

- ▶ 1. Таблица интегралов
- ▶ 2. Замена переменной
- ▶ 3. Интегрирование по «по частям»

НАХОЖДЕНИЕ
НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.



Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на применении свойств интеграла.

Примеры.

$$\begin{aligned}\int (5x^4 - 6x^2 + 2)dx &= \int 5x^4 dx - \int 6x^2 dx + \int 2dx = \\ &= x^5 - 2x^3 + 2x + C\end{aligned}$$

$$\int (1 - \sin x)dx = \int dx - \int \sin x dx = x + \cos x + C$$

Таблица интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Примеры

Пример 1. Найти интеграл:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

Пример 2. Найти интеграл:

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Примеры

Пример 3. Найти интеграл:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - 3e^x \right) dx &= \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx - 3 \int e^x dx = \\ &= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 2 \ln|x| - 3e^x + C = -2\sqrt{x} + 2 \ln|x| - 3e^x + C \end{aligned}$$

Примеры

Пример 4. Найти интеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{x} dx &= \int \frac{1 + 2\sqrt{x} + x}{x} dx = \\ &= \int \frac{1}{x} dx + 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int dx = \\ &= \ln|x| + 4\sqrt{x} + x + C\end{aligned}$$

Метод замены переменной

Метод основан на понятии производной сложной функции $F(\varphi(x))$.

Теорема. Если функция $f(t)$ имеет первообразную $F(t)$, а функция $t=\varphi(x)$ дифференцируема, то функция $f(\varphi(x))$ также имеет первообразную:

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$$

Доказательство

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} F'(t) &= F'(\varphi(x)) = F'_t(t)\varphi'_x(x) = f(t) \cdot \varphi'(x) = \\ &= f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \\ &= F(\varphi(x)) + C \end{aligned}$$



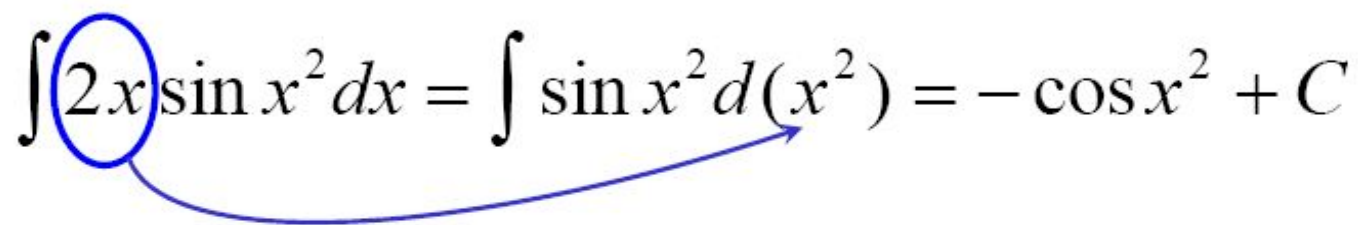
Пример

Найти интеграл:

$$\int 2x \sin x^2 dx$$

Введение переменной под знак дифференциала

Преобразовываем функцию под знаком дифференциала:

$$\int 2x \sin x^2 dx = \int \sin x^2 d(x^2) = -\cos x^2 + C$$


Другими словами, мы **ввели** переменную под знак дифференциала.

Пример

Получили:

$$\int 2x \sin x^2 dx = -\cos x^2 + C$$

Иначе можно записать решение через замену переменной:

$$t = x^2 \quad dt = d(x^2) = 2x dx$$

$$\int 2x \sin x^2 dx = \int \sin t dt = -\cos t + C$$

Теорема

Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$. Тогда

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$$

где k и b постоянные числа, $k \neq 0$.

Пример

Найти интеграл:

$$\int (3x^2 + 5)^3 x dx$$

Решение.

Делаем замену: $t = 3x^2 + 5$

Находим: $dt = d(3x^2 + 5) = 6x dx$

$$\int (3x^2 + 5)^3 x dx = \frac{1}{6} \int t^3 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{(3x^2 + 5)^4}{24} + C$$

Формула интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемые функции.

Тогда для интегрирования может использоваться **формула интегрирования по частям** (integration by parts):

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Доказательство

Дифференциал произведения двух функций:

$$d(uv) = u dv + v du$$

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемы, то проинтегрируем равенство и получим:

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$



Пример 1

Найти интеграл

$$\int x e^x dx$$

подсказка

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

Пример 2

Найти интеграл $\int x \ln x dx$

подсказка

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Решение.

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \quad v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

«Неберущиеся» интегралы

Не все интегралы могут быть найдены рассмотренными способами.

«Неберущиеся» - интегралы, которые не могут быть выражены с помощью конечного числа элементарных функций. Например,

$$\int e^{-x^2} dx \quad \int \frac{\sin x}{x} dx \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

Эти функции можно представить в виде ряда и найти приближенно.

Компьютерное интегрирование

Теперь имеются компьютерные пакеты, позволяющие находить любые интегралы. Например, пакет **Maple**.



Интегрирование при помощи компьютера превращает былое искусство в элементарное нажатие кнопок.

Ахтямов А.М.



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

Шыныбеков А.Н. 11кл
стр. 8-12 № 48,54

$$48. \text{ а) } \int \frac{24^x - 8^x}{4^x} dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{3e^{2x} - e^x \sin x}{e^x} dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{e^{2x} - 4}{6e^x - 12} dx;$$

$$\text{г) } \int 2^x 5^x dx.$$

$$54. \text{ а) } \int \sin 2x \cos 2x dx;$$

$$\text{б) } \int (\sin 3\lambda + \cos 3\lambda)^2 d\lambda;$$

$$\text{в) } \int \cos \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} dx;$$

$$\text{г) } \int \cos^2 x dx;$$

