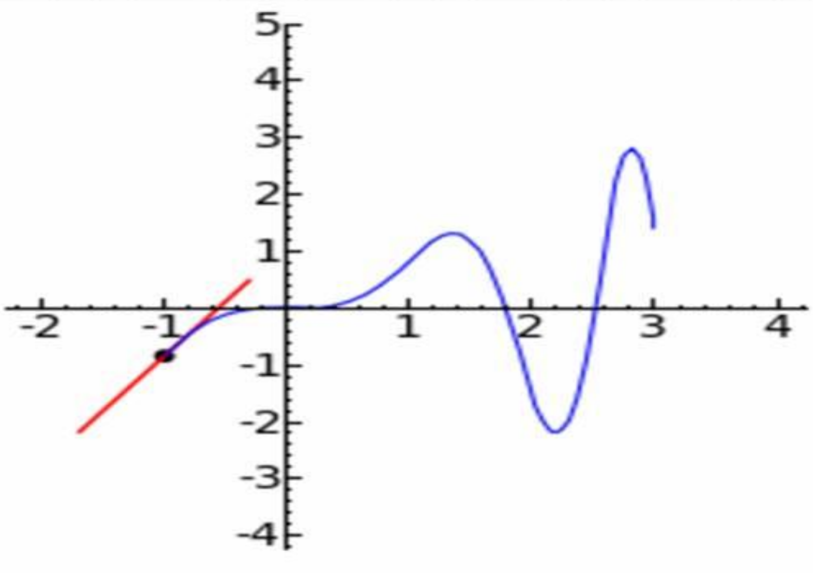
Производная функции

Глава II. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применение к исследованию функций.

Производная

- *Производная* – это функция, определяемая для каждого $\boldsymbol{x}$ как предел отношения (если он существует). Функцию, имеющую предел, называют дифференцируемой. Производная характеризует скорость изменения функции.

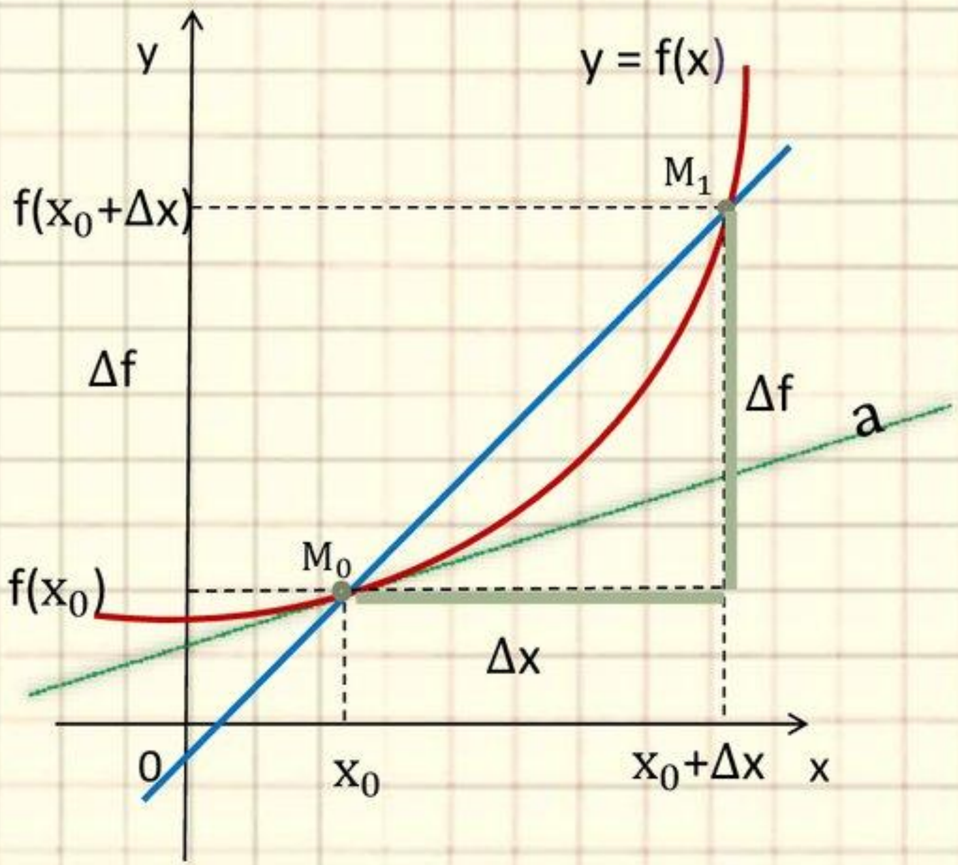


Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

- Пусть функция y = f(x) определена на интервале (a, b).
  Чтобы ввести понятие производной проделаем следующее:
  - аргументу $x \in (a, b)$ придадим приращение Δx: $x + \Delta x \in (a, b)$
  - найдем соответствующее приращение функции:
  $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$
  - составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
  - найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Если этот предел существует, то его называют **производной функции f(x)** и обозначают одним из символов
  $$f'(x),\ f'_{x},\ y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$$

Определение производной



Предел приращения функции к приращению аргумента, если он существует, называют производной функции в точке x_0

и пишут:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)}$$

$\Delta f(x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Понятие производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

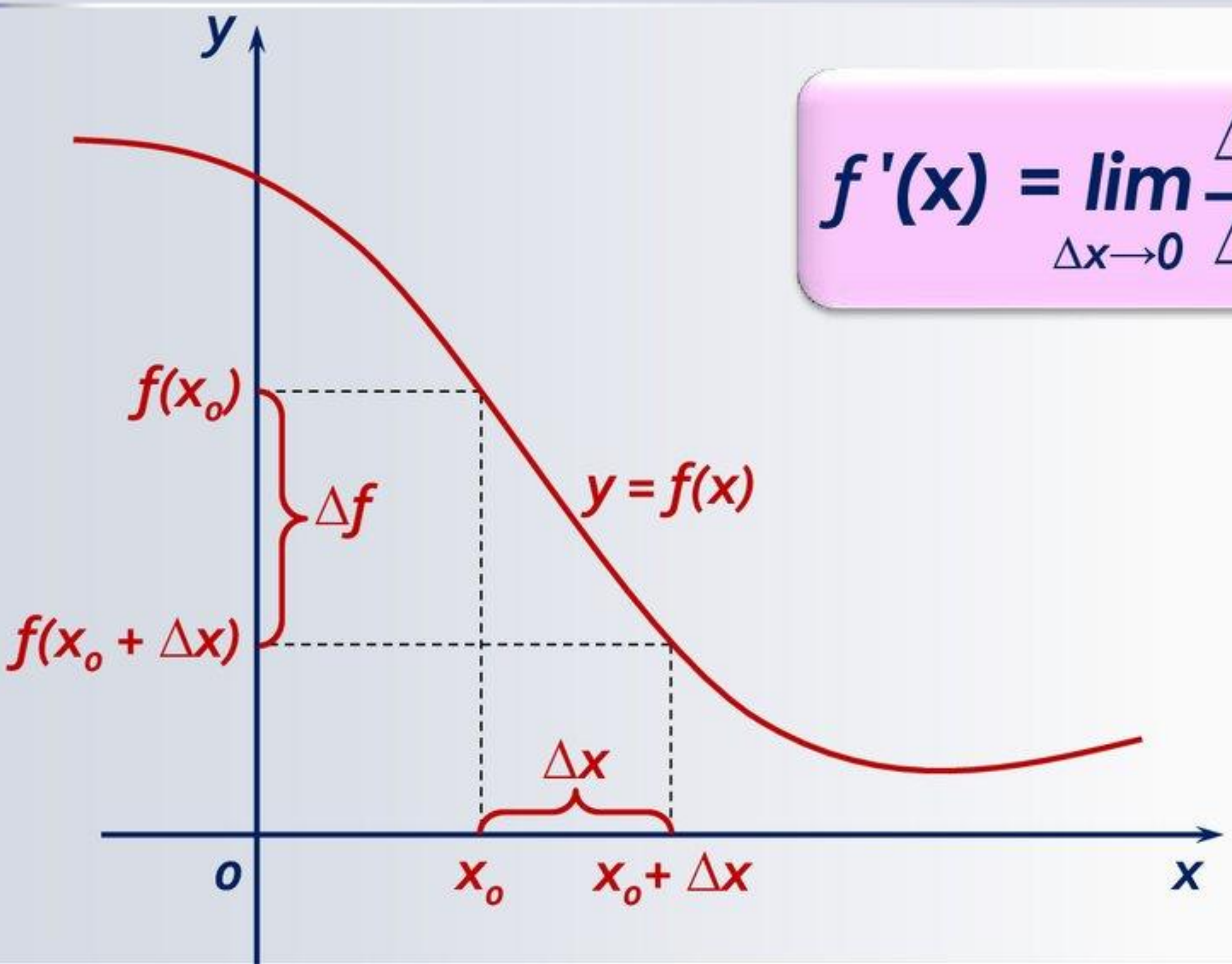


Таблица производных от основных функций

Функция	Производная
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$kx + b$	k	e^x	e^x
x^2	$2x$	a^x	$a^x \ln a$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$1/x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$

1. Производная от числа (константы) равна нулю.

$$(C)' = 0$$

2. Производная переменной равна единице.

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

6. Постоянный множитель С можно выносить из-под знака производной:

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

7. Производная степенной функции равна произведению показателя степени на переменную в степени меньшей на единицу

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

Производная показательной функции

Функция $f(x) = e^x$ дифференцируема в каждой точке области определения, и

$$(e^x)' = e^x.$$

Показательная функция

$$y = a^x$$

дифференцируема в каждой точке области определения, и

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Производные некоторых элементарных функций.

$$(sinx)' = cosx$$

$$(\boldsymbol{cos}x)' = -\boldsymbol{sin}x$$

$$(tqx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctqx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$(lnx)' = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

Правила нахождения производных

Производная степенной функции равна произведению показателя степени и основания в степени на единицу меньше.

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Например. Найти производные функций:

$y = x^{20}$, $y = 5x^4$, $y = \dfrac{1}{x}$ $y = \sqrt{x}$

Решение. $y' = 20x^{20-1} = 20x^{19}$,

$y' = 5 \cdot 4x^{4-1} = 20x^3$

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Пример 1. Найдём производную функции:

$$а)\quad y = 3x^{\frac{2}{3}};\quad y' = 3\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{-\frac{1}{3}};$$

$$б)\quad y = 7x^{-\frac{4}{7}};\quad y' = 7\cdot\left(x^{-\frac{4}{7}}\right)' = 7\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot x^{-\frac{11}{7}} = -4x^{-\frac{11}{7}};$$

Производная степенной функции

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$(kx + b)' = k,$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$((kx+b)^p)' = pk(kx+b)^p$$

$$(3x + 7)' = 3,\quad (-2x + 1)' = -2,\quad (5x)' = 5,\quad (x)' = 1.$$

Домашнее

Найти производную функции

1) x^6;   2) x^7;   3) x^{11};   4) x^{13}.

1) $(4x-3)^2$;   2) $(5x+2)^{-3}$;   3) $(1-2x)^{-6}$;