>



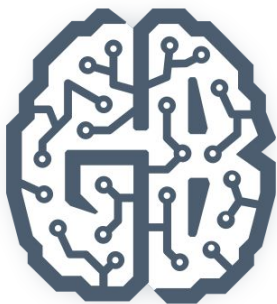
Что мы узнали?

1. Как записываются уравнения прямой на плоскости
2. Что такое наклон прямой
3. Как связаны уравнения параллельных и перпендикулярных прямых



Введение в математику

Урок 2



Введение в аналитическую геометрию

Квадратичные формы и кривые 2-го порядка

План урока

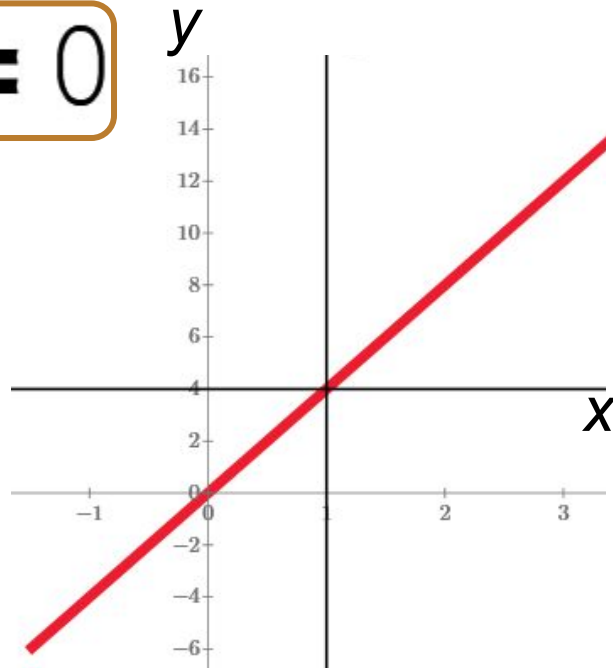
1. Линейные и квадратичные формы
2. Линии 2го порядка
3. Какими уравнениями описываются эллипс, парабола и гипербола
4. Графики эллипса, параболы и гиперболы



Уравнение прямой на плоскости

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$$



Линии 2-го порядка на плоскости

$$A \cdot x + B \cdot y + C + \\ + a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + cxy = 0$$

алгебраическое
уравнение 2-го порядка



Линии 2-го порядка на плоскости

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + \\ + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0$$

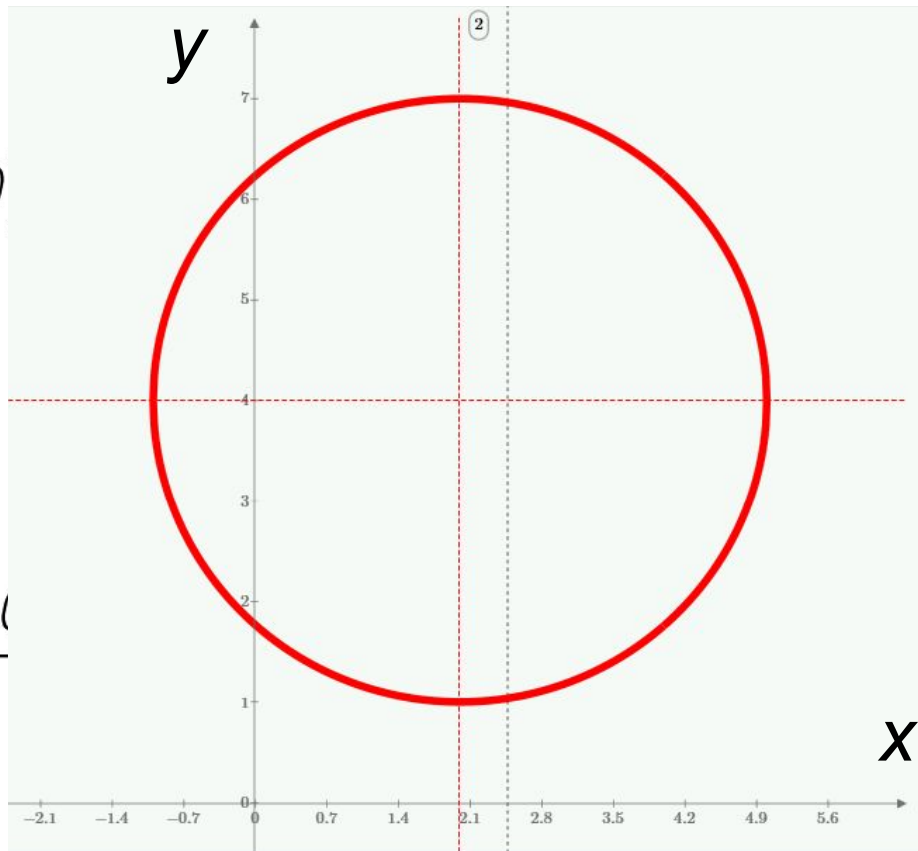
$$a_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 + \\ + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 + a_{33} = 0$$



Окружность

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

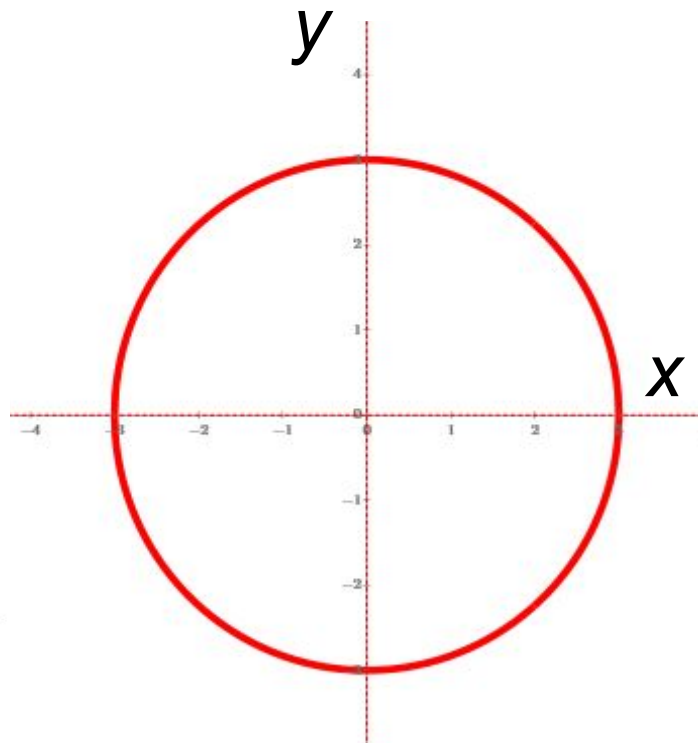
$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{R^2} = 1$$



Окружность

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{R^2} = 1$$

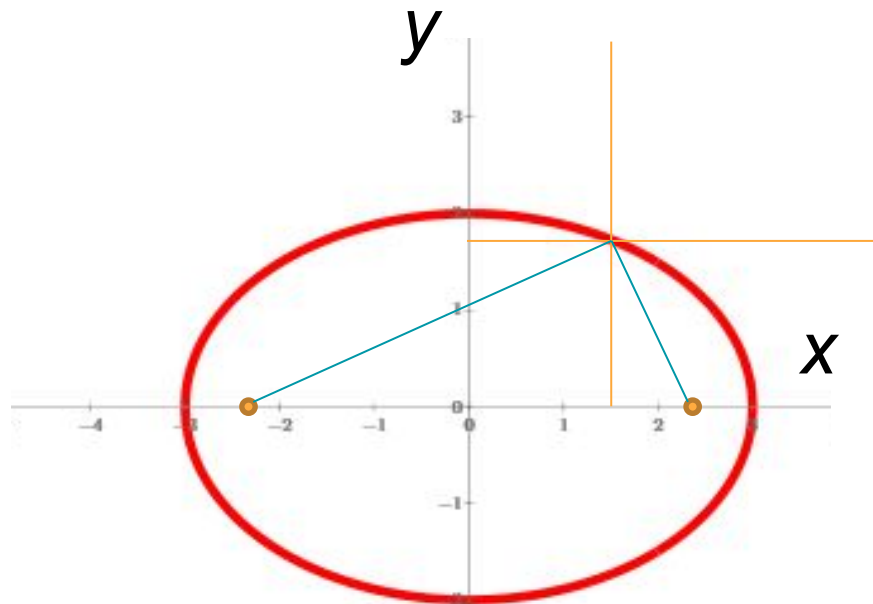


Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2 \cdot a$$

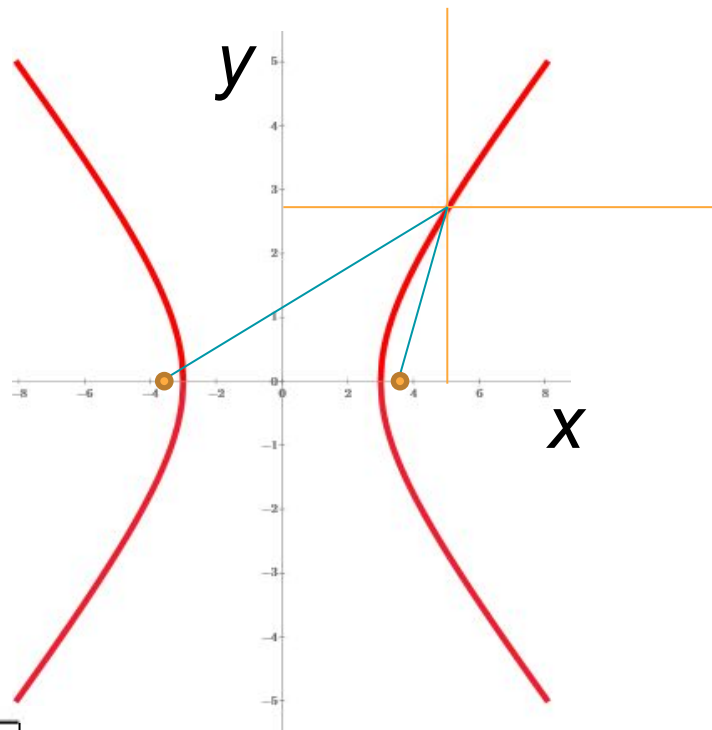


Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

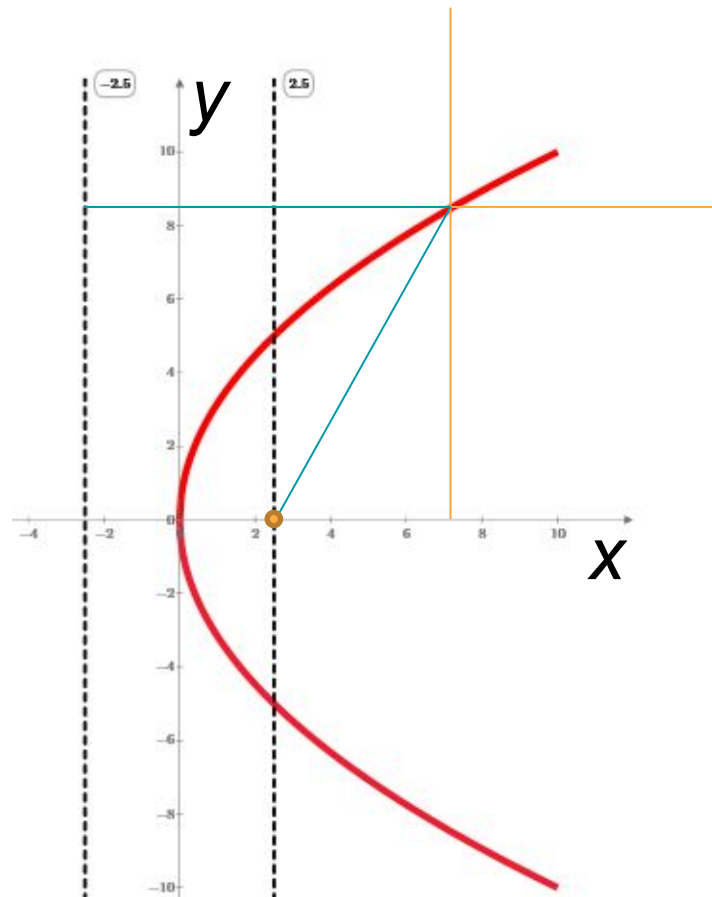
$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2 \cdot a$$



Парабола

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2} + y^2 = \frac{p}{2} + x$$



Домашнее задание

Напишите код на Python, реализующий построение графиков:

1. окружности
2. эллипса
3. гиперболы



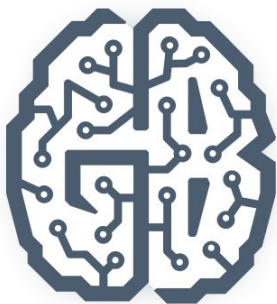
Что мы узнали?

1. Что такое линейные и квадратичные формы
2. Какими уравнениями описываются кривые 2-го порядка
3. Как выглядят графики эллипса, параболы и гиперболы



Введение в математику

Урок 2



Введение в аналитическую геометрию

Линии и поверхности в пространстве

План урока

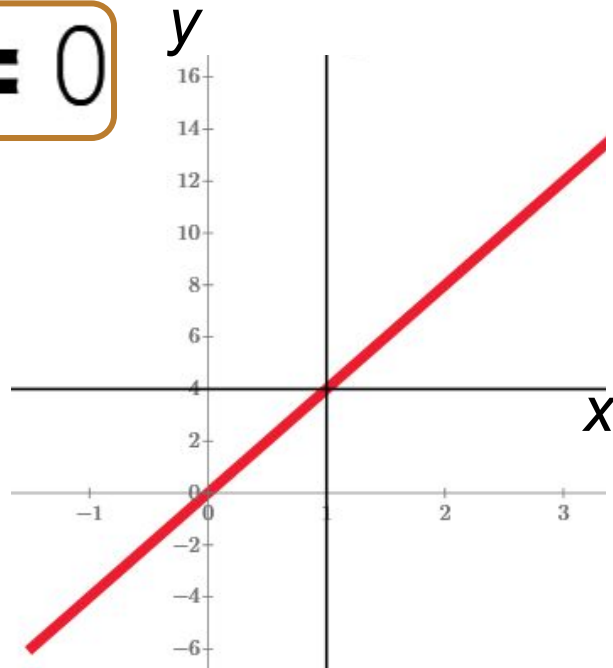
1. Уравнение плоскости в пространстве
2. Уравнение прямой в пространстве
3. Поверхности 2-го порядка в пространстве



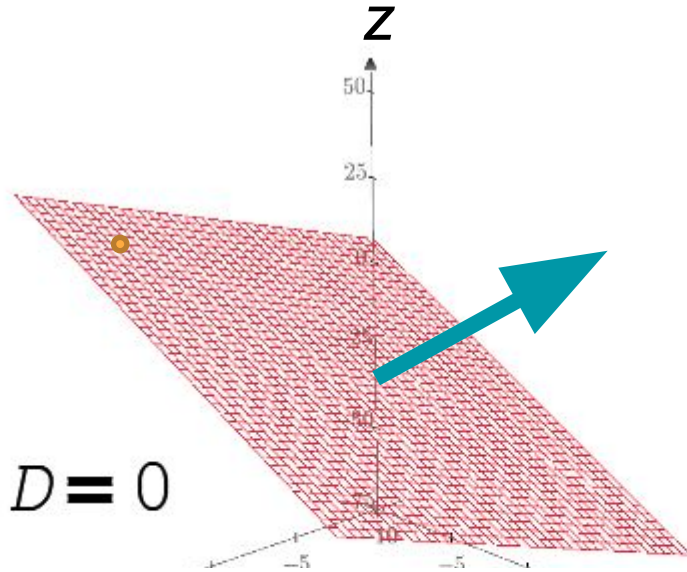
Уравнение прямой на плоскости

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$$



Уравнение плоскости в пространстве



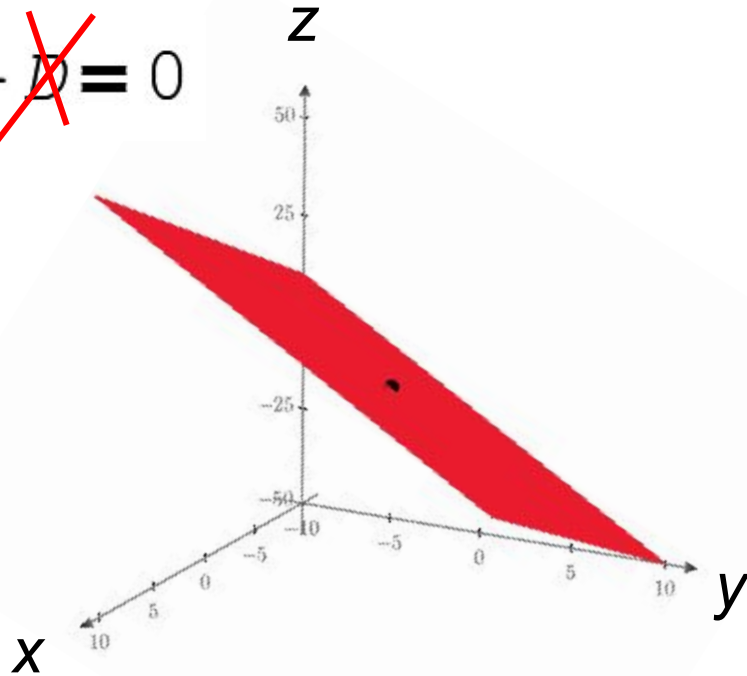
$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0,$$



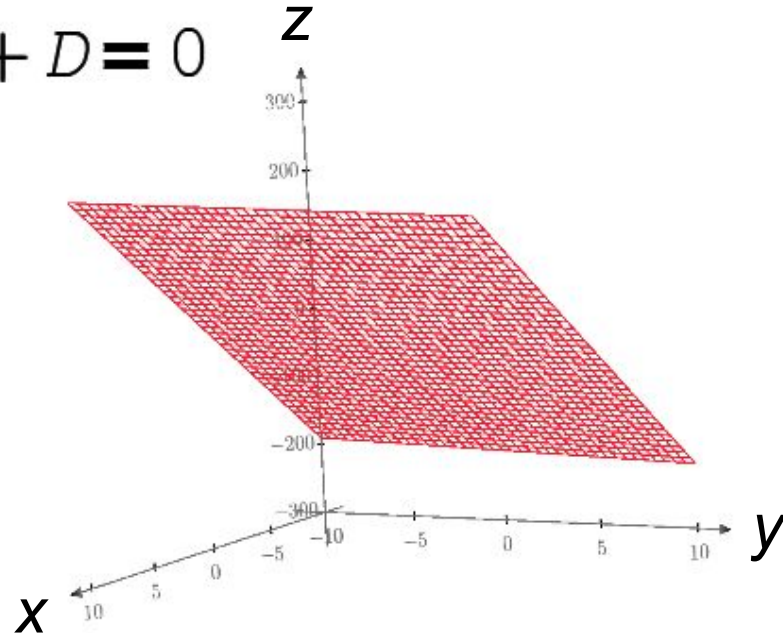
Неполное уравнение плоскости

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + \cancel{D} = 0$$



Неполное уравнение плоскости

$$A \cdot x + \cancel{B \cdot y} + C \cdot z + D = 0$$

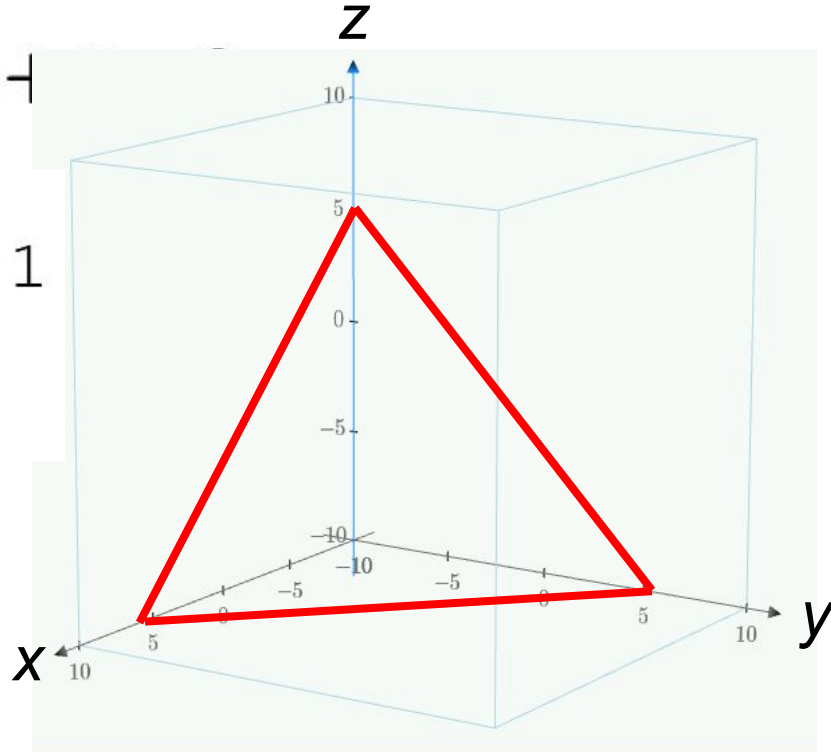


Уравнение плоскости «в отрезках»

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

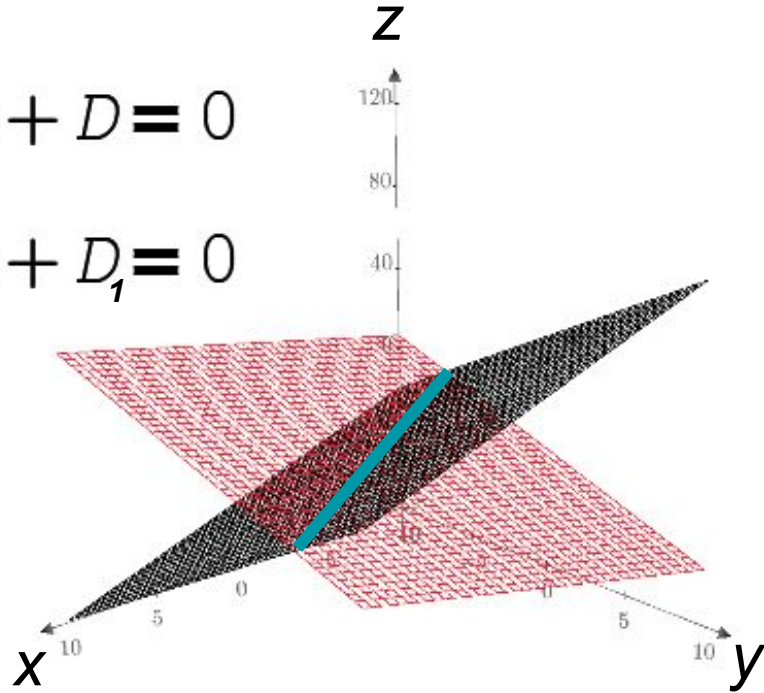
$$\frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



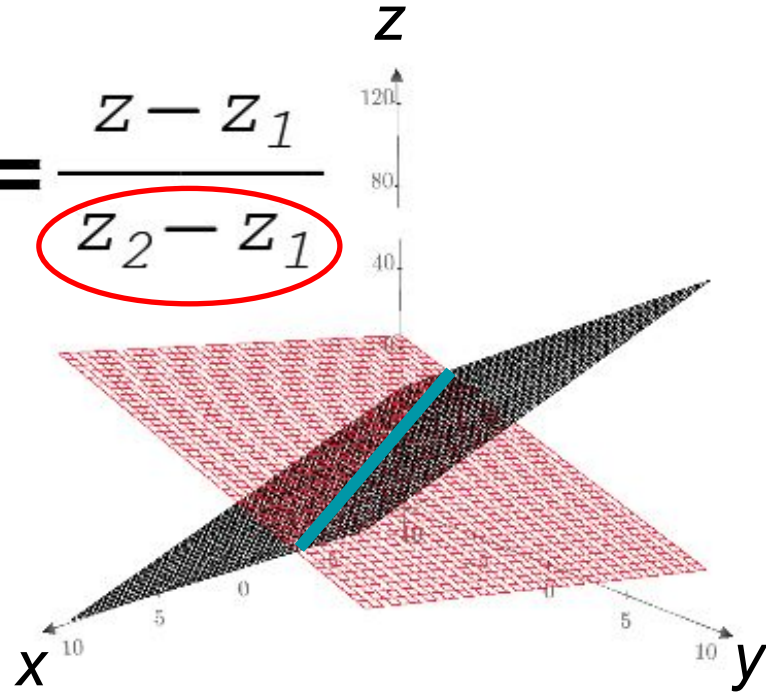
Уравнение прямой в пространстве

$$\begin{cases} A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \\ A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \end{cases}$$



Уравнение прямой в пространстве

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$



Поверхности 2-го порядка

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 +$$

$$+ 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0$$



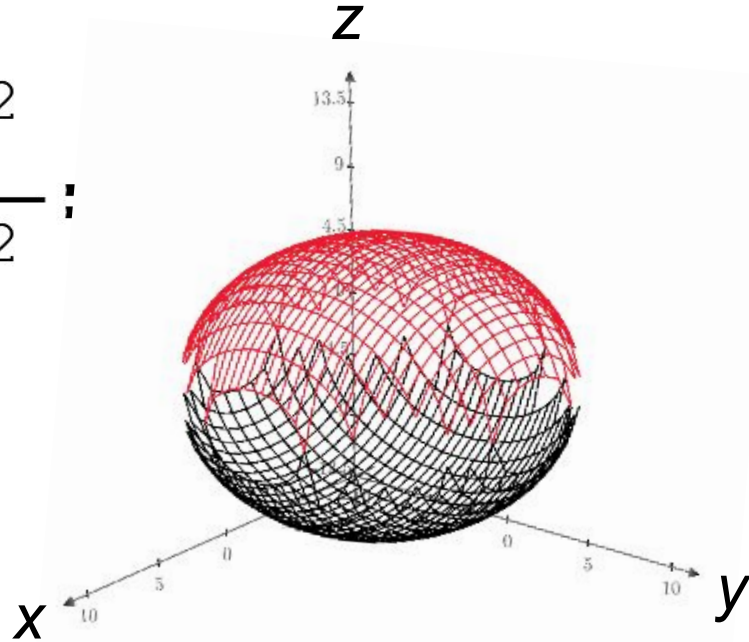
Поверхности 2-го порядка

$$\begin{aligned} & a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + \\ & + a_{33} \cdot z^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x \cdot z + 2 \cdot a_{23} \cdot y \cdot z + \\ & + 2 \cdot a_{14} \cdot x + 2 \cdot a_{24} \cdot y + 2 \cdot a_{34} \cdot z + a_{44} = 0 \end{aligned}$$



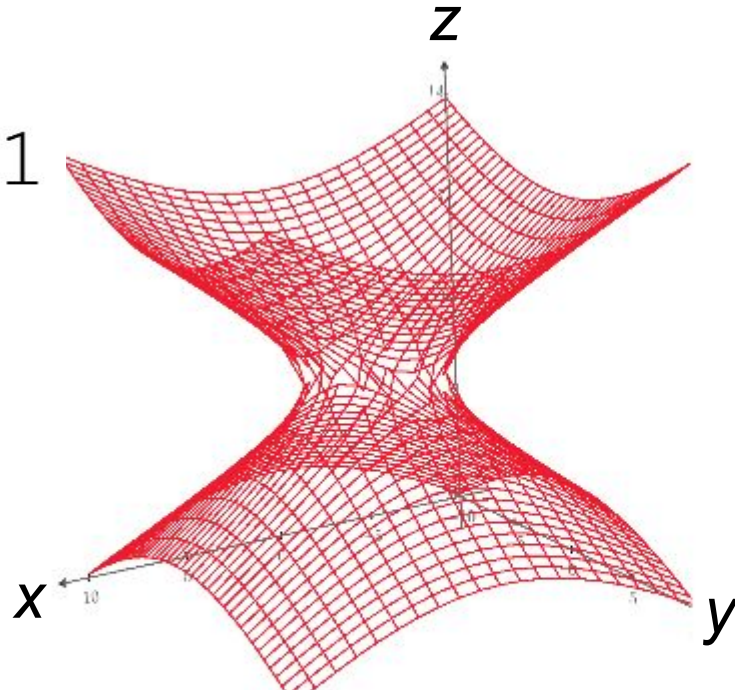
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



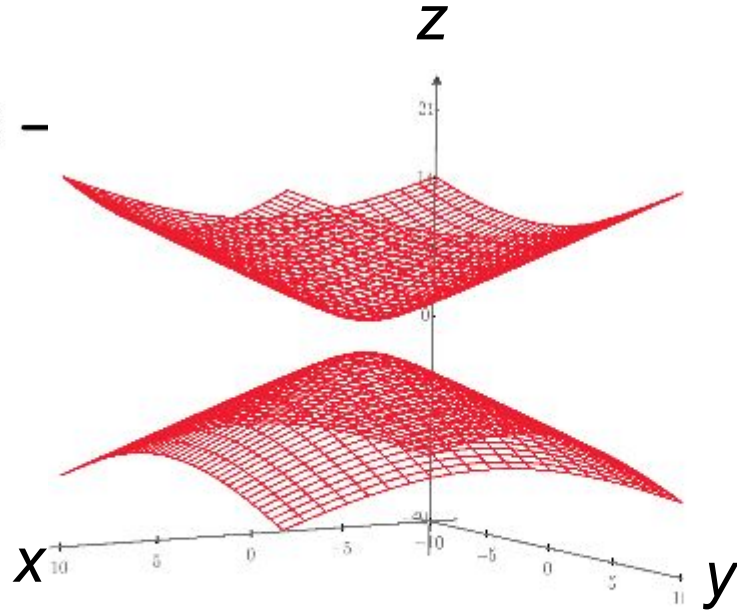
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



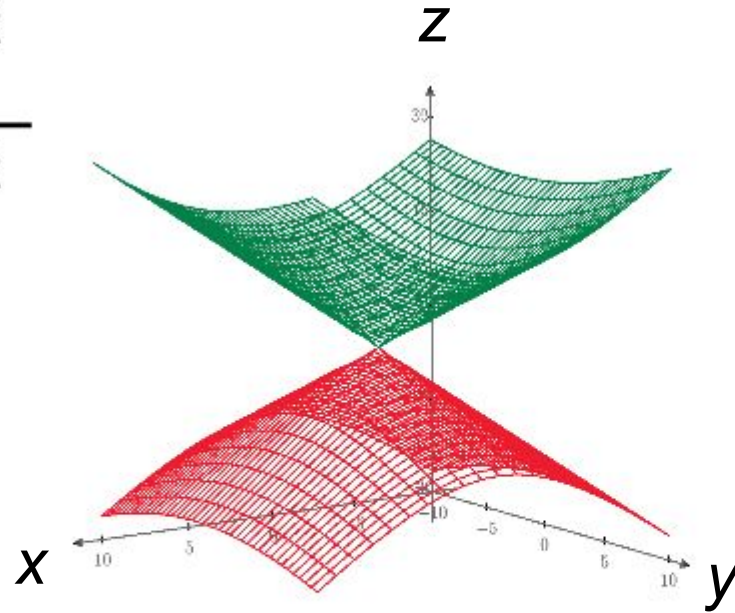
Двухполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



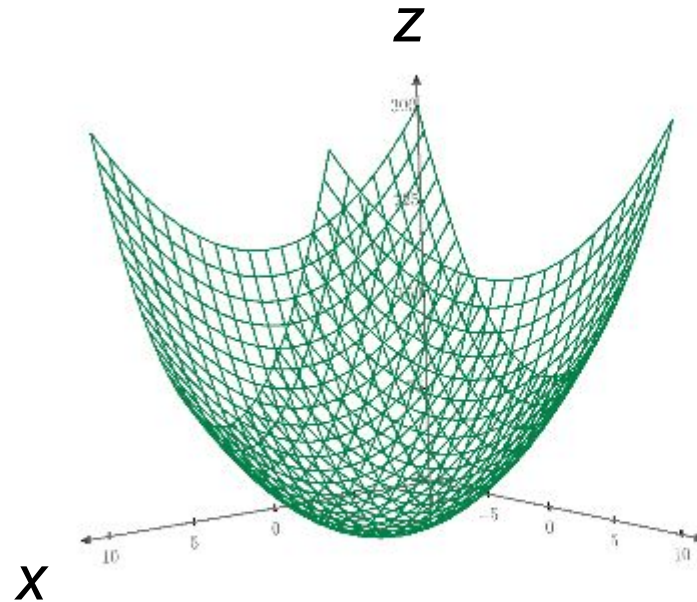
Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$



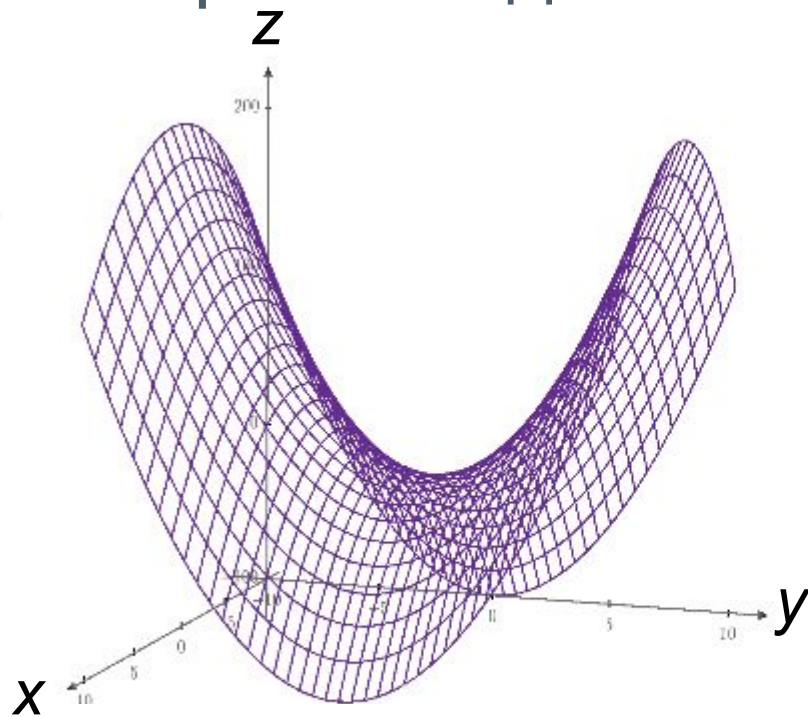
Эллиптический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

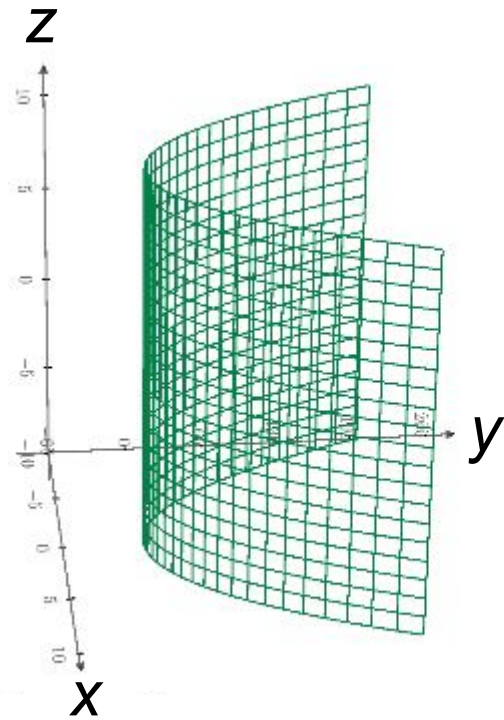


Гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



Цилиндры



Домашнее задание

1. Пусть задана плоскость:

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$$

Напишите уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через начало координат.



Домашнее задание

2. Пусть задана плоскость:

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$$

и прямая:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Как узнать, принадлежит прямая плоскости или нет?



Что мы узнали?

1. Как задается уравнение прямой и плоскости в пространстве
2. Как задаются уравнения поверхностей 2го порядка
3. Какие бывают виды поверхностей 2го порядка



Введение в математику

Урок 2



Введение в аналитическую геометрию

Графики линии и поверхности в пространстве

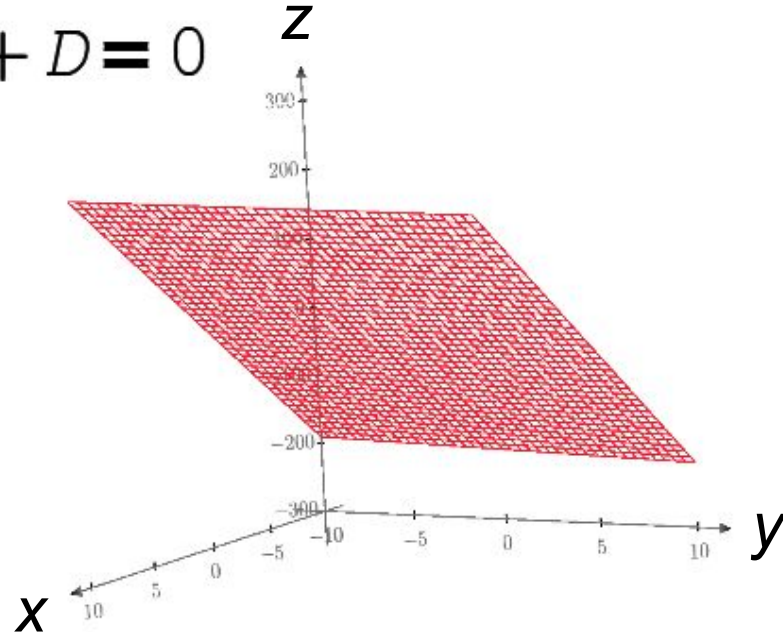
План урока

1. График плоскости в пространстве
2. График прямой в пространстве
3. Графики поверхностей 2го порядка в пространстве



Уравнение плоскости

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$



Домашнее задание

1. Нарисуйте трехмерный график двух параллельных плоскостей
2. Нарисуйте трехмерный график двух любых поверхностей 2го порядка



Что мы узнали?

1. Как нарисовать 3D-графики точки, прямой и плоскости в пространстве
2. Как нарисовать 3D-графики поверхностей 2го порядка

