МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

- Ответ на вопрос о совместности неоднородной системы дает ***теорема Кронекера-Капелли***:

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, то есть:

$$\mathbf{rang}\ A = \mathbf{rang}\ \tilde{A}$$

Рассмотрим систему, у которой число уравнений равно числу неизвестных, $m=n$.

$$AX=B,$$

где $A=\left(a_{ij}\right)$ - квадратная матрица порядка n.

•

При решении такой системы возможны два случая:

1) *Матрица А - не вырождена, ее определитель* $\Delta \neq 0$.

В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Уравнение $AX=B$ умножим слева на A^{-1}, получим:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

так как $A^{-1}A = E$, то решение системы найдем:

$$\boldsymbol{X=A^{-1}B}$$

- Итак, *система имеет единственное решение*, которое находится с помощью обратной матрицы по формуле:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Отсюда легко получаются известные *формулы* ***Крамера***:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k \\ (i = \overline{1,n}) \end{cases}$$

или

$$x_1 = \frac{\Delta_i}{\Delta};\ (i = \overline{1,n}),$$

где $\Delta_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\, b_k$ - определитель матрицы А, у которой ***i***-ый столбец заменен столбцом свободных членов.

- Пример 13. Решить систему с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение

- Установим, будет ли основная матрица системы невырожденной, для этого найдем ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 16 + 1 - 0 + 4 - 0 =$$

$$= 21, \Delta \neq 0,$$

следовательно **А -не вырождена**.

- Решение X ищем по формуле X = A^{-1}B.

Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

- Вычислим все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{21} = 1; \quad A_{31} = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{22} = 2; \quad A_{32} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = 5; \quad A_{33} = -2$$

тогда: $$A^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Найдем неизвестные системы:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 8+ & 0+ & 8 \\ 16+ & 0- & 5 \\ -2+ & 0- & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

итак, $x_1 = \frac{16}{21}$; $\quad x_2 = \frac{11}{21}$; $\quad x_3 = -\frac{4}{21}$.

2) *Матрица А - вырождена, то есть*

$A = detA = 0$. *Тогда ее ранг* $r(A) = r < n$.

Условие совместности тоже выполнено, так как ранг расширенной матрицы $\widetilde{A}$ равен r: $\boldsymbol{r}(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{r}$

Как найти и записать решения системы в этом случае?

Пусть базисный минор матрицы А, порядок которого равен r, находится в левом верхнем углу.

В этом случае n-r уравнений, коэффициенты которых не входят в базисный минор, будут линейными комбинациями первых уравнений и могут быть отброшены.

Тогда система имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{array}\right\}$$

Перепишем систему, оставив слева только ***r*** слагаемых в каждом уравнении:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ - ***базисные*** *переменные*,

$x_{r+1}, \ldots, x_n$ - ***свободные*** *переменные*.

- Если выразить базисные переменные в общем виде через свободные, то получим *общее решение системы*.

Если в этом общем решении придавать свободным переменным конкретные числовые значения, то получим *частное решение системы*.

Таким образом, в этом случае, когда

$$r(A) = r(\tilde{A}) < n,$$

система имеет бесчисленное множество решений (пример 16).