- 1. Таблица интегралов
- 2. Замена переменной
- 3. Интегрирование по «по частям»

НАХОЖДЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на применении свойств интеграла.

Примеры.

$$\int (5x^4 - 6x^2 + 2)dx = \int 5x^4 dx - \int 6x^2 dx + \int 2dx =$$
$$= x^5 - 2x^3 + 2x + C$$

$$\int (1 - \sin x)dx = \int dx - \int \sin x dx = x + \cos x + C$$

Таблица интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$n \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Примеры

Пример 1. Найти интеграл:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

Пример 2. Найти интеграл:

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Примеры

Пример 3. Найти интеграл:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}-3e^{x}\right)dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx+2\int\frac{1}{x}dx-3\int e^{x}dx=$$

$$=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+2\ln|x|-3e^{x}+C=-2\sqrt{x}+2\ln|x|-3e^{x}+C$$

Примеры

Пример 4. Найти интеграл:

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} dx = \int \frac{1+2\sqrt{x}+x}{x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int dx =$$

$$= \ln|x| + 4\sqrt{x} + x + C$$

Метод замены переменной

Метод основан на понятии производной сложной функции $F(\varphi(x))$.

Теорема. Если функция $f(t)$ имеет первообразную $F(t)$, а функция $t=\varphi(x)$ дифференцируема, то функция $f(\varphi(x))$ также имеет первообразную:

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$$

Доказательство

По правилу дифференцирования сложной функции

$$F'(t) = F'(\varphi(x)) = F_t'(t)\varphi_x'(x) = f(t)\cdot\varphi'(x) =$$
$$= f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) =$$
$$= F(\varphi(x)) + C$$

□

Пример

Найти интеграл:

$$\int 2x \sin x^2 dx$$

Введение переменной под знак дифференциала

Преобразовываем функцию под знаком дифференциала:

$$\int 2x \sin x^2 dx = \int \sin x^2 d(x^2) = -\cos x^2 + C$$

Другими словами, мы **ввели переменную под знак дифференциала**.

Пример

Получили:

$$\int 2x\sin x^2 dx = -\cos x^2 + C$$

Иначе можно записать решение через замену переменной:

$$t = x^2 \qquad dt = d(x^2) = 2xdx$$

$$\int 2x\sin x^2 dx = \int \sin t dt = -\cos t + C$$

Теорема

Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$. Тогда

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$$

где k и b постоянные числа, $k \neq 0$.

Пример

Найти интеграл:

$$\int (3x^2+5)^3 x\,dx$$

Решение.

Делаем замену: $t = 3x^2 + 5$

Находим: $dt = d(3x^2+5) = 6x\,dx$

$$\int (3x^2+5)^3 x\,dx = \frac{1}{6}\int t^3\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{(3x^2+5)^4}{24} + C$$

Формула интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемые функции.

Тогда для интегрирования может использоваться **формула интегрирования по частям** (integration by parts):

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Доказательство

Дифференциал произведения двух функций:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Если u(x) и v(x) – дифференцируемы, то проинтегрируем равенство и получим:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$\square$

Пример 1

Найти интеграл $\int xe^x dx$

подсказка
$$\int u dv = uv - \int v du$$

Решение.

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx =$$

$$= xe^x - e^x + C$$

Пример 2

Найти интеграл $\int x \ln x dx$

подсказка

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Решение.

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx & v = \dfrac{1}{2} x^2 \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

«Неберущиеся» интегралы

Не все интегралы могут быть найдены рассмотренными способами.

«Неберущиеся» - интегралы, которые не могут быть выражены с помощью конечного числа элементарных функций. Например,

$$\int e^{-x^2}dx \qquad \int \frac{\sin x}{x}dx \qquad \int \frac{dx}{\ln x}$$

Эти функции можно представить в виде ряда и найти приближенно.

Компьютерное интегрирование

Теперь имеются компьютерные пакеты, позволяющие находить любые интегралы. Например, пакет **Maple**.

Интегрирование при помощи компьютера превращает былое искусство в элементарное нажатие кнопок.

Ахтямов А.М.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

Шыныбеков А.Н. 11кл
стр. 8-12 № 48,54

48. а) $\int \frac{24^x - 8^x}{4^x} dx$; б) $\int \frac{3e^{2x} - e^x \sin x}{e^x} dx$;

в) $\int \frac{e^{2x} - 4}{6e^x - 12} dx$; г) $\int 2^x 5^x dx$.

54. а) $\int \sin 2x \cos 2x dx$; б) $\int (\sin 3\lambda + \cos 3\lambda)^2 d\lambda$;

в) $\int \cos\frac{x}{3} \sin\frac{x}{3} dx$; г) $\int \cos^2 x dx$;