

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ



● Ответ на вопрос о совместности неоднородной системы дает *теорема Кронекера-Капелли*:

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, то есть:

$$\mathit{rang} A = \mathit{rang} \tilde{A}$$



Рассмотрим систему, у которой число уравнений равно числу неизвестных, $m=n$.

$$AX=B,$$

где $A = (a_{ij})$ - квадратная матрица
порядка n .



•
При решении такой системы возможны два случая:

1) Матрица A - не вырождена, ее определитель $\Delta \neq 0$.

В этом случае существует обратная матрица A^{-1} . Уравнение $AX=B$ умножим слева на A^{-1} , получим:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

так как $A^{-1}A = E$, то решение системы найдем:

$$X = A^{-1}B$$


- Итак, *система имеет единственное решение*, которое находится с помощью обратной матрицы по формуле:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$



- Отсюда легко получаются известные формулы **Крамера**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\Delta} (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n A_{ki}b_k \\ (i = \overline{1, n}) \end{array} \right.$$

ИЛИ

$$x_1 = \frac{\Delta_i}{\Delta}; (i = \overline{1, n}),$$

где $\Delta_i = \sum_{k=1}^n A_{ki}b_k$ - определитель матрицы A , у которой i -ый столбец заменен столбцом свободных членов.

Пример 13. Решить систему с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$



Решение

- Установим, будет ли основная матрица системы невырожденной, для этого найдем ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 16 + 1 - 0 + 4 - 0 = \\ = 21, \Delta \neq 0,$$

следовательно **A - не вырождена.**

Решение X ищем по формуле $X = A^{-1}B$.

Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$



Вычислим все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{21} = 1; \quad A_{31} = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{22} = 2; \quad A_{32} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = 5; \quad A_{33} = -2$$

тогда:

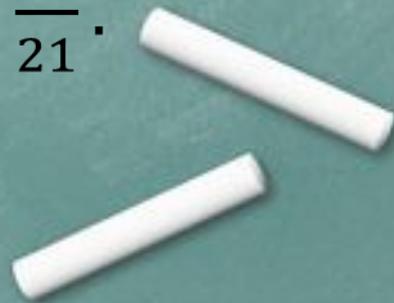
$$A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$



• Найдем неизвестные системы:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 8 + & 0 + & 8 \\ 16 + & 0 - & 5 \\ -2 + & 0 - & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Итак, $x_1 = \frac{16}{21}$; $x_2 = \frac{11}{21}$; $x_3 = -\frac{4}{21}$.



2) Матрица A - вырождена, то есть

$\Delta A = \det A = 0$. Тогда ее ранг $r(A) = r < n$.

Условие совместности тоже выполнено, так как ранг расширенной матрицы \tilde{A} равен r : $r(\tilde{A}) = r$

Как найти и записать решения системы
в этом случае?



Пусть базисный минор матрицы A , порядок которого равен r , находится в левом верхнем углу.

В этом случае $n-r$ уравнений, коэффициенты которых не входят в базисный минор, будут линейными комбинациями первых уравнений и могут быть отброшены.

Тогда система имеет следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{array} \right\}$$



Перепишем систему, оставив слева только r слагаемых в каждом уравнении:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{array} \right\}$$

x_1, x_2, \dots, x_r - *базисные переменные*,

x_{r+1}, \dots, x_n - *свободные переменные*.



- Если выразить базисные переменные в общем виде через свободные, то получим *общее решение системы*.

Если в этом общем решении придавать свободным переменным конкретные числовые значения, то получим *частное решение системы*.

Таким образом, в этом случае, когда

$$r(A) = r(\tilde{A}) < n,$$

система имеет бесчисленное множество решений (пример 16).

